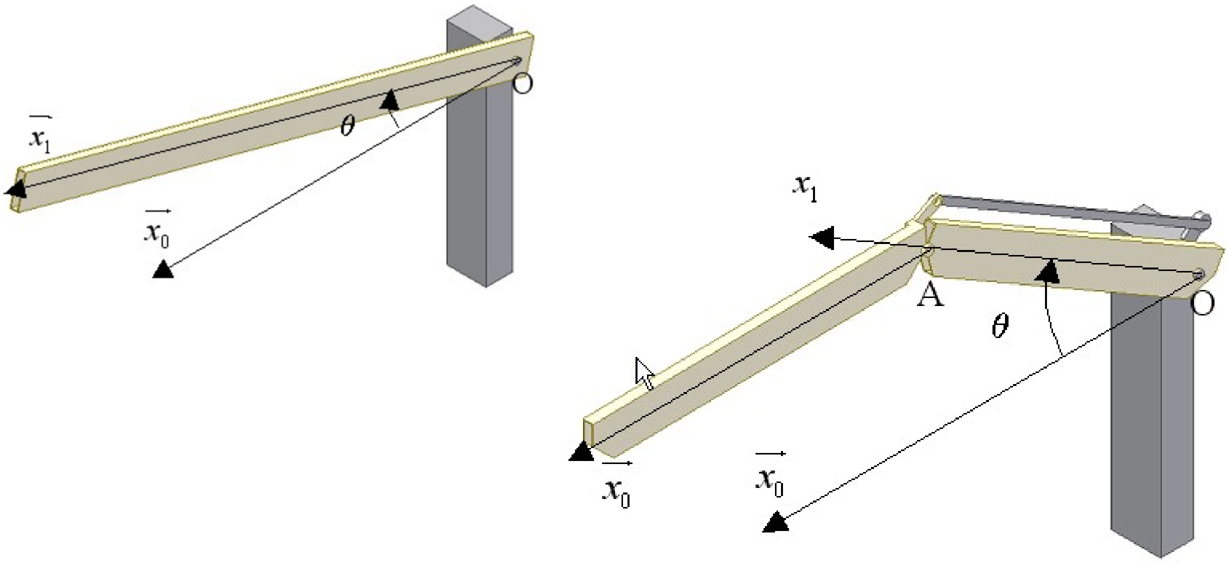
ÉNERGÉTIQUE



I INTRODUCTION

Le PFD appliqué à une masse ponctuelle M (m) dans le référentiel galiléen R_g, s'écrit : $m\,\vec{a}\left(M/R_g\right)=\sum\vec{F}_{ext}$ où $\sum\vec{F}_{ext}$ est l'ensemble des forces s'exerçant sur la masse ponctuelle.

En multipliant cette équation par la vitesse du point M, on obtient le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la masse ponctuelle :

$$m\cdot\frac{d\,\vec{V}\left(M/R_g\right)}{dt}\cdot\vec{V}\left(M/R_g\right)=\sum\left(\overrightarrow{F_{ext}}\cdot\vec{V}\left(M/R_g\right)\right)$$

soit :

$$\frac{d\left(E_c\left(M/R_g\right)\right)}{dt}=\sum\left(\overrightarrow{F_{ext}}\cdot\vec{V}\left(M/R_g\right)\right)=P_{ext\rightarrow M/R_g}$$

où $E_c\left(M/R_g\right)$ est l'énergie cinétique de M dans R_g et $P_{ext\rightarrow M/R_g}$ est la puissance des efforts extérieurs.

On cherche à généraliser ce théorème aux solides et aux ensembles de solides. Pour cela, il est nécessaire de :

- définir l'énergie cinétique d'un solide et d'un ensemble de solides
- définir la puissance
- démontrer le théorème de l'énergie cinétique à partir du PFD appliqué aux solides.

