

Éléments de correction

Q1

Energie cinétique (on note $\Omega_r = \Omega(\text{rotor} / R_g) = \Omega(4/0)$) :

$$T(S/R_g) = T(\text{stator} / R_g) + T(\text{rotor} / R_g) + T(\text{masse } M_y / R_g)$$

$$= \frac{1}{2} I_s \Omega_s^2 + \frac{1}{2} I_r \Omega_r^2 + \frac{1}{2} M_y V_y^2$$

En notant que $\Omega(4/0) = \Omega(4/1) + \Omega(1/0) = \Omega_m + \Omega_s$ et en utilisant les différents facteurs de transformation, il vient sans difficulté : $T(S/R_g) = \frac{1}{2} I_s \Omega_s^2 + \frac{1}{2} I_r (N+1)^2 \Omega_s^2 + \frac{1}{2} M_y (N_1(\theta_m))^2 \Omega_s^2$

Utilisation du théorème de l'énergie-puissance

La dérivation par rapport au temps de l'expression de l'énergie cinétique conduit à la relation :

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = I_s \Omega_s \dot{\Omega}_s + I_r (N+1)^2 \Omega_s \dot{\Omega}_s$$

$$+ M_y (N_1(\theta_m))^2 \Omega_s \dot{\Omega}_s + M_y N_1(\theta_m) \Omega_s^2 \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \dot{\theta}_m$$

En utilisant l'expression des puissances, et en notant que $\dot{\theta}_m = \Omega_m$, on en déduit :

$$\left[I_s + I_r (N+1)^2 + M_y (N_1(\theta_m))^2 \right] \dot{\Omega}_s = C_m N + F \cdot N_1(\theta_m) - M_y N_1(\theta_m) \frac{N'_1(\theta_m)}{N} \Omega_m^2$$

En identifiant cette expression avec celle proposée, on en déduit :

$$I_{eq}(\theta_m) = I_s + I_r (N+1)^2 + M_y (N_1(\theta_m))^2$$

$$A = N$$

$$B = \frac{M_y N_1(\theta_m) N'_1(\theta_m)}{N}$$

$$C(\theta_m) = -N_1(\theta_m)$$

Q2 et Q3.

$$C_{m0} N + F_0 \cdot N_1(\theta_m) - M_y N_1(\theta_m) \frac{N'_1(\theta_m)}{N} \Omega_{m0}^2 = 0$$

$$C_{m0}(t) = \frac{K_c}{R} (U_0 - K_e \Omega_{m0})$$
ou

$$A C_{m0} - B(\theta_{m0}) \Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0}) F_0 = 0$$

$$C_{m0}(t) = \frac{K_c}{R} (U_0 - K_e \Omega_{m0})$$

Q4. On part de l'équation différentielle

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_m}{N} = A(C_{m0} + c_{m1}) - B(\theta_m)(\Omega_{m0} + \Omega_1)^2 - C(\theta_m)(F_0 + f_1) \quad \text{et} \quad \text{de} \quad \text{la}$$

$$\text{relation : } (C_{m0}(t) + c_{m1}) = \frac{K_c}{R} [(U_0 + u_1) - K_e(\Omega_{m0} + \Omega_1)]$$

En regroupant les termes liés au régime permanent et aux variations, la relation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$I_{eq}(\theta_{m0}) \frac{\dot{\Omega}_m}{N} = \underbrace{\left[A C_{m0} - B(\theta_m) \Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0}) F_0 \right]}_{0 \text{ (régime permanent)}} + \underbrace{A c_{m1} - 2B(\theta_{m0}) \Omega_{m0} \Omega_1 - C(\theta_m) f_1}_{\text{régime des variations}} - \underbrace{B(\theta_{m0}) \Omega_1^2}_{2\text{nd ordre}}$$

$$\underbrace{C_{m0}(t) - \frac{K_c}{R} (U_0 - K_e \Omega_{m0})}_{0 \text{ (régime permanent)}} + c_{m1} = \frac{K_c}{R} (u_1 - K_e \Omega_1)$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante régissant le comportement en régime de

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_1}{N} = Ac_{m1} - 2B(\theta_m)\Omega_{m0}\Omega_1 - C(\theta_m)f_1$$

variations :

$$c_{m1} = \frac{K_c}{R}(u_1 - K_e\Omega_1)$$

Il fallait alors faire l'hypothèse de **petites** variations pour négliger le terme en Ω^2 . En utilisant dans la première équation l'expression du couple moteur on obtient :

