A.III. Précision

A.III.1 Introduction

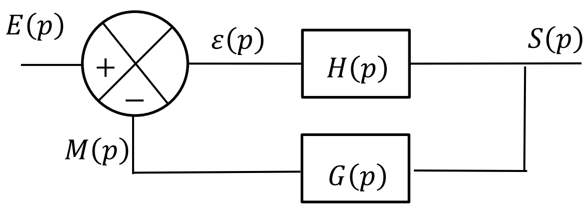
A.III.1.a Systèmes stables

Avant toute chose, rappelons que tout ce paragraphe est vrai dans le cas de systèmes stables. Si un système est instable, on ne peut parler d'écart statique et de trainage !

Qui dit système stable dit classe forcément nulle pour sa fonction de transfert complète (pas de pôle nul).

A.III.1.b Mise en place du problème

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant :



Sa $FTBO$ s'écrit :

$$FTBO(p) = H(p)G(p)$$

Considérons une forme générale de la $FTBO$ définie par :

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)}$$

Avec $\alpha \geq 0$ et $\alpha + m > n$

Définitions :

- α représente la classe de la FTBO, c'est-à-dire le nombre d'intégrations $\frac{1}{p}$ présentes dans la boucle ouverte.
- K_{BO} est le gain statique de la FTBO
- n représente le degré du numérateur
- $\alpha + m$ est l'ordre de la FTBO (degré du dénominateur)

Remarque : pour les fonctions de transfert des systèmes réels, on a toujours $\alpha + m > n$.

A.III.1.c Ecart - Erreur – Définition

On appelle « erreur » la différence entre l'entrée (grandeur de commande) et la sortie (grandeur commandée) :

$$\Sigma(t) = e(t) - s(t)$$

La précision s'améliore lorsque l'erreur diminue.

La notion d'erreur est délicate à évoquer car elle n'existe que lorsque entrée et en sortie ont des mêmes grandeurs. En réalité, on compare en général des tensions images des variables à comparer.

On définit l' « écart », valeur en sortie du comparateur définie par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

Pour un système à retour unitaire, $\Sigma(t) = \varepsilon(t)$.

Améliorer la précision revient à minimiser l'écart, qui évolue dans deux circonstances :

- Evolution de l'entrée : problème de poursuite
- Présence de perturbations : problème de régulation

Définitions :

- Lorsque l'entrée est un échelon, l'écart à l'infini est appelé écart statique, ou écart de position, noté ε_s.
- Lorsque l'entrée est une rampe, on parle d'écart de vitesse, de poursuite ou de traînage, noté ε_v (c'est la valeur à l'infini de l'écart dynamique ε_d).

Remarque : Nous allons dans la suite montrer qu'il est possible de connaître simplement les écarts statiques et de poursuite d'un système bouclé. Nous appellerons A cet écart. Il est toutefois intéressant de retenir que l'écart statique est facilement calculable, quel que soit le système étudié.

A.III.1.d Calcul de l'écart statique

Lorsque l'on cherche l'écart statique d'un système de fonction de transfert $H(p)$, si l'on connaît son gain statique complet K, on peut directement appliquer la formule :

$$\boldsymbol{\lim_{p \to 0}\big(H(p)\big) = K \quad ; \quad \varepsilon_s = E_0(1-K)}$$

Démonstration : toute fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}$$

Si le système est stable en boucle fermée, il ne peut pas rester de pôles à partie réelle positive ou nulle, donc la classe vaut 0. Dans ce cas :

$$\lim_{t \to +\infty}\big(S(t)\big) = \lim_{p \to 0}\big(pS(p)\big) = \lim_{p \to 0}\left(pH(p)\frac{E_0}{p}\right) = E_0 \lim_{p \to 0}\big(H(p)\big)$$

$$\lim_{p \to 0}\big(H(p)\big) = \lim_{p \to 0}\left(K\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}\right) = K$$

Soit :

$$\lim_{t \to +\infty}\big(S(t)\big) = KE_0$$

La valeur finale à une entrée échelon E_0 vaut donc toujours KE_0

L'écart statique prend donc toujours la forme suivante :

