

CORRIGE

Q1

Solution 1 : Compatibilité des torseurs cinématiques

Après déplacement en A du torseur cinématique de la sphérique en B on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} p_{12}^1 & 0 \\ q_{12}^1 & 0 \\ r_{12}^1 & 0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} p_{12}^2 & -2d_2 \cdot q_{12}^2 \\ q_{12}^2 & +2d_2 \cdot p_{12}^2 \\ r_{12}^2 & 0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{12}^1 = r_{12}^2 & 0 \end{matrix} \right\}_A \text{ torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe } (A, z_0).$$

Solution 2 : Somme des torseurs d'actions transmissibles

Après déplacement en A du torseur de la sphérique en B on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} X_{12}^1 & 0 \\ Y_{12}^1 & 0 \\ Z_{12}^1 & 0 \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} X_{12}^2 & -2d_2 \cdot Y_{12}^2 \\ Y_{12}^2 & +2d_2 \cdot X_{12}^2 \\ Z_{12}^2 & 0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} X_{12}^{eq} & L_{12}^{eq} \\ Y_{12}^{eq} & M_{12}^{eq} \\ Z_{12}^{eq} & 0 \end{matrix} \right\}_A \text{ torseur d'actions transmissibles d'une liaison pivot d'axe } (A, z_0).$$

Q2

Solution 1 : En écrivant la fermeture géométrique : $\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_0} = \vec{0}$ soit $L \cdot \overrightarrow{x_c} + L \cdot \overrightarrow{x_j} - x \cdot \overrightarrow{x_0} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{Après projection sur } \overrightarrow{x_0} \text{ et } \overrightarrow{y_0} : \quad & L \cdot \sin\theta_{j_0} = L \cdot \sin\theta_{0c} \\ & L \cdot \cos\theta_{j_0} = x - L \cdot \cos\theta_{0c} \\ & \text{D'où : } x = 2L \cdot \cos\theta_{0c} \end{aligned}$$

Solution 2 : On peut également retrouver directement ce résultat en constatant que le triangle $O_0O_1O_2$ est isocèle.

Q3

D'après le cdcf on a : $(\theta_{0c} + \beta)_{MAX} = 150^\circ$ d'où $\theta_{0c,MAX} = 90^\circ$. $\Delta x = 2L[\cos\theta_{0c}]_0^{90^\circ} = 2L$
 $\Delta x = 1,2 \text{ m} < 1,3 \text{ m}$ de course maximum du composant

Q4

On réalise le schéma bloc fonctionnel : La solution sans intégrateur passant de U_m à θ_m directement par le moteur est acceptée.

Q5 Le théorème du moment statique appliqué à la poulie en O et en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ donne : $\frac{C_{M1}}{\rho_1} = r \cdot F_{p1}$

Le théorème de la résultante statique appliqué au tronçon AB en projection sur $\overrightarrow{x_0}$ donne $F_{p1} = F_{c1}$ d'où $C_{M1} = \rho_1 \cdot r \cdot F_{c1}$

Q6

$$M \cdot \overrightarrow{a(G_1, 1/0)} + m \cdot \overrightarrow{a(G_3, 3/0)} = \sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow \{1,2,3\}}} \text{ Avec : } \sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow \{1,2,3\}}} \cdot \overrightarrow{x_0} = F_p - F_{c1} = F_p - \frac{C_{m1}}{\rho_1 \cdot r}$$

Calcul des quantités dynamiques : $\overrightarrow{a(G_1, 1/0)} = \ddot{x} \cdot \overrightarrow{x_0}$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \frac{d}{dt} (x \cdot \overrightarrow{x_0} + h_2 \cdot \overrightarrow{y_0} + h_4 \cdot \overrightarrow{x_2} + h_3 \cdot \overrightarrow{y_3}) \Big|_0$$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \dot{x} \cdot \overrightarrow{x_0} + h_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2} + h_3 \cdot \dot{\theta}_{23} \cdot \overrightarrow{z_3} \text{ et } \dot{\alpha} = 0$$

D'où : $\overrightarrow{a(G_3, 3/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \ddot{x} + h_3 (\ddot{\theta}_{23} \cdot \sin\theta_{23} \cdot \sin\alpha + \dot{\theta}_{23}^2 \cdot \cos\theta_{23} \cdot \sin\alpha)$

On en déduit l'équation du mouvement : $M\ddot{x} + m \left(\ddot{x} + h_3 (\ddot{\theta}_{23} \cdot \sin\theta_{23} \cdot \sin\alpha + \dot{\theta}_{23}^2 \cdot \cos\theta_{23} \cdot \sin\alpha) \right) = F_p - \frac{C_{m1}}{\rho_1 \cdot r}$

Q7 On obtient cette équation en appliquant le théorème du moment dynamique au solide 3 en O_2 en projection sur x_2 .

Q8 Les deux équations sont couplées et non linéaires, ce qui rend leur traitement dans le domaine de Laplace difficile.