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_1}{N} = A \frac{K_c}{R} u_1 - \left[A \frac{K_c K_e}{R} + 2B(\theta_m)\Omega_{m0} \right] \Omega_1 - C(\theta_m)f_1$$

Soit finalement l'équation différentielle recherchée :

$$\frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} \dot{\Omega}_1 + \Omega_1 = \frac{AK_c}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} u_1 - \frac{RC(\theta_m)}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} f_1$$

En identifiant les différents termes on peut poser les relations suivantes :

$$\tau = \frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

$$K = \frac{AK_c}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

$$D = \frac{RC(\theta_m)}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

Q5

Calcul sans difficulté particulière, en utilisant la relation $\tau_0 \dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K_0 u_1(t) - D_0 f_1(t)$ on

établi : $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p}$ et $\frac{F_1(p)}{U_1(p)} = -\frac{D_0}{1 + \tau_0 p}$

Q6 Pour $\omega \gg 1/\tau_0$ la fonction Ω_1/U_1 peut être approchée par la relation :

$$\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} \approx \frac{K_0}{\tau_0 p} = \frac{K_1}{p} \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{K_0}{\tau_0}$$

Q7 Le cahier des charges impose un écart nul vis-à-vis d'un effort perturbateur constant, en conséquence la chaîne directe doit comporter une intégration entre le comparateur et le point d'entrée de la perturbation, soit ici dans le régulateur. A noter :

- que la présence d'un intégrateur ($H_1(p)$) dans la chaîne directe est insuffisante dans ce cas pour assurer un écart nul car cet intégrateur se trouve après le point d'entrée de la perturbation de la structure de commande de la figure 14,
- par ailleurs l'intégrateur du procédé provient d'une approximation du modèle du procédé et ne correspond donc pas à une intégration « idéale ».

Par ailleurs ce correcteur permet de satisfaire la marge de phase (en jouant avec le gain)

Q8.

Le transfert $T(p) = \Omega_1(p)/F_1(p)$ est donné par la relation : $T(p) = -H_2(p) \frac{H_1(p)}{1 + GR(p)H_1(p)H_3(p)}$

La réponse fréquentielle est obtenue en posant $p = j\omega$, on obtient alors :

$$T(j\omega) = -H_2(j\omega) \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)}$$

En considérant successivement les conditions $\|GRH_1H_3\| \gg 1$ et $\|GRH_1H_3\| \ll 1$, on peut écrire :

$$\|M(j\omega)\| = \left\| \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| \approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{GR(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| & \text{si } \|GRH_1H_3\| \gg 1 \\ \|H_1(j\omega)\| & \text{si } \|GRH_1H_3\| \ll 1 \end{cases}$$

Les conditions $\|GRH_1H_3\| \gg 1$ et $\|GRH_1H_3\| \ll 1$ peuvent encore être réécrites suivant les formulations $\|H_1\| \gg \|1/GRH_3\|$ et $\|H_1\| \ll \|1/GRH_3\|$. On peut donc écrire l'expression de $\|M(j\omega)\|$ suivante :

$$\|M(j\omega)\| = \left\| \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| \approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{GR(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| & \text{si } \|H_1\| \gg \|1/GRH_3\| \\ \|H_1(j\omega)\| & \text{si } \|H_1\| \ll \|1/GRH_3\| \end{cases}$$

Au regard de cette dernière relation on s'aperçoit que $\|M(j\omega)\|$ prend la valeur de la plus petite des deux expressions $\|H_1(j\omega)\|$ et $\|1/[GR(j\omega)H_3(j\omega)]\|$. D'où l'expression :

