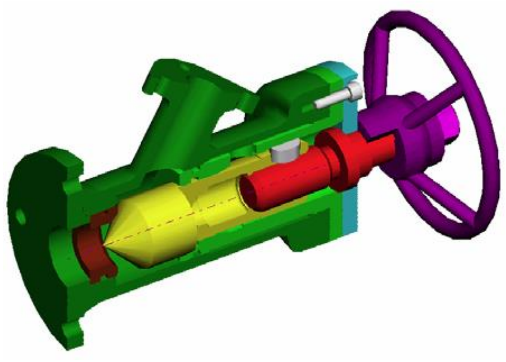
A.IV. Rappels – Méthodes de résolution cinématique et statique

Le programme de 1° année a permis de mettre en place les méthodes de résolutions cinématique et statique des mécanismes. Ce paragraphe a pour seul de but de rappeler succinctement ces méthodes en vue de leur application.

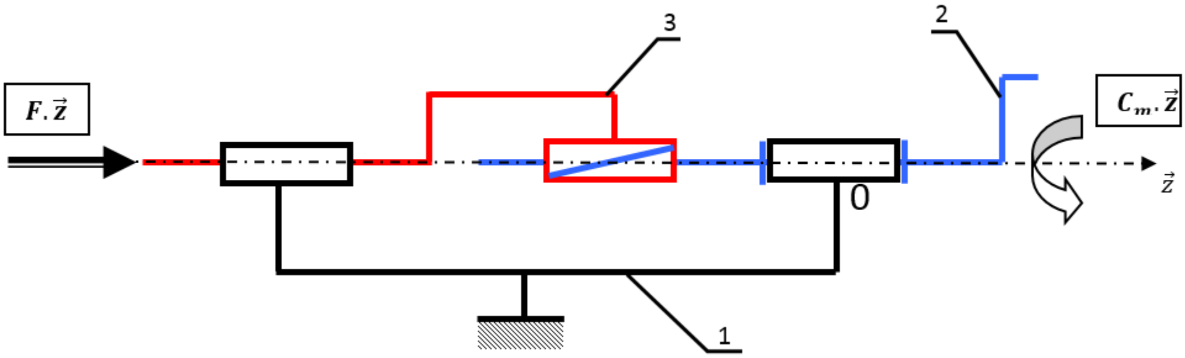
Partons du plan ou d'une vue 3D d'un mécanisme : Vanne de robinet



Le volant 2 entraîne la vis de commande (liaison complète) en rotation par rapport au corps 1(liaison pivot), la vis de commande entraîne par l'intermédiaire d'une liaison hélicoïdale le pointeau 3, le pointeau est en liaison glissière par rapport au corps.

A.IV.1 Mise en place du schéma cinématique

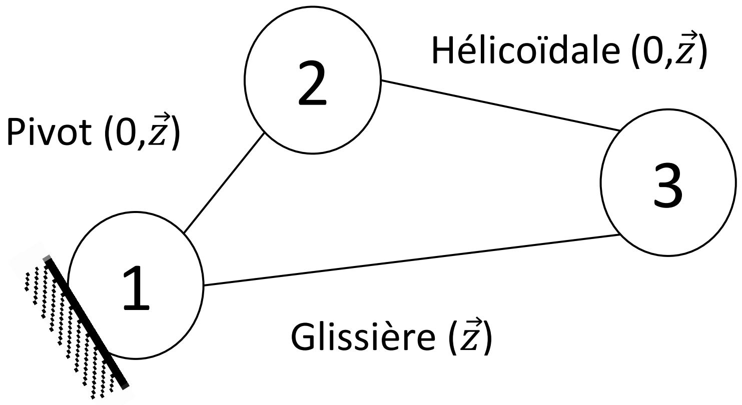
A partir de l'analyse de la géométrie des pièces, des classes d'équivalence et des surfaces en contact entre celles-ci, on met en place la modélisation cinématique minimale du système :



$$\mathfrak{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Rappel : schéma d'architecture et schéma cinématique minimal sont des schémas cinématiques. Le schéma d'architecture représente l'ensemble des liaisons en détail (pivot en réalité réalisée par 2 liaisons en parallèle Sphère cylindre + Appui plan… Le schéma cinématique minimal est le plus simple des schémas.

