Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement

Résumé

Programme - Compétences		
C12	RESOUDRE	Choix des isolements Choix des méthodes de résolution Actions mécaniques dans les liaisons Equations différentielles du mouvement
B212	MODELISER	Caractéristiques d'inertie d'un solide indéformable (masse, opérateur d'inertie) Lien entre forme de la matrice d'inertie et géométrie du solide associé Signification des termes de la matrice d'inertie
B223	MODELISER	Modélisation dynamique des solides Torseur cinétique et dynamique et énergie cinétique d'un solide ou système de solides Puissances des actions intérieures et extérieures par rapport à un référentiel galiléen
B224	MODELISER	Principe fondamental de la dynamique et théorème de l'énergie cinétique pour la détermination d'actions de liaisons et d'équations différentielles du mouvement

Caractéristiques des solides

Masse

$$M(E) = \int_E \rho(M)dV$$

Centre de gravité ou d'inertie d'un solide

Méthode Intégrale

$$\int_E \overrightarrow{GM}dm = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\,dm$		
$X_G = \frac{1}{m}\int_E xdm$	$Y_G = \frac{1}{m}\int_E ydm$	$Z_G = \frac{1}{m}\int_E zdm$

Si $\rho = cst$, remplacer m par V et dm par dV

Méthode sous-volumes

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

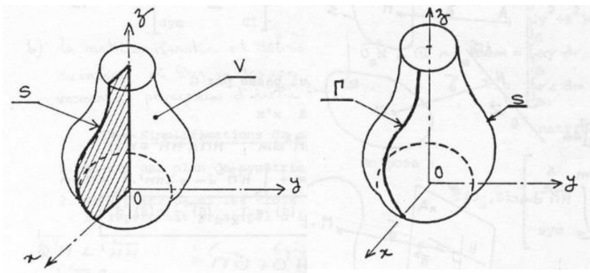
Masses négatives pour formes creuses

Centre d'inertie des courbes et des surfaces planes

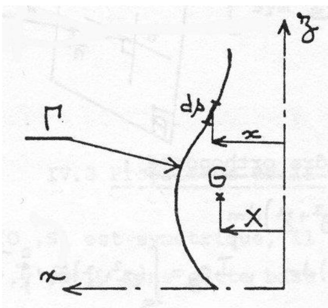
Théorème de GULDIN

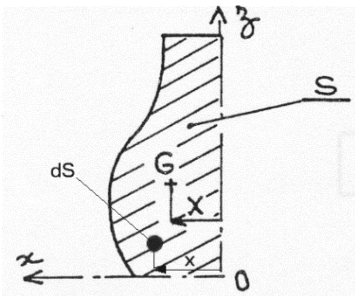
Soit S une surface de révolution d'axe $(O,\vec{z})$

Soit Γ une génératrice de S ne coupant pas l'axe $(O,\vec{z})$



$$X = \frac{S}{2\pi L}$$





$$X = \frac{V}{2\pi S}$$

Moments d'inertie d'un solide

Moment d'inertie par rapport au point O

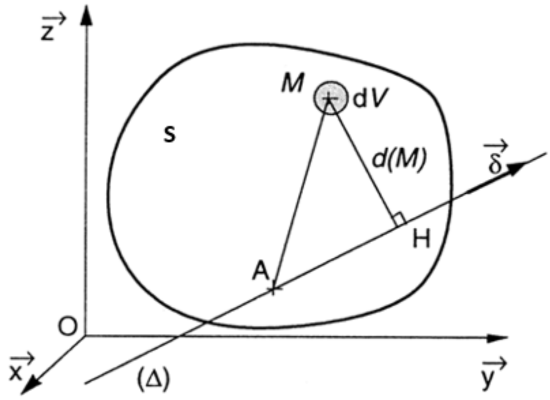
$$I_O = \int_S \overrightarrow{OM}^2 dm = \int_S (x^2+y^2+z^2)dm$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ

$$I_\Delta = \int_S d(M)^2 dm$$

Théorème de Huygens :

$$I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S)d^2$$



Moments d'inertie par rapport aux axes du repère

$I_{O_x} = \int_S (y^2+z^2)dm$	$I_{O_y} = \int_S (x^2+z^2)dm$	$I_{O_z} = \int_S (x^2+y^2)dm$

Opérateur d'inertie d'un solide

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) dm$$

Soit $\mathfrak{B}_S$ une base $(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$ liée au solide S étudié et A l'origine du repère

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2+z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(A,S) = I(G,S) + M \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