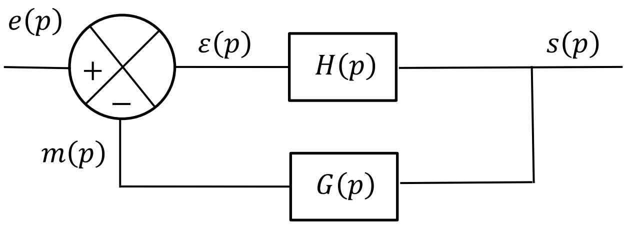
$$\varepsilon_s = E_0 - KE_0 = E_0(1-K)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty}\big(E(p) - S(p)\big) = \lim_{p \to 0} E_0\big(1 - H(p)\big) = E_0\left[1 - \lim_{p \to 0}\big(H(p)\big)\right] = E_0(1-K)$$

A.III.2 Calcul des écarts au comparateur A des systèmes

Etudions une boucle d'asservissement quelconque :



On appelle :

$$A = \lim_{t\to\infty}\big(\varepsilon(t)\big)$$

A.III.2.a Expression générale de l'écart au comparateur A

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

On exprime l'écart à l'aide de la $FTBO$:

$$\varepsilon(p) = e(p) - m(p) = e(p) - FTBO(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)}e(p)$$

En reprenant la forme générale de $FTBO$ proposée précédemment :

$$FTBO(p) = K_{BO}\frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \cdots + b_mp^m)}$$

On a :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_{BO}\dfrac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \cdots + b_mp^m)}}e(p)$$

L'écart dépend de la nature de l'entrée. Les entrées classiques sont l'impulsion, l'échelon, la rampe et la parabole. Leurs transformée de Laplace sont obtenues à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{L}\left(a\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{a}{p^n}$$

On écrit donc ces entrées sous la forme générale : $E(p) = \frac{a}{p^\beta} \quad ; \quad \beta \geq 0$

La forme générale de l'écart s'écrit donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{a}{p^\beta}\frac{1}{1 + K_{BO}\dfrac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \cdots + b_mp^m)}}$$

Avec K_{BO} le gain statique de la boucle ouverte.

A.III.2.b Calcul de l'écart au comparateur A

Si le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$A = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} \left[\frac{a}{p^{\beta - 1}} \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}} \right]$$

$$A = \lim_{p \to 0} \left[\frac{a}{p^{\beta - 1}} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}} \right] = \lim_{p \to 0} \left[\frac{a}{p^{\beta - 1}} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K_{BO}} \right]$$

$$\boldsymbol{A = \lim_{p \to 0} \left[a \frac{p^{\alpha - \beta + 1}}{p^\alpha + K_{BO}} \right]}$$

On peut donc mettre en place le tableau suivant, permettant de connaître l'équivalent en 0 (tableau 1) et la valeur de l'écart (tableau 2) en fonction de la classe de la FTBO du système et de l'entrée.

Nature de l'entrée			Classe du système			
$e(t)$	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	$\frac{ap}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^3}{p^2 + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^3}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n+1}}{p^n + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^{n+1}}{K_{BO}}$
Echelon $e(t) = au(t)$	$\frac{a}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{a}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap}{p + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p^2 + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^n}{p^n + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^n}{K_{BO}}$
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	$\frac{a}{p(1 + K_{BO})}$	$\frac{a}{p + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{a}{K_{BO}}$	$\frac{ap}{p^2 + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n-1}}{p^{n-1} + K_{BO}} \underset{0}{\sim} \frac{ap^{n-1}}{K_{BO}}$

Valeur de A						
Nature de l'entrée			Classe du système			
$e(t)$	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

Un système de classe $\alpha \geq 2$ n'est pas forcément instable s'il y a des remontées de phase

A.III.2.c Conclusions

La présence d'intégrations $\frac{1}{p}$ dans la $FTBO$ a une grande influence sur la précision d'un système.

A.III.2.c.i Ecart statique

- Plus la classe de la $FTBO$ est élevée, plus la précision est grande quelle que soit la nature de l'entrée.
- Dès que la $FTBO$ possède une intégration, l'écart statique est nul.
- Si l'erreur statique est ni infinie, ni nulle, alors plus le gain de la FTBO est grand, plus la précision est bonne.

