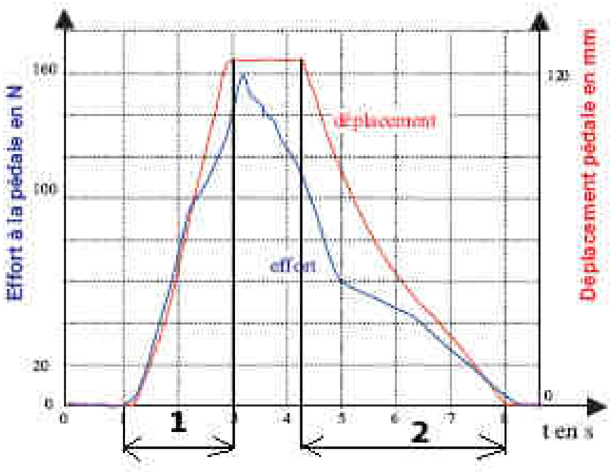
Concours MP Centrale-Supélec 2006

**Q.1)** Identifier les phases de débrayage et d'embrayage.




La phase de débrayage correspond à la zone 1 : $\boxed{1 < t < 3s}$

La phase d'embrayage correspond à la zone 2 : $\boxed{4{,}3 < t < 8s}$

**Q.2)** Comportement de l'actionneur électrique du restituteur d'effort dans les phases débrayage et embrayage.

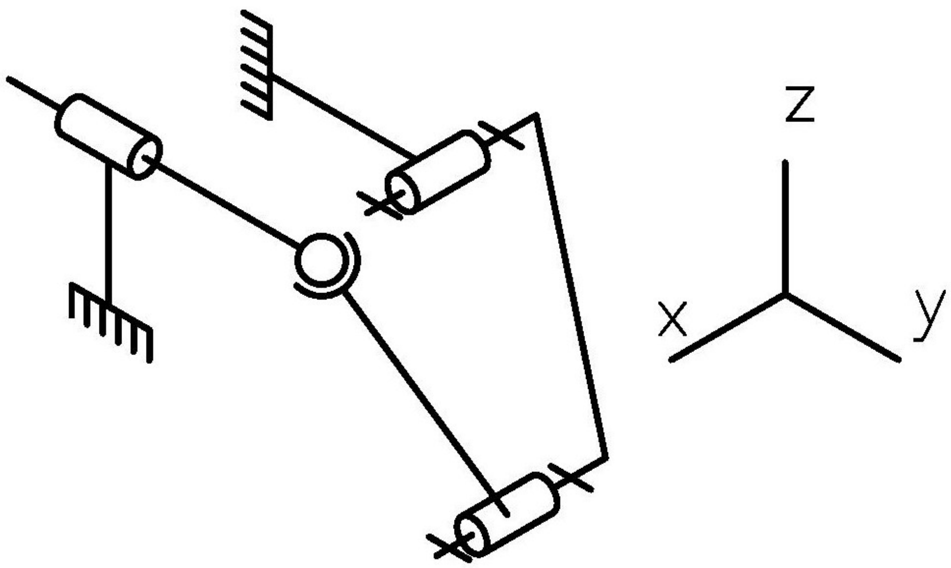
Dans la phase de débrayage : $F > 0, V > 0$ donc $P_{actionneur} < 0$, l'actionneur se comporte comme un frein.

