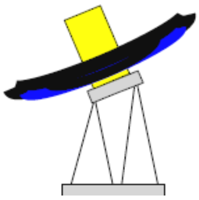
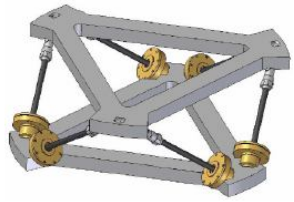
Corrigé Bode : interférométrie (ENS PSI 2009)

On s'intéresse au réglage du correcteur de l'asservissement en position d'un axe de plateforme servant à positionner un télescope.





Les performances attendues sont les suivantes :

- ✓ Précision : Ecart nul pour une consigne échelon et pour une perturbation constante.
- ✓ Rapidité : Pulsation de coupure de la FTBO : ω_C = 31,4 rad/s.
- ✓ Stabilité : Marge de phase M_φ = 45° et Marge de gain M_G > 20 dB.

Q1 $H_0(p) = \frac{2.k}{M.p^2} * \frac{1}{1+g/p} = \frac{2.k}{M.p.(p+g)}$

Q2 Il y a un intégrateur dans la boucle, le système est précis pour une entrée échelon.
La pulsation de coupure à 0dB de la FTBO vaut : $\omega_c = 19 rad.s^{-1} \neq 31.4 rad.s^{-1}$.

La marge de phase vaut environ $M_\varphi = 67° \neq 45°$. La marge de phase est trop grande.

La marge de gain n'est pas mesurable sur le graphique car la phase n'atteint pas -180°.
Les critères de rapidité et de stabilité (pour la marge de phase) ne sont pas respectés.

Q3 Par lecture du graphique, on a $\arg(H_0(j\omega)) = -135°$ quand $\omega = 50 rad.s^{-1}$.
Le gain vaut alors $20\log|H_0(j\omega)| = -11dB$.

Il faut donc remonter la courbe de gain de $20\log C_0 = 11dB$ $\boxed{C_0 = 10^{\frac{11}{20}} = 3.55}$

Q4 Par définition de la marge de phase, on a $\begin{cases} 20\log|H_0(j\omega_0)| = 0dB \\ \arg(H_0(j\omega_0)) = -135° \end{cases}$.

Ainsi $\omega_0 = 50 rad.s^{-1}$. La pulsation de coupure à 0dB n'est pas correcte et n'est pas réglable avec ce type de correcteur. Il faut en utiliser un autre.

Q5 Le correcteur intégral translate la courbe de phase de -90°. A la vue de la courbe de phase de la FTBO non corrigée, il est impossible d'obtenir une phase de -135°, et par conséquent une marge de phase de 45°, avec ce correcteur.

Q6 La précision sera toujours bonne car la boucle possède toujours un intégrateur (et même 2 maintenant !). Le système sera précis pour une entrée de type rampe.

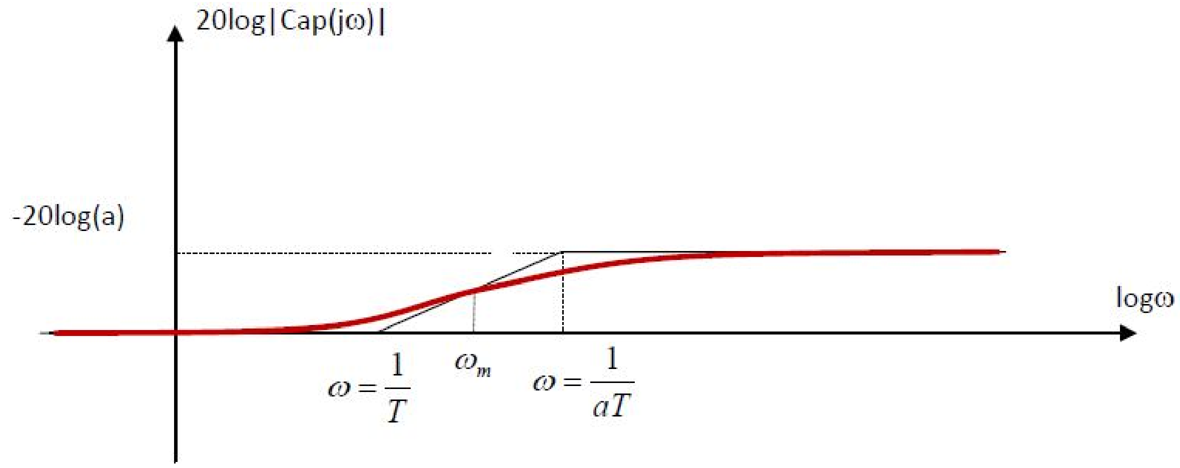
Le terme en 1/p du correcteur translate la courbe de phase de -90°.