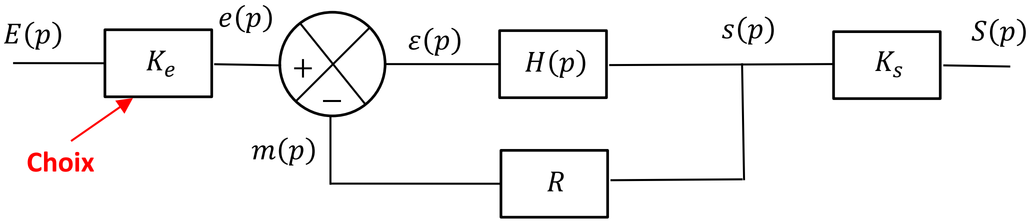
A.III.2.c.ii Ecart de vitesse

- Dès qu'un système possède au moins deux intégrations, l'écart de poursuite est nul
- Un système ne possédant pas d'intégration a un écart de poursuite infini

A.III.2.d Détermination de l'erreur en fonction de A

A.III.2.d.i Expression

Ces résultats sont vrais pour l'écart au niveau du comparateur, quelle que soit la FTBO du système. Dans les autres cas, et dans le cadre de gains purs ajoutés en retour et à l'extérieur :



Appelons e, E, s, S, A les variables associées aux variables du même nom dans le schéma bloc lorsque leur comportement asymptotique a été atteint (constante, rampe).

On a :

$$A = e - m = K_e E - Rs = K_e E - \frac{R}{K_s} S \Leftrightarrow \frac{R}{K_s} S = K_e E - A \Leftrightarrow S = \frac{K_s(K_e E - A)}{R}$$

$$\Sigma = E - S = E - \frac{K_s(K_e E - A)}{R} = \frac{ER - K_s(K_e E - A)}{R} = \frac{ER + K_s A - K_e K_s E}{R} = \frac{E(R - K_e K_s) + K_s A}{R}$$

$$\boldsymbol{\Sigma = \lim_{t\to\infty}\big(E(t) - S(t)\big) = E - S = \frac{E(R - K_e K_s) + K_s A}{R}}$$

$$\boldsymbol{E \text{ entrée temporelle } \begin{cases} Echelon: E = E \\ Rampe: E = at \end{cases}}$$

Attention, A s'exprime en fonction des coefficients de l'entrée du comparateur e, soit une multiplication par K_e par rapport à l'entrée du système

En pratique, cette formule ne sera pas utilisée

A.III.2.d.ii Proportionnalité écart / erreur (Concours !!!)

On peut vous demander de choisir K_e afin que l'erreur Σ soit proportionnelle à l'écart. On voit qu'il faut :

$$\boldsymbol{\Sigma \propto A \quad ; \quad R - K_e K_s = 0 \Leftrightarrow K_e = \frac{R}{K_s}}$$

Là aussi, ce résultat se retrouve simplement en exprimant comme fait ci-dessus l'écart :

$A = K_e E - \frac{R}{K_s} S$. On veut factoriser par $(E - S)$, on pose $K_e = \alpha \frac{R}{K_s} \Rightarrow A = \alpha \frac{R}{K_s} E - \frac{R}{K_s} S = \frac{R}{K_s}(\alpha E - S)$. En prenant $\alpha = 1 \Leftrightarrow K_e = \frac{R}{K_s}$, on a : $A \propto (E - S)$

