

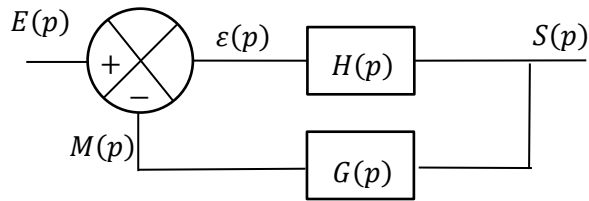
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Fiche résumé

Performances des systèmes asservis

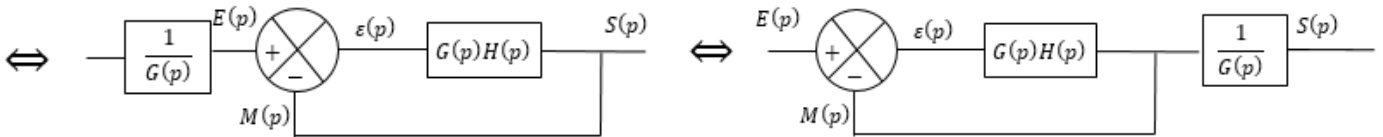
Fiche résumé

Programme - Compétences		
B226	Modéliser	Systèmes non linéaires · Modèle de non linéarité (hystérésis, saturation, seuil, retard) ; · Linéarisation du comportement des systèmes non linéaires continus.
B227	Modéliser	Modélisation des systèmes asservis · Stabilité : - définition, nature de l'instabilité (apériodique, oscillatoire), - contraintes technologiques engendrées, - interprétation dans le plan des pôles, - critère du revers, - marges de stabilité, - dépassement.
B228	Modéliser	· Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle ; · Performances et réglages ; · Précision d'un système asservi en régime permanent pour une entrée en échelon, une entrée en rampe, une entrée en accélération ; · Rapidité d'un système asservi : - temps de réponse, - bande passante.
B229	Modéliser	· Amélioration des performances d'un système asservi ; - critères graphiques de stabilité dans les plans de Black, Bode, marges de stabilité ; - influence et réglage d'une correction proportionnelle, intégrale, dérivée ; - prise en compte d'une perturbation constante, créneau ou sinusoïdale.

Systèmes asservis



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$



	1° ordre	2° ordre
Seul	$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2Z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Bouclé Retour unitaire	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} p}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2Z_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ $\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $Z_{BF} = \frac{Z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$

Performances des systèmes

Stabilité	Rapidité	Précision	Allure de la réponse
Pôles FTBF Revers FTBO $\Delta\varphi - \Delta G$	$tr_{5\%}$ t_m $\omega_{c_0} - BP_0$	ε_s ε_v Influence perturbations	2° ordre z & $D\%$

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Fiche résumé
------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------

Définition
Système stable
Entrée bornée \Rightarrow Sortie bornée
Asymptotiquement stable : converge

Stabilité

Condition fondamentale de stabilité
Système stable
 $Re(Pôles FTBF) < 0$

Algébrique	Critères de stabilité	Graphique
Parties réelles des pôles : FTBF		Revers : FTBO

Critère graphique du Revers

Bode	Nyquist	Black												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>Abscisse</th><th>Ordonnée</th></tr> <tr><td>ω</td><td>$G_{dB} \text{ \& } \varphi^0$</td></tr> </table>	Abscisse	Ordonnée	ω	$G_{dB} \text{ \& } \varphi^0$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>Abscisse</th><th>Ordonnée</th></tr> <tr><td>$Re(\underline{H})$</td><td>$Im(\underline{H})$</td></tr> </table>	Abscisse	Ordonnée	$Re(\underline{H})$	$Im(\underline{H})$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>Abscisse</th><th>Ordonnée</th></tr> <tr><td>φ^0</td><td>G_{dB}</td></tr> </table>	Abscisse	Ordonnée	φ^0	G_{dB}
Abscisse	Ordonnée													
ω	$G_{dB} \text{ \& } \varphi^0$													
Abscisse	Ordonnée													
$Re(\underline{H})$	$Im(\underline{H})$													
Abscisse	Ordonnée													
φ^0	G_{dB}													

Etude de la FTBO \longrightarrow Stabilité de la FTBF

Critère du Revers = Cas particulier du critère de Nyquist
Etude du lieu de la FTBO par rapport au point critique :
 $(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180^\circ)$ ou $(G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180^\circ)$