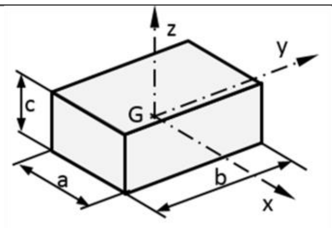
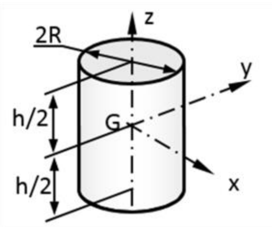
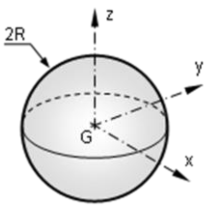
$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; \overrightarrow{O'G} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; A = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ; A' = \begin{bmatrix} b'^2+c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & a'^2+c'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2+b'^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$I(O',S) = I(O,S) + M(A'-A)$ -Nécessité de connaître G pour avoir A et A'

Symétries et matrice d'inertie – $\boldsymbol{O}$ sur l'élément de symétrie

$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ Plan de symétrie	Deux plans de symétrie parmi $(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{x_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{y_S}})(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{x_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})\ (\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{y_S}},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})$	Axe de révolution $(\boldsymbol{O},\overrightarrow{\boldsymbol{z_S}})$ *Angle de révolution* $\theta = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ $A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$ $\forall \mathfrak{B}(\_,\_,\overrightarrow{z_S})$
Solide sphérique de centre O	$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S}) : z = 0$	
$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ $A = \frac{2}{3} I_O$ $\forall \mathfrak{B}_S$	$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$	

Matrices d'inertie usuelles à savoir retrouver

	$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
	$I(G,S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
	$I(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
Masse ponctuelle S_i en M_i $\overrightarrow{OM_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$	$I(M_i,S_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ $I(O,S_i) = m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$

Matrice d'inertie d'un ensemble de solides en un même point

$$I(A,S)=\sum_{i=1}^{N} I(A,S_i)=\sum_{i=1}^{N}\left[I(G_i,S_i)+m_i\begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\right]$$

Masses négatives pour formes creuses

Définition

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$(O,\overrightarrow{x_s})$ est axe principal d'inertie de ce solide

Opérations

Moment d'inertie par rapport à l'axe (A,Δ)

$$I_\Delta(S)=\vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

$\vec{\delta}$ et $I(A,S)$ exprimés dans la même base

Changement de base

$$I(O,S)_{B_2}=P^{-1}I(O,S)_{B_1}P$$

$P^{-1}=P^T$; P matrice de passage de B_1 à B_2

Moment d'inertie d'une masse ponctuelle m_i en M autour de l'axe $\Delta=(O,\vec{z})$

$$d=\sqrt{{x_i}^2+{y_i}^2}\ (distance\ de\ M\ à\ l'axe)$$

$$I_\Delta=m_i\,d^2$$

Conditions d'équilibrage dynamique

Le solide S de centre de gravité G est équilibré en rotation autour de $(O,\overrightarrow{x_s})$ si

$G\in(O,x_s)$

$(O,\overrightarrow{x_s})$ est axe principal d'inertie de S

Cinétique - Dynamique

Cinétique

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(S/0) = \int_E \vec{V}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c} = M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

Dynamique

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(S/0) = \int_E \vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\delta}(A,E/R_0) = \vec{\delta}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d} = M\vec{\Gamma}(G,S/R_0) \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

Principe Fondamental de la Dynamique
PFD

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}$$

Théorème de la résultante dynamique : $M\vec{\Gamma}(G,E/R_g) = \vec{R}_{\bar{E}\rightarrow E}$

Théorème du moment dynamique : $\vec{\delta}(A,E/R_g) = \overrightarrow{M_A}_{\bar{E}\rightarrow E}$

6 équations par isolement

- Actions de liaisons
- Equations différentielles du mouvement liant actions entrée/sortie

Cas particuliers d'un solide indéformable en …

translation dans une direction fixe
$TRD: F = ma$

rotation autour d'un axe fixe d'inertie J autour de cet axe
$TMD: J\ddot{\theta} = C$

Remarques

Une vitesse imposée correspond à une action de liaison présente

Théorème des actions réciproques
$\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}$

Masses et inerties négligées
$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{0\}$

Simplification du PFD en projection sur un axe en moment en G ou A fixe

$$(uv)' = uv' + u'v \quad ; \quad u = \vec{\sigma}(G,S/R_0) \quad ; \quad v = \vec{u}$$

$$\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\sigma}(G,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}$$