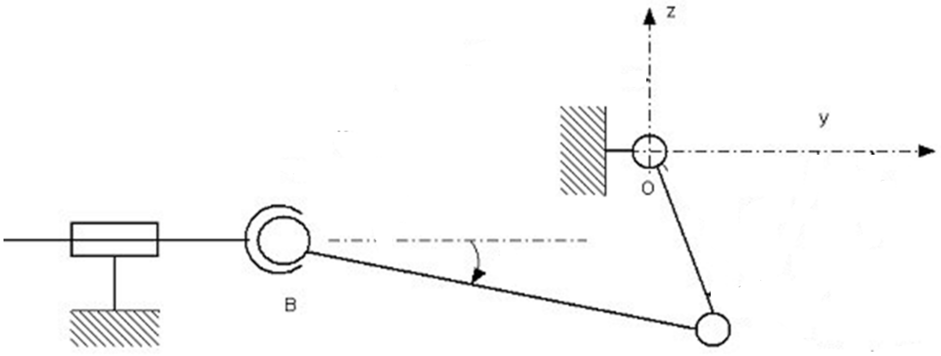
Dans la phase d'embrayage : $F > 0, V < 0$ donc $P_{actionneur} > 0$, l'actionneur se comporte comme un moteur.

**Q.3) Caractéristiques des liaisons**

| Solides | Nom de la liaison | caractéristiques | Nombre de paramètres | Nom des paramètres |
|---|---|---|---|---|
| Pédale/châssis | pivot | $(O,\vec{x})$ | 1 | $\theta$ |
| Piston/châssis | Pivot glissant | $(B,\vec{y})$ | 2 | $y,\alpha_y$ |
| Piston/tige | rotule | Centre B | 3 | $\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z$ |
| Tige/pédale | pivot | $(T,\vec{x})$ | 1 | $\beta$ |

**Q.4) Faire un schéma cinématique normalisé en 3d et en projection plane.**






**Q.5)** **et Q6.**

Les relations entre les différents paramètres sont obtenues par fermeture géométrique

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TO} = L.\vec{y}_1 - \mathrm{r_T}.\vec{y}_2$ avec $\overrightarrow{BO}.\vec{y}_2 = b$ et $\overrightarrow{BO}.\vec{y} = y_p$

On projette successivement sur $\vec{y}$ et sur $\vec{y}_2$ : $y_p = L.\cos\beta - r_T \cos\theta_1$ (1)

et $b = L.\cos(\theta_1 - \beta) - r_T$ (2)

Il faut éliminer $\beta$ dans la première équation. On l'obtient à partir de l'équation (2).

En notant $\delta = \theta_1 - \beta$ on a : $L.\cos\delta = L.\cos(\theta_1 - \beta) = b + r_T$

$\theta_1$ est négatif, mais sa valeur absolue est plus grande que celle de $\beta$.

$\delta$ est donc négatif et on a : $L.\sin\delta = -L.\sqrt{1-\cos^2\delta} = -\sqrt{L^2 - (b+r_T)^2}$

Donc $L.\cos\beta = L.\cos(\theta_1 - \delta) = L.\cos\theta_1 \cos\delta + L.\sin\theta_1 \sin\delta$

En utilisant l'expression de $L.\sin\delta$ ci-dessus, on remplace $L.\cos\beta$ dans l'équation (1).

D'où le résultat : $\boxed{y_p = b.\cos\theta_1 - \sqrt{L^2 - (b+r_T)^2}.\sin\theta_1}$

**Q.7)** **En l'absence des actions du pied et du restituteur, on souhaite que la pédale soit à l'équilibre à $\theta = 0$ . Déterminer l'action du ressort pour cette position.**

On isole la pédale.
Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action du poids (glisseur passant par G de résultante $-m.g.\vec{z}$ )
- Action du châssis sur la pédale : $\vec{M}^{O}_{chassis \to pedale}.\vec{x} = 0$ (liaison pivot)
- Action du ressort

Théorème du moment statique en projection suivant $\vec{x}$ appliqué à la pédale en O

$C_R + \left(\overrightarrow{OG} \wedge -m_p g\vec{z}\right) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ soit $\boxed{C_{R0} = r_G m_P g \sin\left(\theta_0 - \alpha_G\right)}$(1) couple exercé par le ressort en position initiale. Remarque : $C_R = C_{R0} - K_R \theta$

**Q.8)** Le mécanisme possède un plan de symétrie matériel, et les efforts extérieurs au mécanisme sont soit des glisseurs situés dans ce plan, soit des couples orthogonaux à ce plan. On adopte donc un modèle plan pour les efforts.