II ÉNERGIE CINÉTIQUE

II.1 Cas d'un système matériel

Par analogie avec le calcul de l'énergie cinétique d'un point, on définit l'énergie cinétique d'un système matériel Σ en mouvement par rapport à un référentiel (R) par la quantité scalaire suivante :

$$T_{\Sigma/R}=E_{C\Sigma/R}=\frac{1}{2}\int_{P\in\Sigma}[\vec{V}_{P\in\Sigma/R}]^2.dm(P)$$ (en Joules)

II.2 Cas d'un solide indéformable

L'énergie cinétique d'un solide S en mouvement par rapport à $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est donnée par :

$$\forall A \in S\,,\ T_{S/R} = \frac{1}{2}.\ {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A\in S/R} \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} m_S.\vec{V}_{G\in S/R} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R} \end{Bmatrix}$$ (au même point A quelconque)

Soit le comoment des torseurs cinématique et cinétique.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\vec{V}_{A\in S/R}.m_s\vec{V}_{G\in S/R} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/R}.\vec{\sigma}_{A,S/R}$$

Energie cinétique de translation **Energie cinétique de rotation**

***Démonstration* :**

II.3 Ensemble de solides indéformables

L'énergie cinétique est définie comme une intégrale, elle est donc additive. Pour un ensemble (Σ) de solides (*Si*), l'énergie cinétique de Σ est la somme des énergies cinétiques de chaque solide : $T_{\Sigma/R} = \sum_i T_{S_i/R}$

II.4 Cas particuliers

Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe $(A,\vec{x})$

<u>Cas d'un solide en translation</u>

<u>Cas où le point A est confondu avec le centre d'inertie G</u>

III PUISSANCES

III.1 Puissance des actions mécaniques extérieures à un système matériel

On considère une répartition de force $d\vec{f}(P)$ s'exerçant au point P. La puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un repère (R) est définie par la quantité scalaire suivante : $P_{ext\to\Sigma/R} = \int_{P\in\Sigma} \vec{V}_{P\in\Sigma/R}.d\vec{f}(P)$ [W : Watts]

<u>Rq</u> : cette répartition peut être volumique : $d\vec{f}(P) = \vec{f}(P)\,dV$, surfacique $d\vec{f}(P) = \vec{f}(P)\,dS$ où linéique $d\vec{f}(P) = \vec{f}(P)\,dl$

III.2 Puissances des actions mécaniques extérieures à un solide S

La **puissance développée à l'instant t** par un une action mécanique extérieure s'exerçant sur *S* en mouvement par rapport à $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est égale à :

$$P_{ext\to S/R} = \left\{T_{ext\to S}\right\} \otimes \left\{V_{S/R}\right\} = \vec{R}_{ext\to S}.\vec{V}_{A\in S/R} + \vec{M}_{A,ext\to S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$ (en n'importe quel point A)

<u>Démonstration</u> :

Rq : Cas particuliers

- Si $\{F\}$ est un glisseur (force) $\{F\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O$.

On a alors : $P(\{F\}\to S/R)=\vec{R}.\vec{V}(O\in S/R)$, ceci pour tout point O de l'axe du glisseur.

- Si $\{F\}$ est un couple $\{F\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{C}\end{Bmatrix}_{\forall P}$.

On a alors : $P(\{F\}\to S/R)=\vec{C}.\vec{\Omega}(S/R)$, ceci pour tout point.

III.3 Puissances des actions mécaniques extérieures à un ensemble de solides

La puissance des actions mécaniques extérieures $\bar{\Sigma}$ s'exerçant sur un ensemble (Σ) de solides (S_i) en mouvement par rapport à (R) est égale à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à chaque solide.

$$P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/R}=\sum_i P_{\bar{\Sigma}\to S_i/R}$$

III.4 Puissance des inter-efforts entre 2 solides S1 et S2 en mouvement par rapport à un repère R

Soient deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à (R) et possédant des actions mécaniques relatives (de contact par exemple).

La puissance des inter-efforts entre S_1 et S_2 est définie par :
$P_{S_1\leftrightarrow S_2}=\left\{T_{S_2\to S_1}\right\}\otimes\left\{V_{S_1/S_2}\right\}=\vec{R}_{S_2\to S_1}\cdot\vec{V}_{A\in S_1/S_2}+\vec{M}_{A,S_2\to S_1}\cdot\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$ en un point A quelconque
avec une écriture locale : $P_{S_1\leftrightarrow S_2}=\int_{P\in\Gamma}\vec{V}_{P\in S_1/S_2}\cdot d\vec{f}_{S_2\to S_1}$

La puissance des inter-efforts ne dépend pas du repère (R).

III.5 Cas particuliers pour lesquels la puissance des inter-efforts est nulle.