A.IV.2 Mise en place du graphe des liaisons



A.IV.3 Torseurs cinématiques et statiques des liaisons usuelles

Il est nécessaire de connaître les torseurs cinématiques et statiques des liaisons usuelles. Se référer aux deux documents remis pendant le cours.

A.IV.4 Résolution cinématique

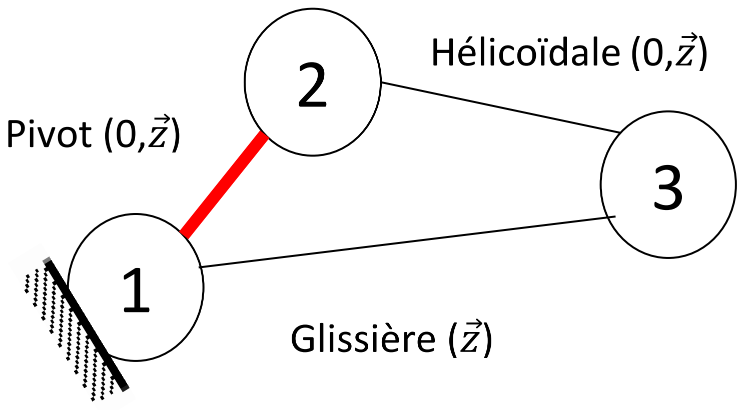
L'objectif de l'étude cinématique est de déterminer la vitesse de rotation du volant pour obtenir une vitesse donnée du coulisseau.

A.IV.4.a Rappel

- Poser le graphe des liaisons en y faisant apparaître la liaison d'entrée
- Exprimer les torseurs cinématiques des différentes liaisons en leurs points caractéristiques
- Déterminer le nombre cyclomatique du mécanisme et écrire les γ fermetures de chaîne cinématique indépendantes
- Pour chaque chaîne indépendante choisie
    - Choisir le point d'expression des différents torseurs cinématiques
    - Ecrire la fermeture de chaîne en sommant ses torseurs
    - En déduire deux équations vectorielles en résultante et moment
    - Choisir une base de projection de ces équations
    - Projeter afin d'obtenir un système de 6 équations
- Regrouper les différents systèmes d'équations
- Résoudre

A.IV.4.b Graphe des liaisons

Mettre en couleur la liaison correspondant à l'entrée connue.



A.IV.4.c Torseurs cinématiques des liaisons

Liaison	Torseur cinématique
L_{31} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_{3/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
L_{21} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O,\vec{z})$
L_{32} Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/2} & W_{3/2} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O,\vec{z})$ $W_{3/2} = \frac{pas}{2\pi} R_{3/2}$

A.IV.4.d Nombre cyclomatique et fermetures de chaînes

$$\gamma = L - p + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$$

Chaîne à étudier : 1231

A.IV.4.e Fermeture de chaîne

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/2} & W_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{pas}{2\pi} R_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} (R_{3/2} + R_{2/1})\vec{z} = \vec{0} \\ \left(W_{3/1} + \frac{pas}{2\pi} R_{3/2}\right)\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

Choix de la base de projection : $\mathfrak{B}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ W_{3/1} + \frac{pas}{2\pi} R_{3/2} = 0 \end{cases}$$

A.IV.4.f Bilan des équations cinématiques à résoudre

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$$

A.IV.4.g Résolution

Il faut résoudre le système en exprimant le plus d'inconnues cinématiques possible en fonction d'autres, en nombre le plus faible possible, correspondant alors au nombre de mobilités du mécanisme.

Dans un premier temps, on détermine les éventuelles inconnues cinématiques dont le calcul est immédiat, du type $P_{2/1} \cos \theta_{2/1} = 0$. On l'entoure en noire dans l'équation où elle a été déterminée puis en bleu dans les autres afin de mentionner qu'elle est connue. Dans l'exemple ci-dessus, il n'y en a pas.