**<u>On isole le piston.</u>** Bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de l'huile sur le piston. Glisseur de résultante $F_H.\vec{y}$, passant par le centre de surface du piston.

- Action du châssis sur le piston : $\vec{R}_{chassis \to pedale}.\vec{z} = 0$ (liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{y})$)
- Action de la tige sur le piston : $\vec{M}^{B}_{tige \to piston} = \vec{0}$ liaison rotule en B

  $\vec{R}_{tige \to piston} = Y_{tige \to piston}.\vec{y} + Z_{tige \to piston}.\vec{z}$

Le théorème de la résultante, projeté sur $\vec{y}$ donne : $\boxed{Y_{tige \to piston} = -F_H}$

Remarque : le poids du piston, négligeable ou pas, n'intervient pas dans cette équation.

**<u>On isole la tige.</u>** Bilan des actions mécaniques extérieures :

- action du piston sur la tige (défini plus haut)
- action de la pédale sur la tige : $\vec{M}^{T}_{pedale \to tige} = \vec{0}$ (liaison pivot, et modèle plan)
- On néglige le poids de la tige.

Théorème du moment, écrit en T, projeté sur $\vec{x}$ : $\vec{M}^{T}_{piston \to tige}.\vec{x} + \vec{M}^{T}_{pedale \to tige}.\vec{x} = 0$

$\left[ \left( F_H.\vec{y} + Z_{piston \to tige}.\vec{z} \right) \wedge L.\vec{y}_1 \right].\vec{x} + 0 = 0$ ce qui s'écrit $L.\sin\beta.F_H - L.\cos\beta.Z_{piston \to tige} = 0$

D'où $\boxed{Z_{piston \to tige} = F_H.\tan\beta}$

Théorème de la résultante appliqué à la tige nous donne : $\boxed{\begin{matrix} Y_{tige \to pedale} = F_H \\ Z_{tige \to pedale} = \tan\beta.F_H \end{matrix}}$ (on avait par ailleurs : $\vec{M}^{T}_{tige \to pedale} = \vec{0}$ )

## Q.9) **Expression de $F_P$ en fonction de $F_H$** **<u>On isole la pédale.</u> Bilan des actions mécaniques extérieures :**

- Poids de la pédale — Action du ressort — Action du pied
- Action de la tige — du châssis sur la pédale : $\vec{M}^{O}_{chassis \to pedale}.\vec{x} = 0$ (liaison pivot)

On écrit le théorème du moment au point O, et on projette sur $\vec{x}$

Le ressort est réglé de façon à compenser le moment du poids lorsque θ = 0, c'est-à-dire lorsque $\theta_1 = \theta_0$

La composante de moment de l'action du châssis est nulle.

Dans ce cas, il reste : $\vec{M}^{O}_{tige \to pedale}.\vec{x} + \vec{M}^{O}_{pied \to pedale}.\vec{x} = 0$. Ce qui s'écrit :

$r_T.F_H.(-\sin\theta_1 + \tan\beta.\cos\theta_1) - R_P.F_P = 0$ D'où $\boxed{F_P = F_H.\frac{r_T}{R_P}(-\sin\theta_1 + \tan\beta.\cos\theta_1)}$

## Q.10)

Le piston se déplace vers la gauche. Les composantes tangentielles des efforts exercés sur le piston sont donc vers la droite. D'où $\boxed{Y_E \geq 0}$ et $\boxed{Y_F \geq 0}$. La matière du châssis étant au-dessus du piston en E, on a $\boxed{Z_E \leq 0}$ et $\boxed{Z_F \geq 0}$

## Q.11) <u>**On isole le piston.**</u>

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de l'huile sur le piston. Glisseur de résultante $F_H.\vec{y}$, passant par le centre de surface du piston. Le point B étant situé sur le support du glisseur, c'est également un glisseur passant par B.
- Action du châssis sur le piston en E et en F
- Action exercée par la tige sur le piston — Poids négligé