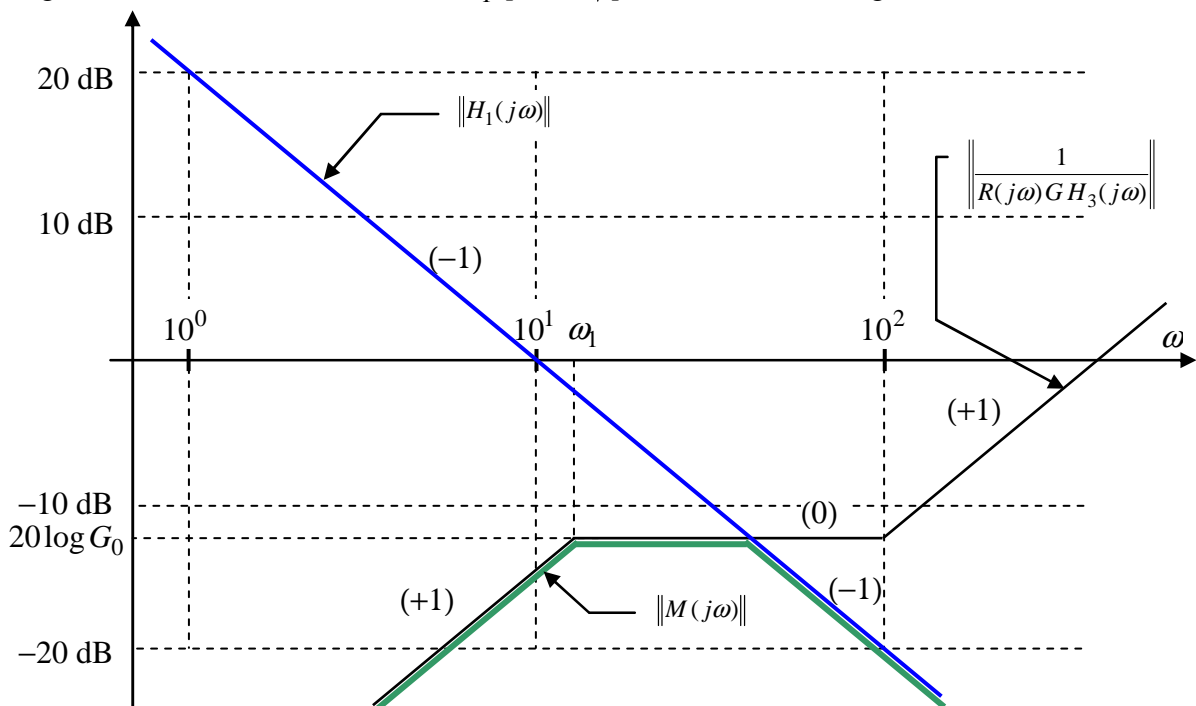
$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \|M(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left(\|H_1(j\omega)\| ; \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$

Q9. L'expression de $1/[GR(p)H_3(p)]$ est : $\frac{1}{GR(p)H_3(p)} = \frac{T_i p(1+0,01p)}{K_r(1+T_i p)}$

Les pulsations de brisure sont $\omega_1 = 1/T_i$ et $\omega_2 = 100$ rad/s. Entre ω_1 et ω_2 la fonction de transfert précédente peut être approchée par la relation : $\frac{1}{GR(p)H_3(p)} = \frac{T_i p(1+0,01p)}{K_r(1+T_i p)} \approx \frac{T_i p \cdot 1}{K_r \cdot T_i p} = \frac{1}{K_r}$

Soit $G_0 = 1/K_r$.

Le diagramme de Bode de la fonction $H_1(p) = 10/p$ est donné sur la figure suivante.



Q10

Les tracés précédents permettent de déduire une forme approchée de $T(p)$:

$$T(p) = -0,05M(p) = -\frac{0,05Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = -\frac{0,05T_i p}{K_r(1+T_i p)(1+\tau_2 p)}$$

La constante de temps τ est déduite par la pulsation correspondant à l'intersection entre $H_1(p)$ et

$$G_0 : \left\| \frac{10}{j\omega} \right\| = G_0$$

Soit pour la pulsation $\omega = 10/G_0 = 10K_r$. On en déduit : $\tau = \tau_2 = 1/(10K_r)$

Q11. Avec les hypothèses adoptées $T_i > \tau$ on peut donc retenir la forme

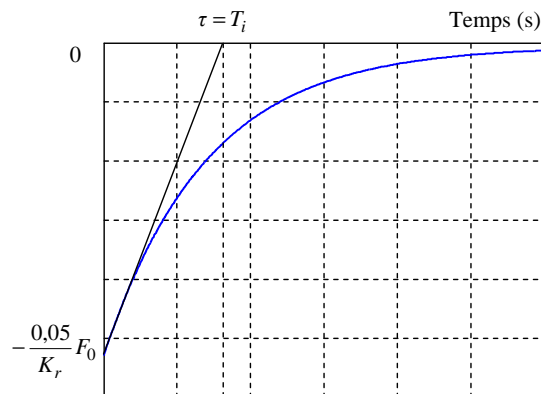
$$\text{simplifiée : } T_a(p) = -\frac{0,05T_i p}{K_r(1+T_i p)}$$

En réponse à un échelon de consigne d'amplitude F_0 on obtient : $\Omega_1(p) = -\frac{0,05T_i}{K_r(1+T_i p)} F_0$

Ce qui conduit à l'évolution temporelle typique d'une fonction du 1^{er} ordre :

$$\Omega_1(t) = -\frac{0,05F_0}{K_r} e^{-\frac{t}{T_i}} \Upsilon(t)$$

Cette réponse est illustrée sur la figure ci-contre.