Ensuite, il existe deux solutions :

- d'une manière générale, on choisit une inconnue cinématique, soit on a une donnée d'entrée liée à une mobilité, auquel cas on choisit celle-ci, soit on la choisit au hasard) et on l'entoure en rouge dans les équations où elle est présente. Une à une, on détermine les autres inconnues pouvant être déterminées en fonction de celle-ci en prenant soin d'entourer l'inconnue déterminée dans l'équation qui a servi à la déterminer en noir et on entoure ensuite cette inconnue dans toutes les autres équations en bleu pour signifier qu'elle est connue. S'il y a plusieurs mobilités, il faut recommencer cette démarche pour les autres inconnues permettant de mouvoir le système sur ces mobilités. A la fin, on doit arriver à une expression de toutes les inconnues cinématiques du problème en fonction des inconnues d'entrée (autant que de mobilités).

- Dans une démarche d'analyse des mécanismes, on peut ne pas faire cette démarche qui consiste à entourer les inconnues d'entrée. Dans ce cas, on cherche simplement à exprimer le plus d'inconnues cinématiques en fonction du moins possible des autres. Si le travail est bien fait, on sait alors qu'en imposant m inconnues cinématiques, on peut déterminer toutes les autres. Cela permet de déterminer la mobilité du système.

$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$	$W_{3/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$

$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}} + \boldsymbol{R_{2/1}} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$	$W_{3/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$ $R_{2/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}$

Remarque : Dans le cas particulier où la mobilité du mécanisme étudié est nulle :

- Dans le cas de la première démarche, on trouvera finalement que l'inconnue choisie comme connue est nulle
- Dans le cas de la seconde démarche, on trouvera simplement que toutes les inconnues cinématiques du système sont nulles

A.IV.5 Résolution statique

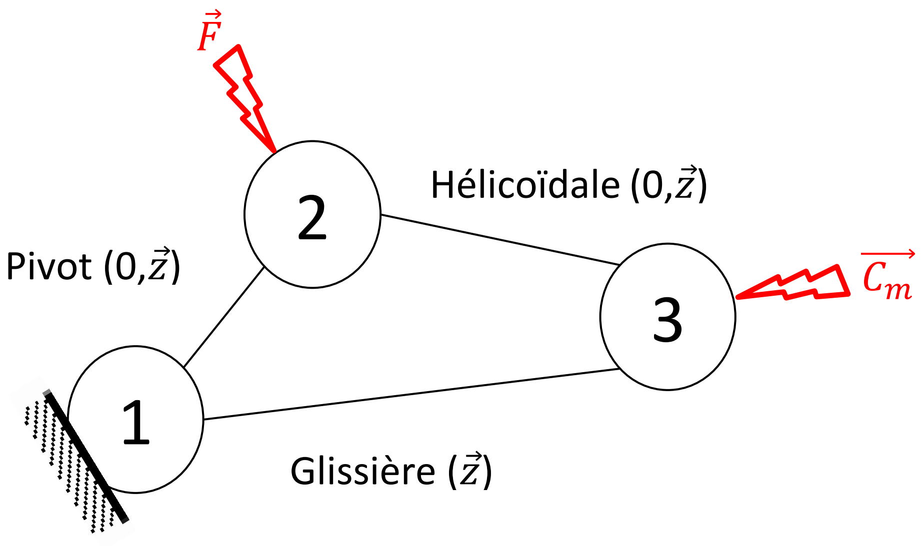
L'objectif de l'étude statique est de mettre en relation le couple moteur à imposer sur le volant connaissant l'effort sur le coulisseau afin qu'ils soient équilibrés. En parallèle, on souhaite déterminer les actions dans toutes les liaisons.

A.IV.5.a Rappel

- Poser le graphe des liaisons en y faisant apparaître les actions extérieures
- Exprimer les torseurs statiques des différentes liaisons en leurs points caractéristiques
- Exprimer les torseurs des actions extérieures
- Isoler chaque solide sauf le bâti (Rq : des isolements de plusieurs solides biens choisis peuvent convenir)
    - Choisir le point d'expression des différents torseurs des actions s'exerçant sur lui
    - Sommer ces torseurs et appliquer le PFS
    - En déduire deux équations vectorielles en résultante et moment
    - Choisir une base de projection de ces équations
    - Projeter afin d'obtenir un système de 6 équations
- Regrouper les différents systèmes d'équations
- Résoudre

A.IV.5.b Graphe des liaisons

Faire apparaître les actions extérieures.