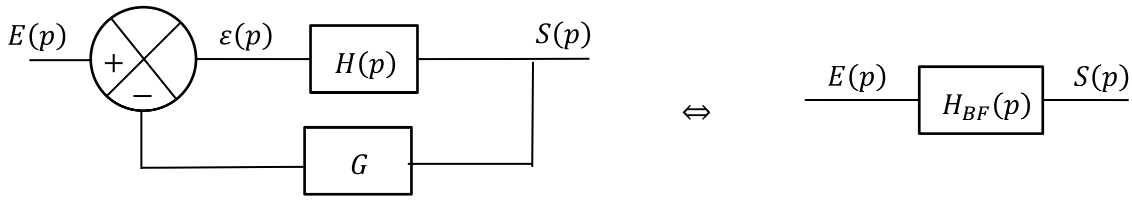
Parfois, on demande : Déterminer K_e tel que $\varepsilon = 0$ lorsque entrée = sortie (ie $\Sigma = E - S = 0$). On écrit donc : $\varepsilon = e - m = K_e E - \frac{R}{K_s} S = 0$. Si $E = S$, $\varepsilon = \left(K_e - \frac{R}{K_s}\right) S \Rightarrow K_e - \frac{R}{K_s} = 0$, soit $K_e = \frac{R}{K_s}$

A.III.3 K_{BF} des systèmes bouclés et erreur

A.III.3.a Détermination de K_{BF} selon la classe

Soit $H(p)$ une fonction de transfert quelconque :

$$H(p) = K_{CD}\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)} \quad ; \quad m \geq n$$



$$K_{BO} = K_{CD}G$$

$$H_{BF}(p) = FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)G} = \frac{K_{CD}\dfrac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)}}{1 + K_{BO}\dfrac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)}}$$

$$H_{BF}(p) = K_{CD}\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha(1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m) + K_{BO}(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n)}$$

A.III.3.a.i FTBO de classe nulle: $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD}\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{(1 + K_{BO}) + \cdots p \ldots . p^2 + \cdots}$$

$$\boldsymbol{K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}}$$

Pour un système à retour unitaire ($K_{BO} = K_{CD}$), on a :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

A.III.3.a.ii FTBO de classe au moins égale à 1 : $\alpha \geq 1$

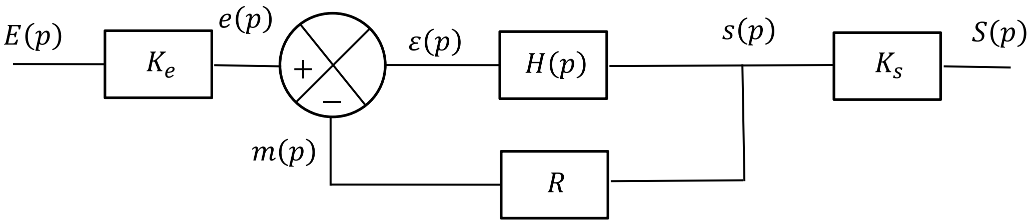
$$\alpha \geq 1 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD}\frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{K_{BO} + \cdots p + \cdots p^2 + \cdots} = \frac{K_{CD}}{K_{CD}G}\frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{1 + \cdots p + \cdots p^2 + \cdots}$$
$$= K_{BF}\frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n}{1 + \cdots p + \cdots p^2 + \cdots}$$

$$\boldsymbol{K_{BF} = \frac{1}{G}}$$

On remarque que dès qu'un système à retour unitaire ($G = 1$) est de classe 1 ou supérieure, on sait que l'écart statique est nul : $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF}) = 0$

A.III.3.b Erreur statique des systèmes connaissant K_{BF}

Soit le système général suivant :



On appelle K_{CD} le gain statique de $H(p)$

$$K_{BO} = K_{CD}R$$

On a :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{R}$

On en déduit la valeur du gain statique K_{comp} du système complet :

$$K_{comp} = K_{BF}K_eK_s$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = \frac{K_{BF}K_eK_s}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = \frac{K_eK_s}{R}$

Finalement, on a l'écart statique entrée sortie :

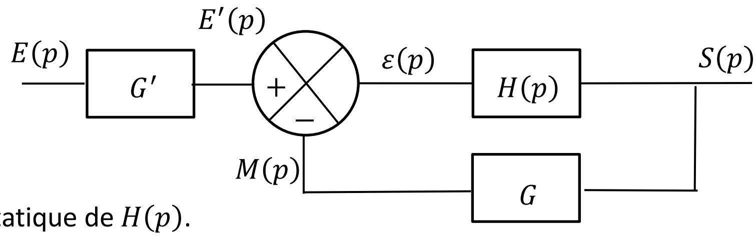
$$\Sigma_s = E(1 - K_{comp})$$

Remarque : Attention, cette formule ne s'applique qu'à l'écart statique même si certains cas particuliers peuvent exister pour l'erreur de traînage

A.III.4 Choix du gain avant comparateur

A.III.4.a Présentation du problème

Soit un système **stable** ayant un retour de type gain pur G :



Soit K_{CD} le gain statique de $H(p)$.