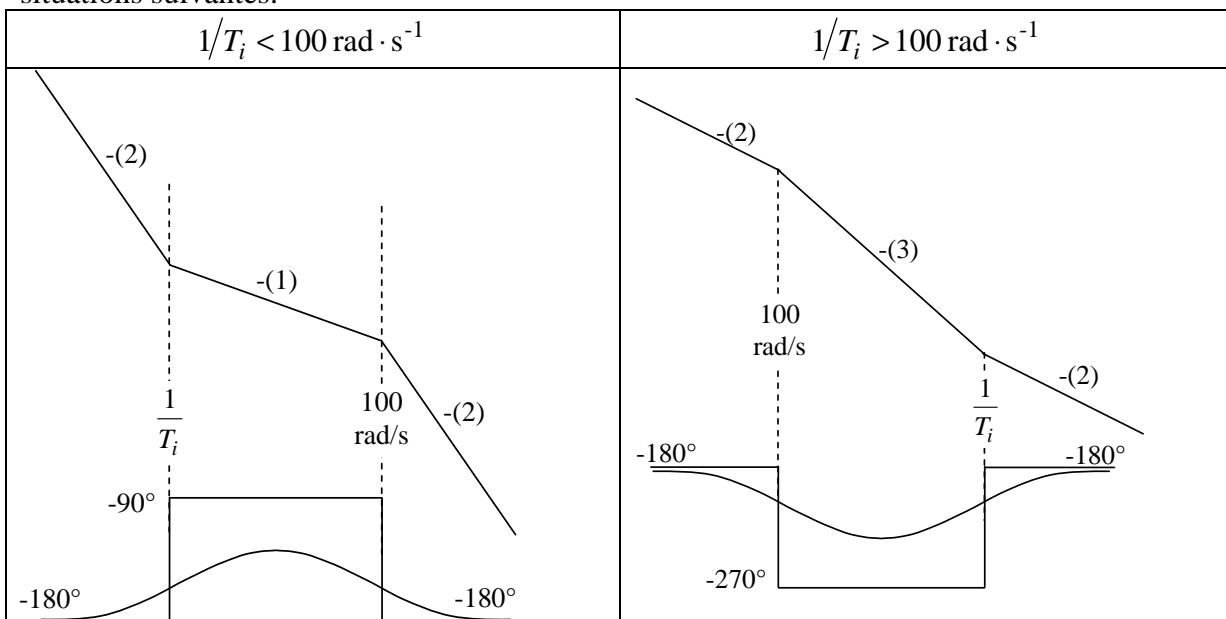


Q12 La vitesse revient au point d'équilibre correspondant à la valeur de consigne. On ne peut utiliser directement la définition du temps de réponse habituel à un échelon car ici la réponse revient à l'équilibre. Mais en utilisant une analogie avec les fonctions du 1^{er} ordre (soit un temps de réponse de 3 fois la constante de temps) on peut écrire : $t_r = 3T_i$

Q13 Le temps de réponse vis-à-vis des perturbations est d'autant plus faible que T_i est faible, aussi il est intéressant de choisir pour ce paramètre la plus petite valeur possible compatible avec les exigences de la stabilité en boucle fermée.

Q14 La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit : $T_{bo}(p) = \frac{10K_r(1+T_i p)}{T_i p^2(1+0,01p)}$

Suivant la valeur de T_i par rapport à la pulsation de brisure de 100 rad/s on peut obtenir les deux situations suivantes.

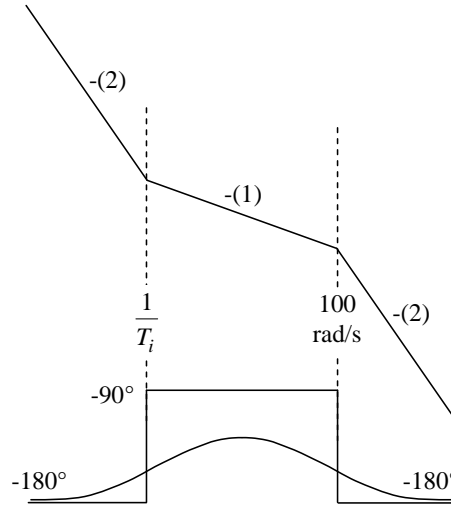


Au regard de ces diagrammes

- il est clair qu'avec $1/T_i > 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la marge de phase sera nécessairement négative conduisant à l'instabilité du système boucle
- si $1/T_i < 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, un choix correct de T_i pourra permettre d'assurer la marge de phase souhaitée.