Le théorème de la résultante projeté sur $\vec{y}$ donne : $\boxed{F_H + Y_B + Y_E + Y_F = 0}$

## Q.12) Il y a glissement en E et en F. D'après Coulomb : $|Y_E| = \mu.|Z_E|$ et $|Y_F| = \mu.|Z_F|$

Etant donnés les signes établis à la question 10, on a : $Y_E = -\mu.Z_E$ et $Y_F = +\mu.Z_F$

On injecte dans l'équation obtenue à la question 11 : $\boxed{F_H + Y_B - \mu.Z_E + \mu.Z_F = 0}$

**Q.13)** Théorème de la résultante appliquée au piston, et projeté sur $\vec{z}$ : $\boxed{Z_E + Z_F + Z_B = 0}$

**Q.14)** Théorème du moment appliqué au piston, écrit en E, et projeté sur $\vec{x}$ :
$\vec{M}^{E}_{huile \to piston}.\vec{x} + \vec{M}^{E}_{(F)}.\vec{x} + \vec{M}^{E}_{(E)}.\vec{x} + \vec{M}^{E}_{tige \to piston}.\vec{x} = 0$. Quand on néglige le diamètre d du piston, les points E et F se retrouvent sur l'axe $(B, \vec{y})$. Le théorème s'écrit alors : $\boxed{L_1.Z_F = L_2.Z_B}$

**Q.15)** On avait établi à la question 8 : $\boxed{Z_B = \tan\beta.Y_B}$

Cette relation peut être établie en appliquant le théorème du moment à la tige, écrit en T, et projeté sur $\vec{x}$, à condition de négliger le poids de la tige et les éventuels frottements (moment de frottement) dans les deux liaisons de la tige. La résultante $\vec{R}_{piston \to tige}$ est alors colinéaire à BT (donc à $\vec{y}_2$), et donc inclinée d'un angle $\beta$ par rapport à l'horizontale.

**Q.16)** D'après Q14 : $Z_F = \frac{L_2}{L_1} Z_B$ D'après Q13 : $Z_E = -Z_F - Z_B$ On en déduit :

$Z_E = -\frac{L_2 + L_1}{L_1} Z_B$ D'après Q15 : $Z_B = \tan\beta.Y_B$ On en déduit : $Z_E = -\tan\beta.\frac{L_2 + L_1}{L_1} Y_B$ et

$Z_F = \tan\beta.\frac{L_2}{L_1} Y_B$. On remplace dans l'équation obtenue à la question 12, et on obtient l'expression de $Y_B$ en fonction du seul effort $F_H$, et $Z_B = \tan\beta.Y_B$

Le torseur des efforts du piston sur la tige est donc le glisseur passant par B, dont les coordonnées de résultante sont :

$$\boxed{-Y_B = \frac{L_1}{L_1 + \mu.\tan\beta.(2L_2 + L_1)} F_H} \quad \text{et} \quad \boxed{-Z_B = \frac{L_1.\tan\beta}{L_1 + \mu.\tan\beta.(2L_2 + L_1)} F_H}$$

**Q.17)** On a $F_H > 0$, $Y_E > 0$ et $Y_F > 0$, et $F_H + Y_E + Y_F + Y_B = 0$ $Y_B$ est donc nécessairement négatif. D'où $L_1 + \mu.\tan\beta.(2L_2 + L_1) > 0$. Or, pour que le contact ait effectivement lieu en E et en F, il faut que la direction BT de la tige soit comme sur la figure 5 (c'est-à-dire $\beta$ négatif). Pour que les hypothèses du calcul (somme des torseurs égale à zéro, et glissement du piston) puissent être vérifiées, il faut : $\boxed{0 \ \langle \ -\mu.\tan\beta \ \langle \ \frac{L_1}{2L_2 + L_1}}$ Dans le cas contraire, si la direction de la tige s'écarte trop de l'horizontale, il se produit un phénomène d'arc-boutement, et le glissement du piston est impossible.