Si les grandeurs $e(t)$ et $s(t)$ sont bien les mêmes, $e(t)$ étant la vraie consigne de $s(t)$, il y a une mesure de la valeur de sortie $s(t)$ par le gain G et il faut donc aussi transformer la grandeur d'entrée $e(t)$ avec un gain G' en $e'(t)$.

G est imposé par le capteur, **G' peut être choisi.**

Notre objectif est d'obtenir un écart statique nul en choisissant bien G'.

A.III.4.b Idées reçues

On dit souvent :

- Il faut prendre $G = G'$ pour comparer des grandeurs comparables – Mais changer de capteur qui transforme toujours la grandeur d'entrée en grandeur de sortie avec un gain différent (5V par tours au lieu de 2V par tout) permet toujours de « comparer des grandeurs comparables » au sens des unités
- Il faut prendre $G = G'$ de manière à avoir une erreur proportionnelle à l'écart, ou avoir entrée = sortie quand l'écart est nul… On a déjà parlé de ce point précédemment. Mais, l'écart au comparateur ne tend pas toujours vers 0… La preuve, si la FTBO est de classe 0, l'écart ne tend jamais vers 0. Un autre choix de G' pourrait être plus judicieux !

Nous allons donc voir ce qu'il faut faire dans les paragraphes suivants.

A.III.4.c Choix de G'

Nous connaissons maintenant le gain statique de la partie bouclée :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{G}$

Obtenir un écart statique nul consiste à obtenir un gain statique complet du système égal à 1.

On a :

$$K_{comp} = G' K_{BF}$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = G' \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = G' \frac{1}{G}$

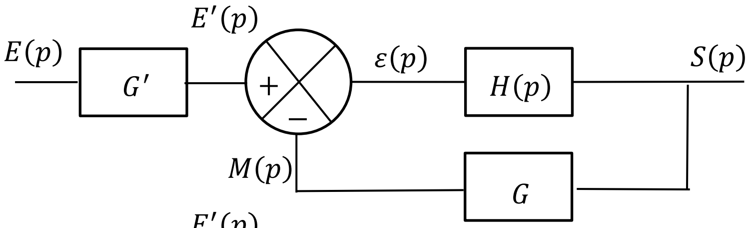
Il faut donc choisir $G' = \frac{1}{K_{BF}}$:

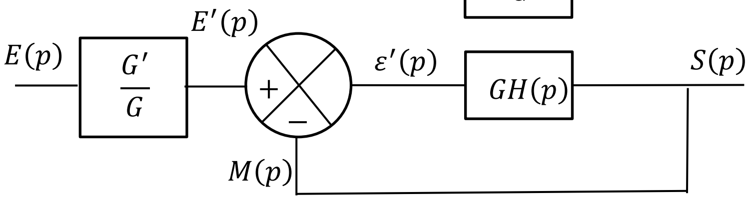
Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$G' = \frac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

Dans la majorité des problèmes traités, soit la fonction de transfert $H(p)$ est de classe 1, soit on va ajouter un correcteur intégrateur à la chaîne directe. On sera donc quasiment tout le temps dans le cas $G' = G$! Mais attention, si la classe est nulle, ce n'est pas le bon choix…

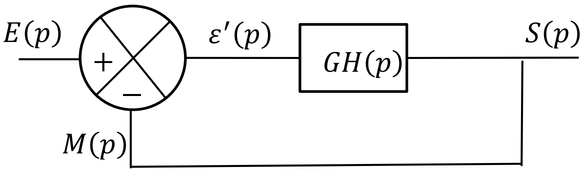
A.III.4.d Modification de schéma bloc

On peut proposer la modification de schéma bloc suivante :





Comme on se retrouve quasiment tout le temps dans la situation $G' = G$, il vient :