A.IV.5.c Torseurs statiques des liaisons

Liaison	Torseur statique
L_{31} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{T}_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{3/1} & L_{3/1} \\ Y_{3/1} & M_{3/1} \\ 0 & N_{3/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
L_{21} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ X_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$
L_{32} Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} X_{3/2} & L_{3/2} \\ Y_{3/2} & M_{3/2} \\ Z_{3/2} & N_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$ $N_{3/2} = -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2}$

A.IV.5.d Actions mécaniques extérieures

Couple moteur sur volant $\overrightarrow{C_m}$	$\{\mathcal{T}_{m\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
Effort résistant sur le pointeau $\vec{F}$	$\{\mathcal{T}_{effort\to 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$

A.IV.5.e Application du principe fondamental de la statique à chaque solide

Pour chaque pièce isolée i sauf le bâti: $\sum\{\mathcal{T}_{ext\to i}\} = \{0\}$

Chaque torseur devant être exprimé au même point.

Pièce	PFS
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} + \{\mathcal{T}_{m\to 2}\} = \{0\}$ $\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} X_{3/2} & L_{3/2} \\ Y_{3/2} & M_{3/2} \\ Z_{3/2} & -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$ $\begin{cases} (X_{1/2} + X_{3/2})\vec{x} + (Y_{1/2} + Y_{3/2})\vec{y} + (Z_{1/2} + Z_{3/2})\vec{z} = \vec{0} \\ (L_{1/2} + L_{3/2})\vec{x} + (M_{1/2} + M_{3/2})\vec{y} + \left(-\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + C_m\right)\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$

<table>
<tr><td></td><td>Choix de la base de projection : $\mathfrak{B}$

$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + C_m = 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$$\{\mathcal{T}_{2/3}\} + \{\mathcal{T}_{1/3}\} + \{\mathcal{T}_{effort\to 3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} & M_{2/3} \\ Z_{2/3} & \frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} X_{1/3} & L_{1/3} \\ Y_{1/3} & M_{1/3} \\ 0 & N_{1/3} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} (X_{2/3} + X_{1/3})\vec{x} + (Y_{2/3} + Y_{1/3})\vec{y} + (Z_{2/3} + F)\vec{z} = \vec{0} \\ (L_{2/3} + L_{1/3})\vec{x} + (M_{2/3} + M_{1/3})\vec{y} + \left(\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3}\right)\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} + F = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$$</td></tr>
</table>

A.IV.5.f Bilan des équations statiques à résoudre

$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + C_m = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} + F = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$

A.IV.5.g Résolution

Si des actions extérieures sont présentes, on les entoure en rouge dans les équations. Attention, les actions extérieures ne sont pas des inconnues de liaison ! Il faut les supposer connues. La résolution permettra de mettre une relation entre elles. Il se peut qu'aucune action extérieure ne soit présente, auquel cas on devra trouver que toutes les inconnues statiques calculables sont nulle.

Une à une, on détermine une des inconnues statiques, on l'entoure en noir dans l'équation qui a permis de la déterminer (soit en fonction des données extérieures, soit nulle si pas d'actions extérieures), puis en bleu dans toutes les autres équations afin de signifier qu'elle est connue.

En général, la présence d'actions extérieures permet de guider la résolution. Dans ce cas, on part de ces équations pour mener la résolution.

<table>
<tr>
<td colspan="2">$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$</td>
<td colspan="2">$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + \boldsymbol{Z_{3/2}} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$</td>
<td colspan="2">$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$</td>
<td>$Z_{3/2} = \boldsymbol{F}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{1/2}} + \boldsymbol{Z_{3/2}} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$</td>
<td colspan="2">$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{N_{1/3}} = 0 \end{cases}$</td>
<td>$\begin{gathered} Z_{3/2} = \boldsymbol{F} \\ N_{1/3} = -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{F} \\ Z_{1/2} = -\boldsymbol{F} \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{gathered}$</td>
</tr>
</table>

A.IV.6 Remarques

Lors de la résolution cinématique, le choix des points, des bases de projection et des fermetures de chaînes influence la forme du système cinématique.

Lors de la résolution statique, le choix des points, des bases de projection et éventuellement des isolements (plusieurs solides en même temps) influence la forme du système statique.

Quels que soient ces choix, les résultats de la résolution des systèmes de de l'analyse des mécanismes ne peuvent être différents.