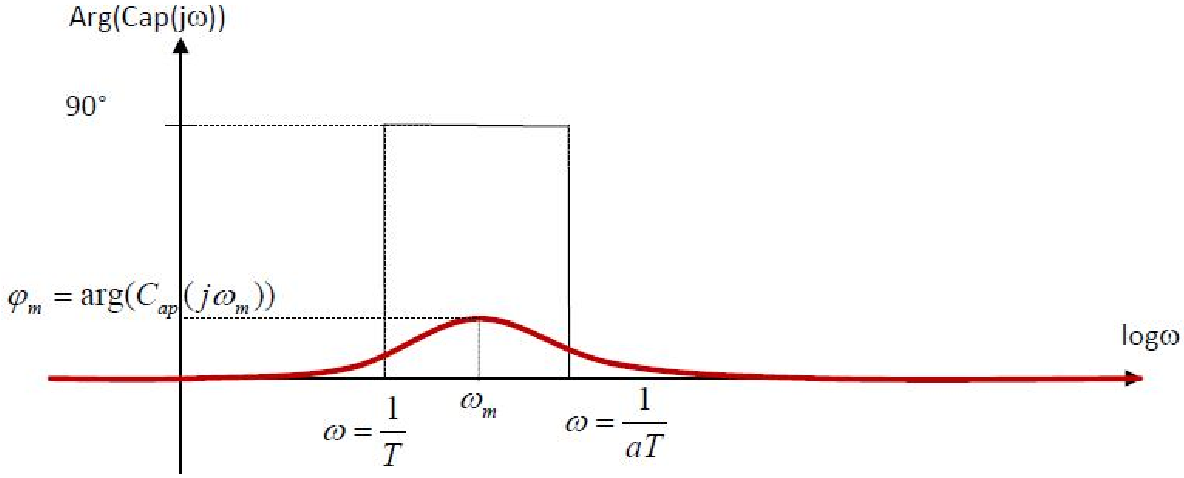
Cependant, le terme à avance de phase rajoute en parallèle de la phase pour une bande de fréquence définie. Il est donc possible de régler les valeurs de a et T pour avoir un déphasage qui remonte au dessus de -135°.

Ensuite il suffira de régler le gain K pour obtenir la pulsation de coupure à 0dB voulue.

Ce correcteur permet donc bien de satisfaire aux conditions du cahier des charges.

Q7





<u>Calcul de ω_m</u> : $\arg(H(j\omega)) = -90 + \arctan(T\omega) - \arctan(aT\omega) = \varphi(\omega)$

$$\varphi'(\omega_m) = \frac{T}{1+(T\omega_m)^2} - \frac{aT}{1+(aT\omega_m)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\left(1+(T\omega_m)^2\right) = 1+(aT\omega_m)^2$$

$$a-1 = \left((aT)^2 - aT^2\right)\omega_m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_m} = T\sqrt{\frac{a^2-a}{a-1}} \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \frac{1}{T.\sqrt{a}}$$

<u>Calcul de $\sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)$:</u>

$$\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right) = \arctan(T\omega_m) - \arctan(aT\omega_m) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \arctan\left(\sqrt{a}\right)$$