Condition d'application : FTBO stable mais en acceptant au plus 1 pôle nul

Critère de Nyquist simplifié
Un système en BF est asymptotiquement stable si le lieu de Nyquist complet de la BO ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire

Critère du Revers

Un système asservi est stable en BF si, en décrivant le lieu de transfert de la BO dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de

<ul style="list-style-type: none"> - Bode : à la pulsation <ul style="list-style-type: none"> o Et à $\omega_{c_0}/G_{dB} = 0, \varphi > -180^\circ$ o Et à $\omega/\varphi = -180^\circ, G_{dB} < 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Nyquist : le point critique est à gauche - Black : le point critique est à droite <p style="text-align: right; font-size: small;"><i>Cas particuliers dans Bode : se ramener à Black</i></p>
---	---

<p>Marge de gain</p> <p>$\Delta G = -20 \log H(j\omega_{-180^\circ})$ $\arg H(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$</p> <p>Marge de gain minimale : 10 à 15 dB</p>	<p>Marge de phase</p> <p>$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">1° ordre</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">Second ordre</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;">Existence de $\omega_{c_0} \Leftrightarrow K > 1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$</td> <td style="text-align: center;">ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$</td> </tr> </table>	1° ordre	Second ordre	Existence de $\omega_{c_0} \Leftrightarrow K > 1$		ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$
1° ordre	Second ordre						
Existence de $\omega_{c_0} \Leftrightarrow K > 1$							
ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	ω_{c_0} $= \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$						

Conclusions
 $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{c_0} \Rightarrow \searrow \varphi_{\omega_{c_0}} \Rightarrow \searrow \Delta\varphi \Rightarrow \searrow$ Stabilité

Remarque
Vérifier la stabilité d'un système avant d'utiliser le théorème de la valeur finale

Stabilité 1° et 2° ordre en BF

1° ou 2° ordre en BF : stable en BF grâce aux pôles
1° ou 2° ordre en BO : Stable en BF grâce au Revers

Page 3 sur 7

FTBO

FTBO

Précision

Systèmes

Ecart des systèmes <i>Au comparateur</i>		$e(t)$	$E(p)$	Ecart au comparateur
Retour non unitaire	Retour unitaire	$au(t)$	$\frac{a}{p}$	ε_s ou « Ecart statique »
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$	$atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	ε_v ou « Ecart de traînage »

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^\beta} \quad ; \quad \beta > 0$$

$$= K_{BO} \frac{FTBO(p)}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

$$\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha + m > n$$

α : classe de la FTBO - Nombre d'intégrations

$\alpha + m$: ordre de la FTBO - Degré du dénominateur

Expression générale de l'écart statique

Soit un système quelconque
Fonction de transfert H
Gain statique K

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}$$

Système stable $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) = K$	$\Rightarrow \varepsilon_s = E_0(1 - K)$
---	--

Ecart A (au comparateur) des systèmes bouclés (entrée e / sortie s) et classe de la FTBO

Nature de l'entrée		Classe du système				
$e(t)$ Entrée système	$E(p)$	β	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

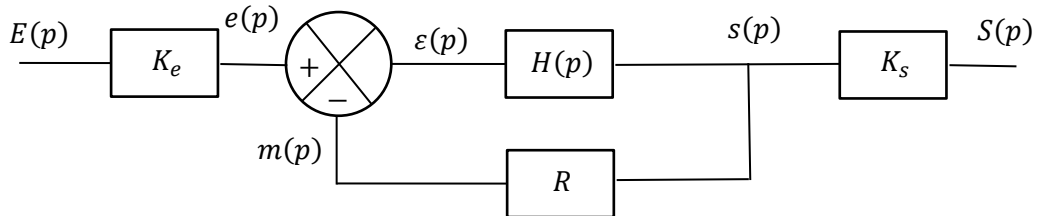
Conclusions

\nearrow Classe \Rightarrow \nearrow Précision
 Si ε fini, $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow$ Précision
 Si Classe 0, $\varepsilon_v = \infty$

