A.IV. Principe fondamentale de la dynamique

A.IV.1 Référentiel Galiléen

un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Tour référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est Galiléen.

Le référentiel lié à la Terre, est généralement considéré comme Galiléen dans les expériences de laboratoire.

A.IV.2 Principe fondamental de la dynamique

A.IV.2.a Enoncé

Il existe au moins un espace/temps appelé Galiléen R_g, tel que pour tout ensemble matériel E, le torseur dynamique de E dans cet espace/temps est constamment égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à E :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E)\}$$

Le référentiel terrestre est en général considéré comme Galiléen.

A.IV.2.b Théorèmes généraux de la dynamique

A.IV.2.b.i Cas général

Le principe fondamental de la dynamique s'exprime de façon vectorielle par le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment dynamique :

$$M\vec{\Gamma}(G,E/R_g) = \vec{R}_{\overline{E}\to E}$$

$$\vec{\delta}(A,E/R_g) = \overrightarrow{M_{A}}_{\overline{E}\to E}$$

On obtient alors un système de 6 équations, 3 en résultante et 3 en moment.

Le principe fondamental de la statique est un dérivé du principe fondamental de la dynamique. De la même manière que le PFS, le PFD permet de déterminer les actions dans les liaisons, mais cette fois ci en tenant compte de la dynamique des pièces en mouvement.

La résolution complète d'un mécanisme en dynamique (actions de liaisons) se mène donc exactement de la même façon que la résolution statique des mécanismes en isolant des ensembles bien choisis.

A.IV.2.b.ii Cas particuliers d'un solide indéformable en :

- **<u>Mouvement de translation dans une direction fixe</u>**

Dans le cas d'un mouvement de translation d'accélération a sous l'action F dans une direction fixe, on peut directement appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur cette direction :

$$ma = F$$

- **<u>Mouvement de rotation autour d'un axe fixe</u>**

Dans le cas d'un mouvement de rotation d'accélération angulaire $\Omega = \ddot{\theta}$ sous le couple C autour d'un axe fixe, connaissant le moment d'inertie J du solide en rotation autour de cet axe, on peut directement appliquer le théorème de du moment dynamique en projection sur cette direction :

$$J\ddot{\theta} = C$$

Dans ce cas, le moment dynamique en un point de l'axe de rotation vaut : $J\ddot{\theta}$

A.IV.2.c Remarques

A.IV.2.c.i Masses et inerties négligées

Négliger masses et inerties d'un solide revient à avoir un torseur dynamique nul : masse nulle et matrice d'inertie sont nulles

A.IV.2.c.ii Relations issues du PFD

L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir deux types d'équations

- Relation entre paramètres dynamiques, actions extérieures et **actions de liaisons**
- Relation cinématiques sur les équations de mobilités : **équations différentielles du mouvement** (ex : équation $0 = 0$ d'un arbre en rotation remplacée par une relation entre inertie, couple appliqué et accélération angulaire : $C = J\ddot{\theta}$).

A.IV.2.c.iii Mouvement imposé

En dynamique, les pièces sont en mouvement. Il arrive que l'on impose une vitesse de rotation constante dans une liaison par exemple. Attention, dans ce cas, il est toujours nécessaire d'associer à ce mouvement imposé une action inconnue.

On introduit souvent l'effet d'inertie en prenant l'exemple d'une personne assise sur une chaise. On lance la chaise en rotation, puis on demande à la personne assise d'écarter les bras puis de les ramener. La vitesse n'étant pas imposée, elle évolue, diminuant quand les bras sont écartés, et augmentant quand les bras sont ramenés au centre.

Dans le cas exposé ci-dessus, comme la vitesse n'est pas imposée, elle n'est pas constante et s'adapte au solide en rotation. Mais si on souhaitait imposer une vitesse constante lors de cette même expérience, il serait obligatoire d'injecter de l'énergie au système lorsque les bras s'écartent afin que la vitesse ne diminue pas, et de la récupérer (freiner le mouvement) lorsque les bras reviennent au centre. Il faudrait donc considérer un couple extérieur C associé à cette condition de vitesse constante.

Dans le cas d'une vitesse imposée nulle, on pourra même transformer la liaison concernée en bloquant le degré de liberté concerné.

A.IV.2.c.iv PFD en projection sur un axe

Il ne faut pas systématiquement écrire les 6 équations par isolement. Il faut savoir déterminer l'équation utile au problème étudié. On l'obtient généralement en projetant la résultante dynamique ou le moment dynamique sur un axe. Dans le cas du calcul d'une projection d'un moment dynamique, il est intéressant d'utiliser la formule suivante :

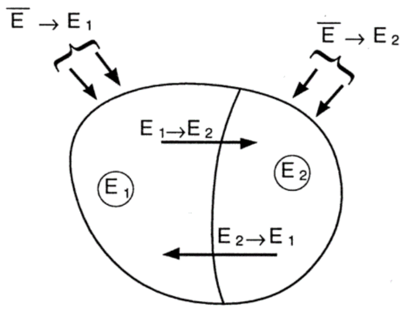
$$\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\sigma}(G,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}$$

En G ou A fixe uniquement !!!

Pour retenir cette formule : $(uv)' = uv' + u'v \quad ; \quad u = \vec{\sigma}(G,S/R_0) \quad ; \quad v = \vec{u}$

A.IV.3 Théorème des actions réciproques

Soit un système matériel E constitué de deux sous-systèmes E_1 et E_2 tels que $E = E_1 U E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.



Appliquons le PFD à E, E_1 et E_2 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\}$$

$$\{\mathcal{D}(E_1/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E_1} \to E_1)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\}$$

$$\{\mathcal{D}(E_2/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E_2} \to E_2)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$

Or :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R_g)\} + \{\mathcal{D}(E_2/R_g)\}$$

$$\{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$

On en déduit :

$$\{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$

C'est le théorème des actions réciproques. Si un système matériel E_1 exerce sur un autre système E_2 un torseur d'efforts $\{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$, E_2 exerce sur E_1 un torseur d'efforts opposé.