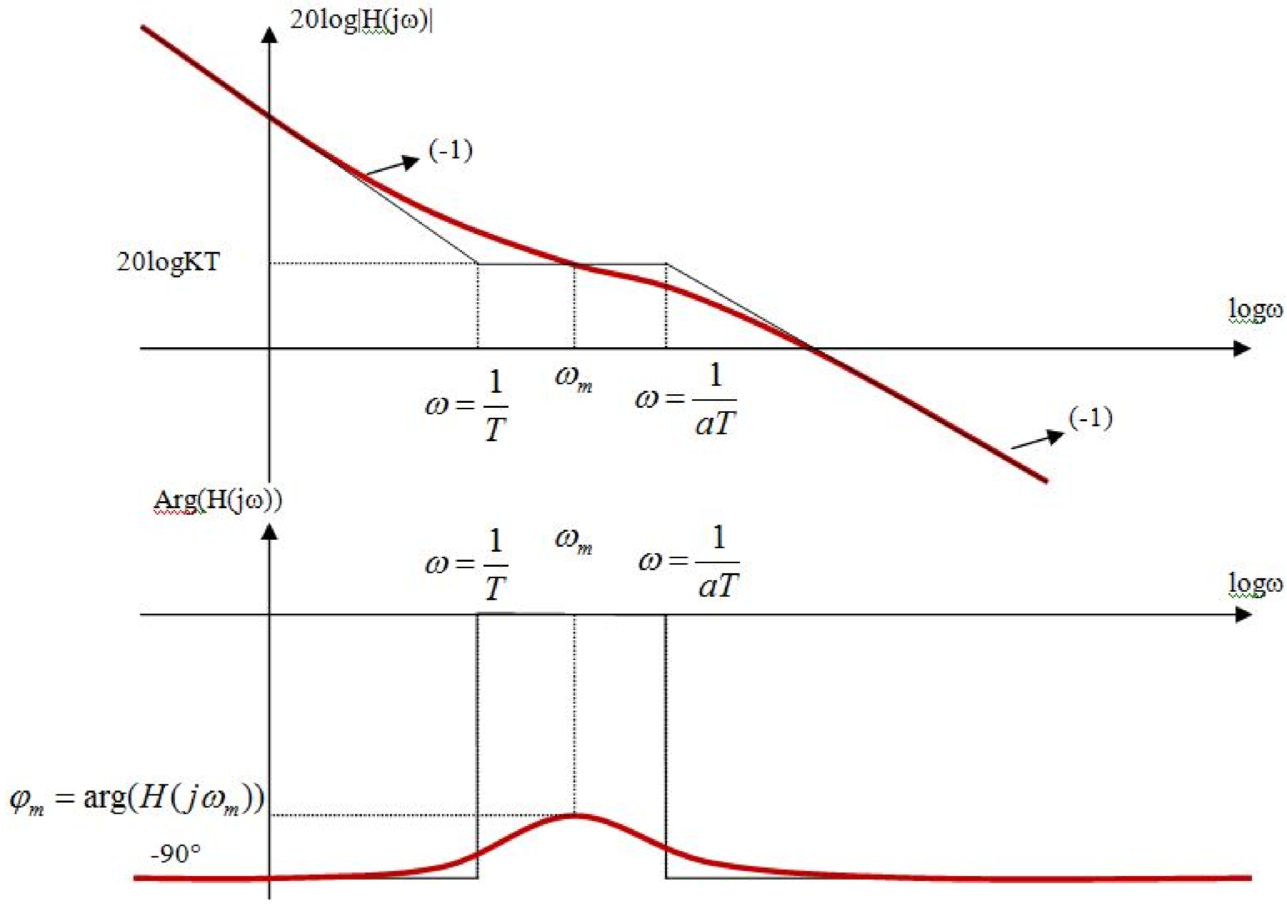
Soit $b = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ et $c = \arctan\left(\sqrt{a}\right)$

$$\tan\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right) = \tan(b-c) = \frac{\tan(b)-\tan(c)}{1+\tan b \tan c}$$

$$\tan\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right) = \frac{1/\sqrt{a} - \sqrt{a}}{2} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}}$$

Comme $\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right) \in [0°;90°]$, $:\sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(1-\sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)^2\right)$

$$\sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)=\sqrt{\frac{\left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}}\right)^2}{1+\left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{(1-a)^2}{4a+(1-a)^2}} \qquad \sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)=\frac{1-a}{1+a}$$



Q8 On règle $\omega_m=\omega_C=10\pi=31{,}4\ \ rad.s^{-1}$ ⇨ $\omega_m=\frac{1}{T.\sqrt{a}}$

Pour $\omega_m=\omega_C=10\pi=31{,}4\ \ rad.s^{-1}$, on veut $\varphi=-135°$.

$$\varphi=-121°-90°+\arcsin\left(\frac{1-a}{1+a}\right)=-135° \quad ⇨ \quad a=0.015$$