- Liaison parfaite, par définition $\forall \{V(S_1/S_2)\}$ compatible avec la liaison, $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{F(S_2 \to S_1)\}.\{V(S_1/S_2)\} = 0$

Application à la liaison hélicoïdale pas à droite (p en mètre/radian) d'axe $(O,\vec{x})$:

- Liaison sans glissement entre S1 et S2, soit $\vec{V}_{P\in S_1/S_2} = \vec{0}$ et $P_{S_1\leftrightarrow S_2} = \int_{P\in\Gamma} \vec{V}_{P\in S_1/S_2} \cdot d\vec{f}_{S_2\to S_1} = 0$ (liaison parfaite)
- Liaison sans frottement entre S1 et S2, soit $d\vec{f}_{S_2\to S_1} = \vec{0}$ donc $P_{S_1\leftrightarrow S_2} = 0$ (liaison parfaite)

IV THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) appliqué à un solide ou un système de solides donne **une relation scalaire** entre les paramètres cinématiques du mouvement, les caractéristiques d'inertie des solides et les efforts extérieurs appliqués au système isolé.

IV.1 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

On considère un solide indéformable S dans un référentiel galiléen R_g., le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\dfrac{dE_c(S/R_g)}{dt} = P_{ext\to S/R_g}$

Démonstration **:**

IV.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit (Σ) un ensemble de i solides (S_i). $$\sum_i \frac{d}{dt} T_{S_i/R} = \sum_i P_{\bar{\Sigma} \to S_i/R} + \sum_i \sum_{k \neq i} P_{S_k \to S_i/R}$$

D'où finalement :

Pour un système de solides (Σ), le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{d}{dt} T_{\Sigma/R} = P_{ext \to \Sigma/R} + P_{\Sigma}^{\text{int}}$$

Puissance Extérieure — Puissance Intérieure

La dérivée de l'énergie cinétique galiléenne d'un système de solides est égale à la puissance développée par les actions extérieures au système augmentée des puissances des inter-efforts (puissance intérieure) entre les solides constituants le système.

V UTILISATION DU TEC

V.1 Mise en œuvre

Le théorème de l'énergie cinétique ne fournit pas une équation supplémentaire par rapport au principe fondamental de la dynamique. L'équation scalaire obtenue est une combinaison des 6 équations issues du PFD pour un isolement donné.

Quand est-il plus efficace d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique ?

Lorsque l'on souhaite obtenir une seule équation couplant les efforts extérieurs et les paramètres cinétiques ou une seule équation de mouvement (problème à un paramètre pilote).

Remarque : S'il y a plusieurs paramètres pilotes, on peut obtenir une équation avec le TEC puis d'autres équations avec le PFD.

Comment appliquer le TEC pour obtenir une équation de mouvement ?

- On réalise un graphe de structure comme pour le PFD
- On isole tous sauf le bâti
- On calcule P_{int} en utilisant les hypothèses (liaisons parfaites ou non, frottement de Coulomb...)
- On fait le bilan des actions mécaniques extérieures, on écrit les torseurs de ces actions mécaniques et les torseurs cinématiques **par rapport au référentiel galiléen** correspondant en des points caractéristiques (où les torseurs sont simples) pour calculer la somme des puissances extérieures **galiléennes**.
- On calcule l'énergie cinétique **galiléenne** pour chaque solide inclus dans la frontière d'isolement et on somme ces énergies cinétiques :
- On applique le TEC pour obtenir une équation liant les paramètres de mouvement aux actions extérieures

V.2 Notion de rendement

On note P_m la puissance reçue par un système (due à des actions mécaniques extérieures au niveau de l'entrée du système). P_m est la puissance fournie par l'élément moteur. On note P_r la puissance disponible en sortie du système. On note P_u la puissance utile pour le système.

On définit le rendement par $\eta = \dfrac{P_u}{P_m}$

La puissance utile n'est alors pas la même en régime établi et en régime transitoire.

- En régime établi, la puissance utile est uniquement égale à la puissance au niveau de la sortie du système P_r.
- En régime transitoire, la puissance utile doit tenir compte de la mise en mouvement du système et donc de l'énergie cinétique. On définit alors : $P_u = P_r + \dfrac{d\,T_{\Sigma/R}}{dt}$

Le TEC appliqué à Σ donne : $\dfrac{d\,T_{\Sigma/R}}{dt} = P_m - P_r + P_{int}$

De manière générale, la puissance intérieure correspond à une puissance perdue par le système par frottement. On note en général : $P_{int} = -P_f$.