Q9 On obtient cette équation à partir des précédentes en posant : $\theta_{23} = 0, \dot{\theta}_{23} = 0, \ddot{\theta}_{23} = 0$. Seul le mouvement de translation est pris en compte pour l'instant afin d'obtenir une modélisation linéaire.

$$\mathbf{Q10} \quad k_2 = \frac{k_t}{R}; \quad k_9 = \rho_1 \cdot r; \quad k_7 = k_e; \quad H_3(p) = \frac{1}{p(M+m)(\rho_1 \cdot r)^2}$$

$$\mathbf{Q11} \quad H_4(p) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbf{Q12} \quad (2 \text{ fronts montants} + 2 \text{ fronts descendants}) \times 500 = 2000 \text{ incréments par tour d'où } k_8 = \frac{1000}{\pi}$$

Q13 En écrivant les deux roulements sans glissement dans le référentiel lié au porte satellite 3 on obtient : $\frac{\omega_{23}}{\omega_{03}} = \frac{Z_0}{Z_2}$ et $\frac{\omega_{23}}{\omega_{03}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$, on en déduit : $\omega_{10} = \omega_{30} \frac{Z_1+Z_0}{Z_1}$

Q14 Pour fonctionner en mode réducteur $\omega_{poulie} < \omega_{mot}$ d'où : $\omega_{mot} = \omega_{10}$ et $\omega_{poulie} = \omega_{30}$

$$\mathbf{Q15} \quad \frac{Z_1}{Z_1+Z_0} = \rho_1 = \frac{1}{10} \text{ et } Z_1 = 10 \text{ dents On en déduit : } Z_0 = 90 \text{ dents}$$

Q16 Ce bloc correspond au réducteur donc : $k_5 = \rho_1$

Q17 Ce bloc correspond au rapport du système poulie courroie : $k_6 = r$

Q18 Afin d'obtenir un asservissement sur X_c il faut imposer : $k_1 = \frac{k_8}{k_5 \cdot k_6}$

$$\mathbf{Q19} \text{ En procédant par identification : } X(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} [D \cdot F_p(p) + C(p)(X_c(p) - X(p))]$$

Et :

$$X(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_5 \cdot k_6 \cdot H_3(p) \cdot H_4(p)}{1 + k_7 \cdot k_2 \cdot H_3(p)} \left[-\frac{k_9}{k_1 \cdot k_2} \cdot F_p(p) + C(p)(X_c(p) - X(p)) \right]$$

$$\text{D'où : } D = -\frac{k_9}{k_1 \cdot k_2} = -\frac{R \cdot (\rho_1 \cdot r)^2}{k_t \cdot k_8} \text{ En posant } \delta = (M+m) \cdot (\rho_1 \cdot r)^2$$

$$\text{Et après développement : } B = \frac{\delta}{k_2 \cdot k_7} = \frac{R(M+m) \cdot (\rho_1 \cdot r)^2}{k_e \cdot k_t} \text{ Et } A = \frac{k_8}{k_7} = \frac{k_8}{k_e}$$

$$\mathbf{Q20} \quad \varepsilon_x(p) = \frac{1}{1 + \frac{A \cdot C(p)}{p \cdot (B \cdot p + 1)}} \left[X_c(p) - \frac{A \cdot D}{p \cdot (B \cdot p + 1)} F_p(p) \right] = \frac{p \cdot (B \cdot p + 1) X_c(p) - A \cdot D F_p(p)}{p \cdot (B \cdot p + 1) + A \cdot C(p)}$$

Q21 On impose : $F_p(p) = \frac{F_0}{p}$ et $X_c(p) = \frac{X_0}{p}$ on en déduit : $\lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = -\frac{D}{K_C} F_0$ donc l'écart statique est non nul. On peut aussi remarquer l'absence d'intégrateur en amont de la perturbation. Le cahier des charges n'est pas respecté.

$$\mathbf{Q22} \quad \varepsilon_x(p) = \frac{1}{1 + \frac{A \cdot K_i (1 + T_i \cdot p)}{p \cdot (B \cdot p + 1) \cdot T_i \cdot p}} \left[X_c(p) - \frac{A \cdot D}{p \cdot (B \cdot p + 1)} F_p(p) \right] = \frac{T_i \cdot p^2 \cdot (B \cdot p + 1) X_c(p) - T_i \cdot p \cdot A \cdot D F_p(p)}{T_i \cdot p^2 \cdot (B \cdot p + 1) + A \cdot K_i (1 + T_i \cdot p)}$$

Q23 On impose : $F_p(p) = \frac{F_0}{p}$ et $X_c(p) = \frac{X_0}{p}$ on montre : $\lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = 0$ donc l'écart statique est nul.