Ainsi, le système est à retour unitaire, l'écart au comparateur du système modifié vaut l'erreur entrée sortie :

$$\Sigma_s = A$$

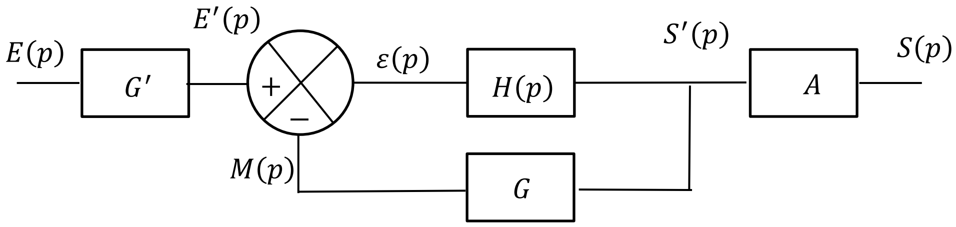
Remarque : cet écart au comparateur n'est pas le même que l'écart au comparateur du système sans retour unitaire.

On peut alors directement connaître les performances de notre système à l'aide du tableau :

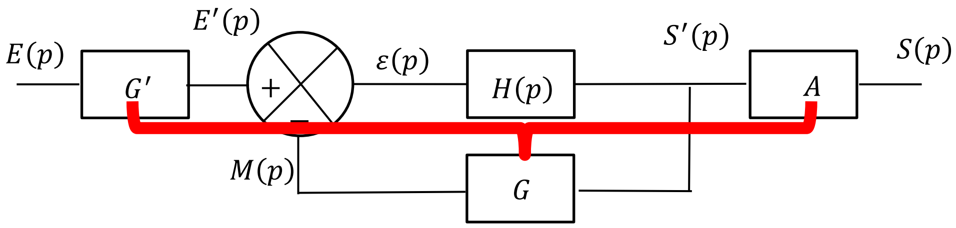
Ecart au comparateur du système modifié, donc Σ_s ☺			
$e(t)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0	0
Echelon E	$\frac{E}{1+K_{BO}}$	0	0
Rampe at	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

A.III.4.e Erreur à ne pas faire

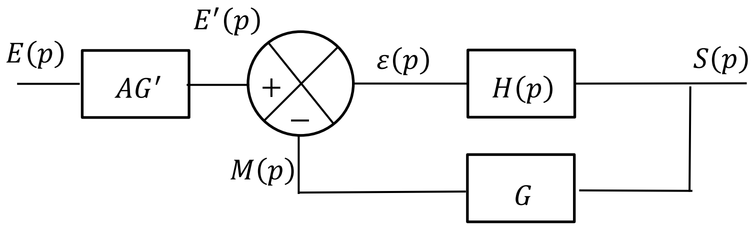
Dans le cas suivant :



Il ne faut pas $G' = G$ mais $\boldsymbol{AG' = G}$



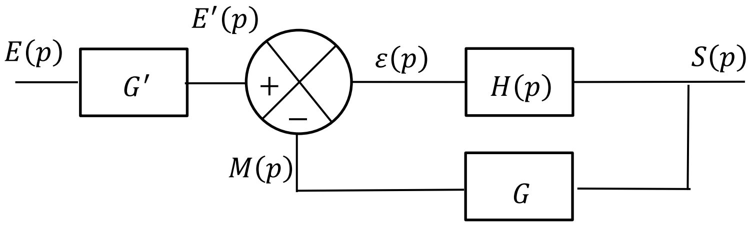
On se ramène en effet au cas suivant :



Et on applique la démarche à ce schéma bloc !