Ainsi le rendement du système est égal à $\eta = \dfrac{P_u}{P_m} = \dfrac{P_m - P_f}{P_m}$

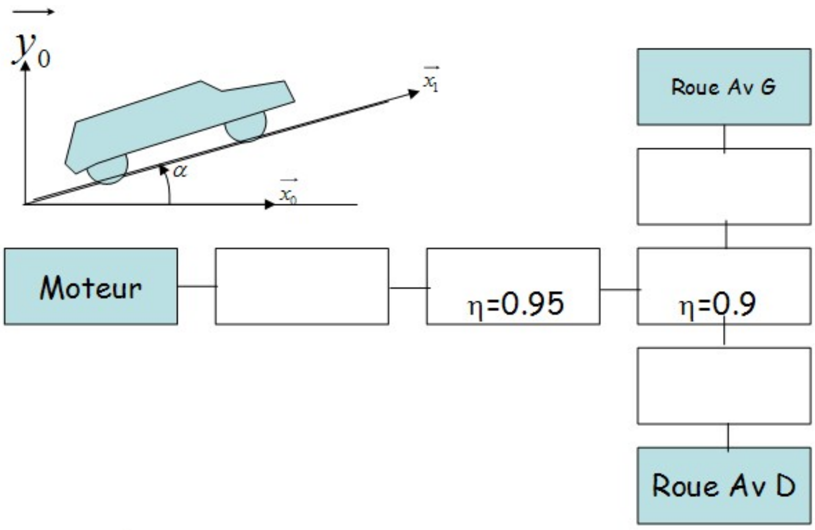
Si le rendement d'un système est donné, il est alors possible d'estimer la puissance intérieure perdue par frottement en utilisant la relation précédente : $P_f = (1-\eta)\,P_m$

Illustration : Étude d'un véhicule thermique se déplaçant sur une pente

Objectif : déterminer la puissance en sortie du moteur nécessaire au véhicule afin de gravir la pente à vitesse constante.

Hypothèses

- M=900 kg masse du véhicule ; g=9,8 m.s-2
- V=90 km/h vitesse du véhicule constante (pas de vent)
- α=8 degrés (pente de 14%)
- Résistance de l'air $Ra=1/2.\rho_{air}.S.c_X V^2$
- $\rho_{air}=1,3$ kg.m^{-3} ; S=2m^2 surface frontale;
- c_X=0.3 coefficient de pénétration dans l'air
- Action de la pesanteur prise en compte
- RSG au niveau des roues, pas de résistance au roulement
- Traction avant



V.3 Notion d'inertie équivalente

Nous avons vu que l'énergie cinétique pour un ensemble de solide était égale à la somme des énergies cinétiques de chacun de ces solides : $T_{\Sigma/R} = \sum_i T_{S_i/R}$

Lorsqu'il existe des relations cinématiques entre les solides S_i, il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble des solides en fonction d'une seule variable cinématique (variable pilote).

En exprimant chaque paramètre cinématique en fonction de la variable pilote, on pourra alors écrire

- si la variable pilote est une vitesse angulaire ω_1 (du solide 1): $T_{\Sigma/R}=\frac{1}{2}J_{eq}\,\omega_1^{\,2}$

  J_{eq} est l'inertie équivalente ramenée au solide 1
- si la variable pilote est une vitesse linéaire V_1 (du solide 1) : $T_{\Sigma/R}=\frac{1}{2}M_{eq}\,V_1^{\,2}$

  M_{eq} est la masse équivalente ramenée au solide 1

De la même manière, on peut exprimer la puissance des efforts extérieurs en fonction de cette variable unique.
$P_{ext}=C_{eq}\,\omega$ ou $P_{ext}=F_{eq}\,V$

Le théorème de l'énergie cinétique prend alors la forme simplifiée suivante (si $P_{int}=0$) :

$$J_{eq}\,\dot{\omega}_1=C_{eq} \text{ ou } M_{eq}\,\dot{V}_1=F_{eq}$$

<u>Rq</u> : La puissance intérieure peut s'écrire : $P_f=C_{fs}\,\omega_1+C_{fv}\,\omega_1$ avec :
- C_{fs} couple équivalent ramené au solide 1 du aux frottements secs
- C_{fv} couple équivalent ramené au solide 1 dû aux frottements fluides : $C_{fv}=f_v\,\omega_1$

Illustration: Étude d'un treuil actionné par un moteur électrique
Objectifs :
- *rechercher l'expression du couple moteur en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.*
- *Identifier les paramètres caractéristiques de l'équation de comportement de ce système* $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{eq}\omega_{m/0}^2\right)=C_m\omega_{m/0}-C_{R_{eq}}\omega_{m/0}$