Energie - Puissance

Energie cinétique

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(G,S/R_0)$$

$$T(S/R_0)\frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}\ \forall P$$

$$T(E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} T(S_i/R_0)$$

Mouvements plans	
Translation de vitesse V	Rotation Ω axe $(A,\vec{z})$ fixe ; $AG = R$
$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MV^2$	$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MR^2\Omega^2 + \frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2$ $T(S/R_0) = \frac{1}{2}\Omega^2 I_{zz}^A$

Puissance

Puissance des actions extérieures

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}\{\mathcal{V}(S/R_0)\}\ \forall P$$

$$P(\bar{S} \to E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{S} \to S_i/R_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R})} \end{Bmatrix}_A . \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{R}.\vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{M_A(\vec{R})}.\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Puissance d'inter efforts

$$P(S_i,S_j) = P(S_j,S_i) = \left\{\mathcal{T}_{S_i\to S_j}\right\}\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\}$$

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} P(S_i,S_j)$$

$$P(S_i,S_j) = P(S_i \to S_j/R_0) + P(S_j \to S_i/R_0)$$

Liaisons parfaites : $P(S_i \to S_j/R_0) = -P(S_j \to S_i/R_0) \neq 0$

Théorème de l'Energie Cinétique
TEC

Enoncé

$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

On isole US_i

R_g : Référentiel Galiléen

$P_{ext} = P(\overline{US_\imath} \to US_i/R_g)$

$P_{int} = P_i(US_i)$

Utilité

Obtention d'une équation différentielle du mouvement liant actions entrée/sortie et accélérations

Hypothèses et conséquences

Liaison parfaite
Pas d'action spécifique
entre i et j (ex : magnétisme)

$$\Rightarrow \begin{cases} Int: P(S_i,S_j) = 0 \\ Ext: P_{ext}(L_{pft} \to S/R_0) = 0 \end{cases}$$

Masses et inerties négligées
$T(S/R_0) = 0$

Régime stationnaire $\Rightarrow \frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = 0$

Applications classiques

- Résolution de l'équation du mouvement (vitesse, position) en régime instationnaire en fonction des actions extérieures
- Détermination de la relation entrée/sortie en effort en régime stationnaire

Calcul d'inertie ou de masse équivalente : Exprimer T

Inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée	Inertie équivalente ramenée à l'arbre de sortie	Masse équivalente
$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{e} \omega_e{}^2$	$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{s} \omega_s{}^2$	$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} M_{eq} V^2$

Puissance d'entrée = Puissance de sortie ?

Considérons un système isolé auquel sont appliqués des efforts extérieurs en entrée et en sortie

$$Régime\ stationnaire:\ \frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = 0$$

$$Liaisons\ parfaites:\ P_{int} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{entrée} = P_{sortie}$$

Notion de rendement – N'a de sens qu'en régime stationnaire !

$$\eta = \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} \qquad \eta = \frac{P_n}{P_1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \dots \frac{P_2}{P_1} = \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i \qquad P_{int} = -(1-\eta) P_{entrée}$$

Relation en couples/efforts entrée sortie

Relation cinématique e/s : imposée par le mécanisme supposé indéformable -> ne peut évoluer
Relation F/C d'e/s : peut évoluer en fonction du rendement et des accélérations.
La relation issue du TEC doit conduire à l'obtention de la relation entre efforts/couples connaissant la relation cinématique entrée/sortie et non l'inverse, sauf cas particulier : régime permanent & rendement égal à 1.
Une manière simple d'obtenir la relation statique e/s d'un mécanisme est de déterminer la relation cinématique e/s et d'utiliser le TEC en liaisons parfaites et régime stationnaire.
Rq : Une résolution cinématique est plus simple qu'une résolution statique !

Choix du théorème

Objectifs des deux théorèmes

Obtenir des actions de liaisons
Obtenir des équations différentielles du mouvement liées aux actions entrée/sortie

PFD

Obtention de 6 équations par isolement
Equations donnant les actions de liaison
Equations différentielles du mouvement sur la/les équation(s) de mobilité
Application lourde s'il y a beaucoup de solides
Difficultés d'applications s'il y a des pertes
Penser à ne déterminer que l'équation utile au problème (ex : Moment suivant $\vec{z}$)

TEC

Obtention d'une (ou plusieurs) équation différentielle(s) du mouvement issue(s) du PFD correspondant à la (aux) mobilité(s) et reliant actions d'entrée/sortie
Ne donne pas les actions de liaisons (sauf actions entre pièces mobiles correspondant à la transmission de puissance selon isolement)
Très adapté aux problèmes à 1 DDL
Fonctionne très bien qu'il y ait peu ou beaucoup de solides