A.III.4.f Conclusions

Dans la situation suivante :

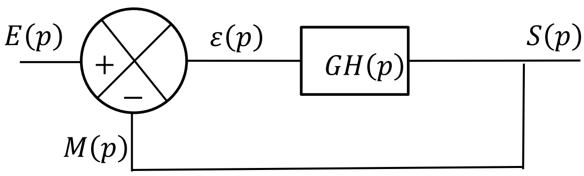


Classe de la $FTBO$ nulle (très peu rencontré en pratique):

- Le gain statique de la boucle vaut $K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1+K_{BO}}$
- On annule l'erreur statique entrée/sortie $\Sigma_s = E - S$ en choisissant : $G' = \frac{1}{K_{BF}} = \frac{1+K_{BO}}{K_{CD}}$
- L'erreur statique est dépendante de l'éventuelle non invariance du système
- On sait que l'écart en vitesse au comparateur tend vers l'infini…

Classe de la $FTBO$ supérieure ou égale à 1 :

- Le gain statique de la boucle vaut $K_{BF} = \frac{1}{G}$ avec G le retour
- On annule l'erreur statique en choisissant : $G' = \frac{1}{K_{BF}} = G$ ($\Sigma_s = \propto A$) et il reste nul en cas de non invariance du système
- On modifie le schéma bloc ainsi :



- On connaît les erreurs directement avec le tableau des écarts car $\Sigma_s = A$

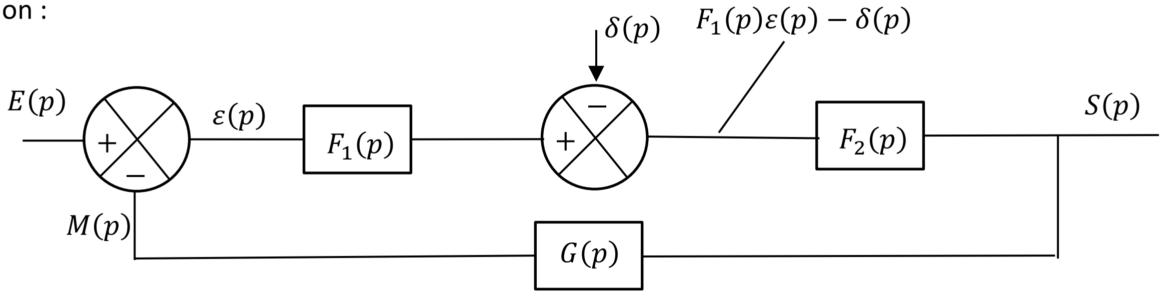
$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

- Attention : L'écart au comparateur A n'est pas le même sur les deux schémas blocs avec et sans retour unitaire

A.III.5 Influence des perturbations

A.III.5.a Problème étudié

Intéressons-nous à un système asservi présentant une perturbation, qu'il soit à retour unitaire ou non :



Notre objectif est de déterminer l'influence d'une perturbation en fonction de l'endroit où elle est placée sur la précision du système.

Exemple : Est-ce que si l'on appuie de manière constante (échelon) sur la tige d'un vérin qui sort va influencer la position obtenue à l'aide de l'asservissement ?

A.III.5.b Calcul de l'écart au premier comparateur

$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - G(p)S(p) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon(p) = E(p) - G(p)F_2(p)[F_1(p)\varepsilon(p) - \delta(p)]$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - G(p)F_2(p)F_1(p)\varepsilon(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p) + G(p)F_2(p)F_1(p)\varepsilon(p) = E(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + G(p)F_2(p)F_1(p)] = E(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) + \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p) = \varepsilon(p) = \varepsilon_e(p) + \varepsilon_p(p)$$

L'écart est donc composé de deux sources :

- L'entrée $\varepsilon_e(p) = \frac{1}{1+G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p)$
- La perturbation $\varepsilon_p(p) = \frac{G(p)F_2(p)}{1+G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$

Remarques :

- On obtient l'expression de la sortie $S(p)$ en fonction de l'entrée $E(p)$:

$$G(p)S(p) = E(p) - \varepsilon(p) = E(p) - \frac{1}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

$$G(p)S(p) = \frac{G(p)F_1(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

$$S(p) = \frac{F_2(p)F_1(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

- $\varepsilon_e(p)$ et $\varepsilon_p(p)$ ont le même dénominateur, si le système sans perturbation est stable, le système perturbé l'est aussi.