On peut aussi remarquer que le système est de classe 2 et qu'il existe une intégration en amont de la perturbation. Donc l'écart statique est nul. Le cahier des charges est respecté.

$$\mathbf{Q24} \quad FTBO = \frac{A \cdot C(p)}{p(Bp+1)} = A \cdot K_i \frac{(1+T_i \cdot p)}{p^2 \cdot (B \cdot p + 1) T_i}$$

Q25 Pour $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$ nous voulons : $Arg(FTBO) = -135^\circ$ Et $Arg(FTBO) = -180^\circ - Arg(1 + 0,5j) + Arg(1 + 50 \cdot T_i \cdot j)$

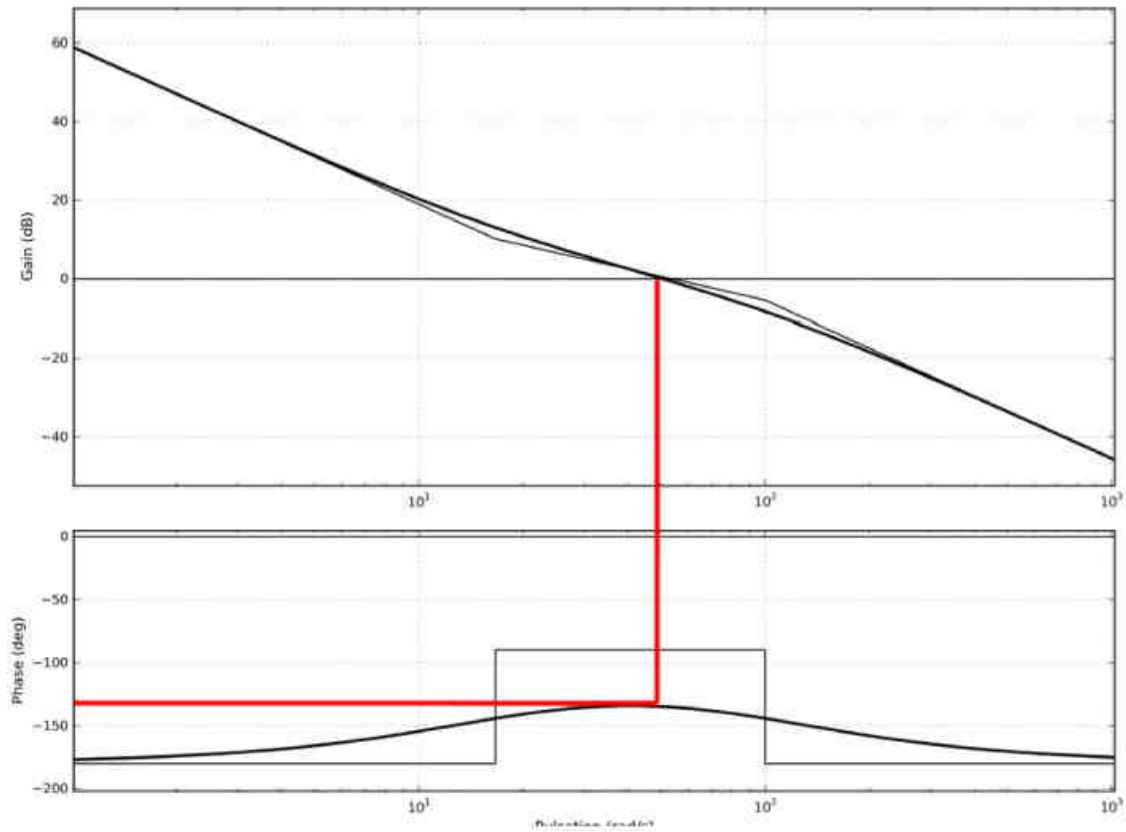
$$\text{D'où } T_i = \frac{1}{50} \tan(45^\circ + \text{Arctan}(0,5)) \quad \text{A.N. } T_i = 0,06 \text{ s}$$

Q26 On cherche à imposer $20 \log|FTBO(j\omega_c)| = 0$ pour $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$

$$\text{Soit : } \frac{A \cdot K_i}{T_i} \frac{|1 + T_i \cdot j \omega_c|}{\omega_c^2 \cdot |B \cdot j \omega_c + 1|} = 1 \text{ d'où : } K_i = \frac{T_i \cdot \omega_c^2 \cdot \sqrt{B^2 \cdot \omega_c^2 + 1}}{A \cdot \sqrt{T_i^2 \cdot \omega_c^2 + 1}} \quad \text{A.N. } K_i = 0,0079$$

Q27 On relève sur le tracé de Bode une marge de gain infinie et une marge de phase de 45° environ, ce qui est conforme au cahier des charges. On a bien également $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$. Sur la réponse temporelle on relève : $t_{r5\%} = 0,11 \text{ s}$, ce qui est conforme au cahier des charges. Cependant, on remarque un fort dépassement pour la réponse temporelle en déplacement, ce qui paraît incompatible avec l'utilisation du système, même si le cahier des charges ne stipule rien à ce sujet.

Diagramme de Bode de la FTBO :

Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$ 