Q15

La seule situation possible pour assurer la stabilité en boucle fermée est celle correspondant à $1/T_i < 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le diagramme de Bode associé est donné sur la figure ci-contre.



Q16. La synthèse du régulateur P.I. peut s'interpréter dans ce cas comme le calcul d'un correcteur à avance de phase, sur un système double intégrateur, avec $T = T_i$. Cependant dans ce cas le terme $1/(aT) = 100 \text{ rad/s}$ est fixé, le seul paramètre de réglage étant ici T_i .

La valeur $T_{i\min}$ sera obtenue en adoptant le cas strict, savoir $\varphi_m = \Delta\varphi = 45^\circ$. Soit pour :

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = \frac{1 - \sin 45^\circ}{1 + \sin 45^\circ} = 0,17$$

On en déduit : $\frac{1}{T_i} = 100a = 17 \text{ rad/s}$, ou encore $T_i = 0,059 \text{ s}$

Q17 La phase sera maximale pour $\omega_m = \sqrt{1700} = 41 \text{ rad/s}$, il faut donc déterminer K_r en vue d'assurer une pulsation de coupure $\omega_c = \omega_m = 41 \text{ rad/s}$. Soit :

$$20 \log \left(\frac{10K_r}{T_i \omega_c^2} \right) + 10 \log \left(\frac{1}{a} \right) = 0 \text{ dB}$$

On en déduit : $K_r = \frac{T_i \omega_c^2 \sqrt{a}}{10} = \frac{\omega_c^2}{10 \omega_c} = 4,1$

On vérifie par ailleurs que l'hypothèse de la question 10, $G_0 = 1/K_r < 1$, est vérifiée.

Q18. La fonction de transfert en boucle ouverte comporte deux intégrations, dont une avant le point d'entrée de la perturbation, dont l'écart en régime permanent sera nul vis-à-vis d'une consigne et d'un effort perturbateur constants.

- Le temps d'action intégrale est $T_i = 0,059 \text{ s}$, donc d'après l'analyse effectuée à la question 11, le temps de réponse vis-à-vis des perturbations est : $t_r = 3T_i = 0,177 \text{ s}$; cette valeur est inférieure à la valeur maximale donnée par le cahier des charges.

Q19. Comme le régulateur est de type P.I. il vient sans difficulté : $u_c(t) = K_r \varepsilon(t) + \frac{K_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$

Si la porte est bloquée pendant la phase de coulissement, comme la consigne est constante on peut

$$u_c(t) = u_{c0} + K_r \Omega_{1c}(t) + \frac{K_r}{T_i} \int_{t_0}^t \Omega_{1c}(\tau) d\tau$$

Comme la vitesse de consigne est positive, le terme intégral est nécessairement positif divergeant lorsque le temps tend vers l'infini. La valeur de $u_c(t)$ est nécessairement limitée par la valeur maximale que la tension moteur peut atteindre $U_{\max} = 100$ volts.

Q20 Comme la porte est bloquée la f.c.e.m. est nulle, en régime permanent le courant moteur et le couple associé sont alors : $i_m = \frac{U}{R}$ et $C_m = K_c \frac{U}{R}$

La force subie par le passage s'obtient à partir du couple moteur, du rapport de réduction et du rayon de la poulie :

$$F_{\text{passager}} = K_c \frac{U}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}} \quad \text{accepter aussi} \quad F_{\text{passager}} = \frac{1}{2} K_c \frac{U}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}}$$

Q21 Si la tension maximale du moteur est atteinte on obtient :

$$F_{\text{passager}} = K_c \frac{U_{\max}}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}} = 1,2 \frac{110}{20} \cdot \frac{7}{0,04} = 1160 \text{ N}$$

Cette valeur est supérieure à la valeur maximale autorisée par le cahier des charges, donc celui-ci n'est pas entièrement vérifié.

Q22. On peut utiliser par exemple une régulation du courant moteur en limitant la consigne de courant de manière à ne pas dépasser la valeur limite du courant conduisant au dépassement de la force maximale admissible.

Q23 On peut par exemple utiliser une structure cascade comme celle représentée sur la figure suivante. Cette structure comporte une boucle de courant interne dont la consigne est issue du régulateur de vitesse. La limitation du courant de consigne pourra donc permettre de limiter le couple moteur et en conséquence la force subie par le passager en cas de choc.