$F_1(p)$, $F_2(p)$ et $G(p)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_1(p) = \frac{K_1}{p^\alpha}\frac{N_1(p)}{D_1(p)} \quad avec \quad \begin{cases} N_1(0) = D_1(0) = 1 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$F_2(p) = \frac{K_2}{p^\beta}\frac{N_2(p)}{D_2(p)} \quad avec \quad \begin{cases} N_2(0) = D_2(0) = 1 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$G(p) = \frac{K_3}{p^\gamma}\frac{N_3(p)}{D_3(p)} \quad avec \quad \begin{cases} N_3(0) = D_3(0) = 1 \\ \gamma \geq 0 \end{cases}$$

Alors :

$$F_1(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_1}{p^\alpha} \quad ; \quad F_2(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_2}{p^\beta} \quad ; \quad G(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_3}{p^\gamma}$$

Soit une perturbation de type :

$$\delta(p) = \frac{\delta_0}{p^\delta} \quad avec \quad \delta \geq 0 \quad ; \quad \varepsilon_p(p) = \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\frac{\delta_0}{p^\delta}$$

Notons ε_{s_p} l'écart statique induit par la perturbation. Si le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{s_p} = \lim_{p\to 0} p\varepsilon_p(p) = \lim_{p\to 0}\frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\frac{\delta_0}{p^{\delta-1}} = \lim_{p\to 0}\frac{\frac{K_2}{p^\beta}\frac{K_3}{p^\gamma}}{p^{\delta-1}\left(1 + \frac{K_1}{p^\alpha}\frac{K_2}{p^\beta}\frac{K_3}{p^\gamma}\right)}\delta_0$$

$$\varepsilon_{s_p} = \lim_{p\to 0}\frac{p^{\alpha-\delta+1}K_2K_3\delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1K_2K_3}$$

Nous pouvons alors donner la valeur de cet écart en fonction la classe de chaque fonction de transfert $F_1(p), F_2(p)$ et $G(p)$. La discussion se fait sur $\alpha + \beta + \gamma$ qui change l'équivalent selon qu'il vaut 0 ou non. Traitons trois exemples :

Perturbation en impulsion :

$\delta = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
Soit $\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{pK_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3}$	$\frac{p^{\alpha+1}K_2K_3\delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p^{\alpha+1}\delta_0}{K_1}$
Soit $\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{pK_2K_3\delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p\delta_0}{K_1}$	

$\delta = 0$	$\alpha \geq 0$
$\beta + \gamma = 0$	0
$\beta + \gamma \geq 1$	

Perturbation en échelon :

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{K_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{K_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3}$	$\frac{p^\alpha K_2K_3\delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p^\alpha \delta_0}{K_1}$
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{K_2K_3\delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{\delta_0}{K_1}$	

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{K_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3}$	0
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{\delta_0}{K_1}$	

Perturbation en rampe :

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{p^{-1}K_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{p}\frac{K_2K_3\delta_0}{1 + K_1K_2K_3}$	$\frac{K_2K_3\delta_0}{p^{1+\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{\delta_0}{K_1}$	$\frac{p^{\alpha-1}K_2K_3\delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p^{\alpha-1}\delta_0}{K_1}$
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{p^{-1}K_2K_3\delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1K_2K_3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{p}\frac{\delta_0}{K_1}$		

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$+\infty$	$\frac{\delta_0}{K_1}$	0
$\beta + \gamma \geq 1$			

A.III.5.c Conclusions

L'écart statique provoqué par une perturbation en impulsion est toujours nul.

L'écart statique provoqué par une perturbation de type échelon est nul s'il existe au moins une intégration en amont de la perturbation : $\alpha \geq 1$

L'écart statique provoqué par une perturbation de type rampe est nul s'il existe au moins deux intégrations en amont de la perturbation : $\alpha \geq 2$, etc…

On voit que si l'effet d'une perturbation est ni infini, ni nul, l'augmentation du gain de la partie de la $FTBO$ avant celle-ci le diminue.

A.III.6 Conclusions sur la précision

L'ajout d'intégrations est positif pour la précision des systèmes.

L'ajout d'une intégration en amont d'une perturbation en échelon annule son effet.

L'ajout d'une double intégration en amont d'une perturbation en rampe annule son effet.

Plus le gain de la FTBO est grand, meilleure est la précision si l'écart n'est pas nul.