Remarques

Une intégration
 \Rightarrow Ecart statique nul et Ecart de traînage fini

Erreur d'un système général



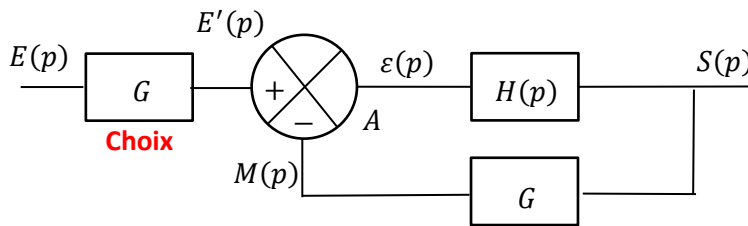
Si système stable

$$\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} (E(t) - S(t)) \quad ; \quad A = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

$$\Sigma \propto A \text{ si } R = K_e K_s$$

On dit aussi que l'écart est nul si entrée = sortie

Cas généralement traité : Système de classe supérieure ou égale à 1



$\Sigma \propto A$
 Attention : entrée de boucle pour le calcul de A multipliée par G

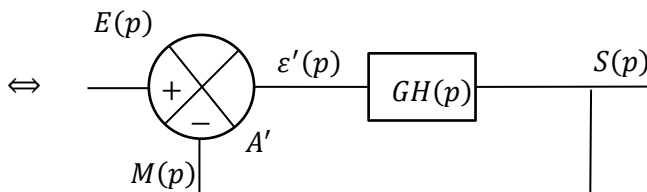


Tableau de A'		
$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

Expression de K_{BF} - FTBO de classe α

Retour unitaire $K_{CD} = K_{BO}$		Retour non unitaire G $K_{BO} = K_{CD}G$	
$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0 !$	$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{G}$

1 - Classe 1 et retour unitaire : $K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0$
2 - Connaissant K_{BF} , on retrouve $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF})$
3 - Dans le cas du système général précédent, le gain statique du système complet s'écrit $K_{Comp} = K_E K_S K_{BF}$ et $\Sigma = E(1 - K_{Comp})$

Choix du gain G' - Systèmes à retour G

$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$G' = \frac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

$G = G' : \Sigma \propto A$

Influence des perturbations

$\delta(p)$	$\varepsilon_s^\delta = 0$ si $F_1(p)$ est de classe
Impulsion	≥ 0
Echelon	≥ 1
Rampe	≥ 2

Conclusions

La classe de la partie en amont d'une perturbation influence l'écart qu'elle engendre
Une intégration en amont d'une perturbation de type impulsion ou échelon annule son effet
Si $\varepsilon_s^\delta \neq 0 : \nearrow K \text{ de } F1 \Rightarrow \searrow \varepsilon_s^\delta$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Fiche résumé

Rapidité

$$S_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \quad \forall t > tr_{X\%}, \left(1 - \frac{X}{100}\right) S_\infty < s(t) < \left(1 + \frac{X}{100}\right) S_\infty \quad t_m = \min_i t_i / s(t_i) = S_\infty$$

$$\omega_{c_0} = \omega / |H_{j\omega}| = 1; G_{dB} = 0 \quad \omega_c = \omega / G_{dB} = G_0 - 3$$

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]; |H_{j\omega}| > 1; G_{dB} > 0 \quad BP = [0; \omega_c]$$

	1° ordre	2° ordre
Seul	$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_0 t_m \approx 3$ $tr_{5\%} \omega_0 = k(z)$ $k(0,7) = 3 - \text{Plus rapide}$ $k(1) = 5 - \text{Plus rapide sans dépassement}$ $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$
	$\nearrow \omega_0 \Leftrightarrow \nearrow \text{Rapidité}$	
Bouclé Retour unitaire	$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{1}{\omega_{0BF}} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$	$\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$
	$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0BF} \Rightarrow \nearrow t_m \Leftrightarrow \nearrow \text{Rapidité}$ $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \left(\nearrow \omega_{c_0BO} \Leftrightarrow \nearrow BP_{0BO} \right)$ $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{0BF} \Rightarrow \nearrow \left(\omega_{c_0BF} \Leftrightarrow BP_{0BF} \right)$ Attention : $\nearrow K_{BO} \Rightarrow tr_{5\%}$ tant que $z_{BF} \geq 0,7$	

Allure de la réponse

Système du second ordre	
Si $z < 1$ $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$ $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$	Bouclage d'un 2° ordre $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}} < z_{BO}$ \Rightarrow Diminution d'amortissement \Rightarrow Apparition ou augmentation du dépassement