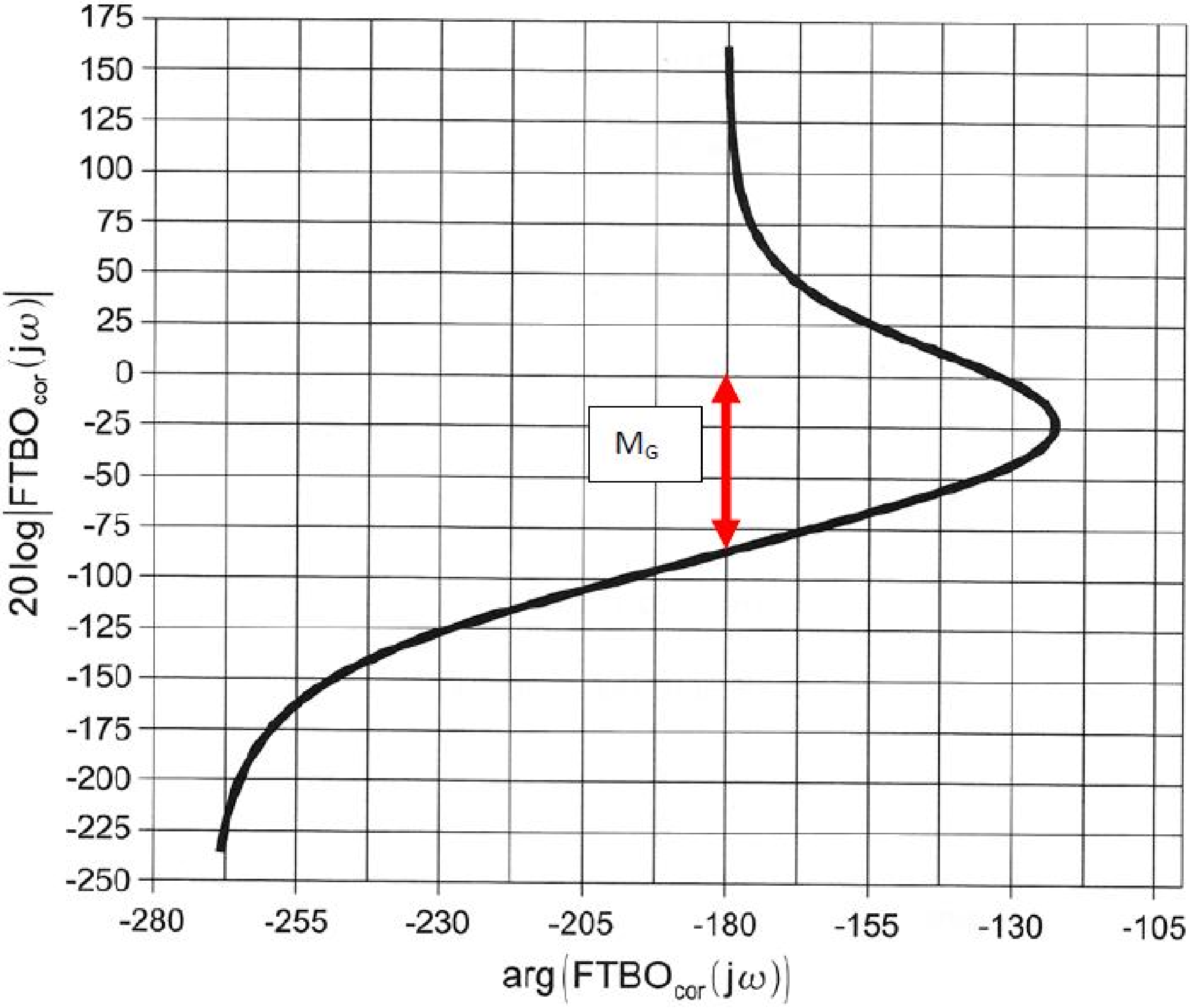
On reprends $\omega_m=\frac{1}{T.\sqrt{a}}$ ⇨ $T=0.259s$

Q9 Pour $\omega_m=\omega_C=10\pi=31{,}4\ \ rad.s^{-1}$, on veut $Gdb=0$.

$$Gdb=-5+20\log(K.T)=0 \quad ⇨ \quad K.T=10^{\frac{5}{20}}=1.78s \quad ⇨ \quad K=6{,}9$$

Nota : L'intégrateur présent dans le correcteur n'est pas nécessaire car le système était déjà précis pour une entrée de type échelon.

La lecture de diagramme de Black donne une marge de gain $M_G \approx 80dB > 20dB$



La marge de gain est assez grande par rapport à celle attendue, néanmoins elle répond aux attentes du cahier des charges.

Ce correcteur est adapté pour répondre aux exigences du cahier des charges.