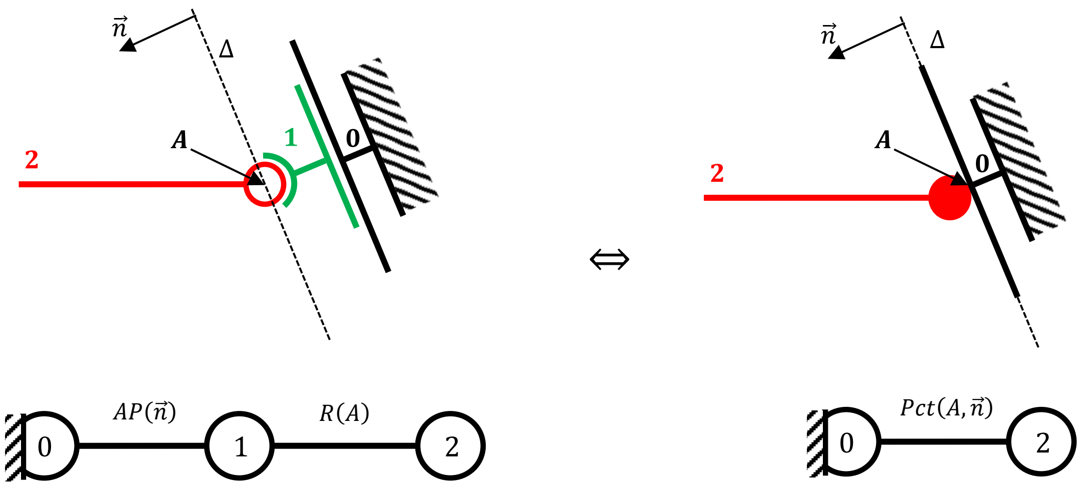
A.VI. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **cinématique**. Nous verrons plus tard qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode statique.

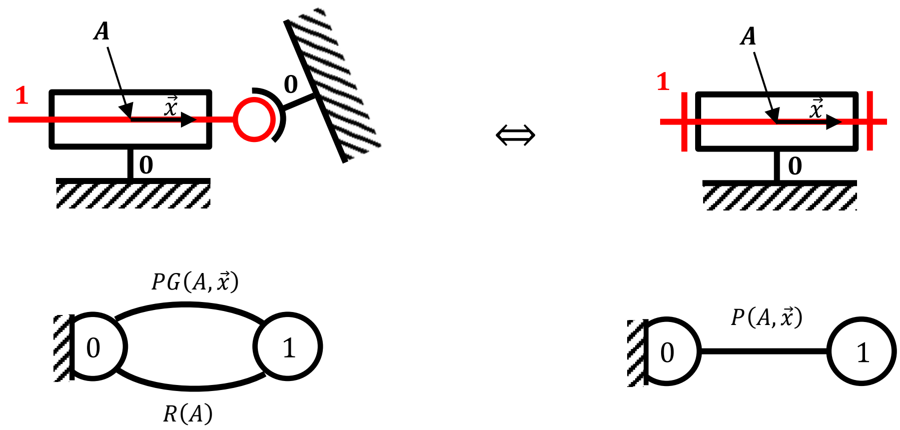
A.VI.1 Présentation

A.VI.1.a Exemples : série –parallèle

Plusieurs liaisons en série définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (et toujours isostatique)



Plusieurs liaisons en parallèle définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (dont la solution non simplifiée peut être est isostatique ou hyperstatique - notion abordée en 2° année) :



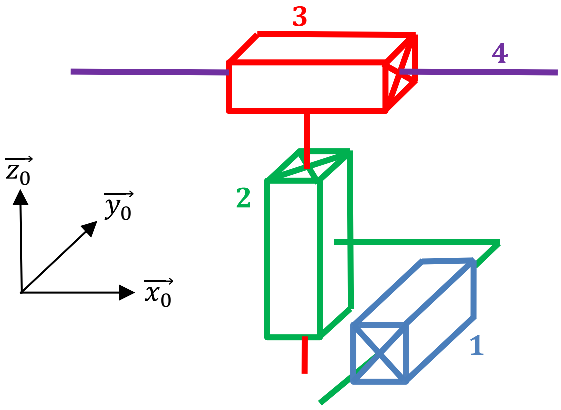
A.VI.1.b Objectifs

Obtenir une liaison équivalente dans un système complexe permet de le simplifier. En effet, lorsque l'on détermine une liaison équivalente à plusieurs liaisons, le nombre de liaisons du système en est d'autant réduit.

Lorsque l'on détermine une liaison équivalente, on détermine concrètement le torseur équivalent à l'ensemble des torseurs des liaisons considérées en utilisant l'une des deux méthodes disponibles, adaptées aux assemblages de liaisons en série ou en parallèle.

La liaison équivalente obtenue n'est pas obligatoirement une liaison normalisée. En effet, le torseur obtenu peut être :

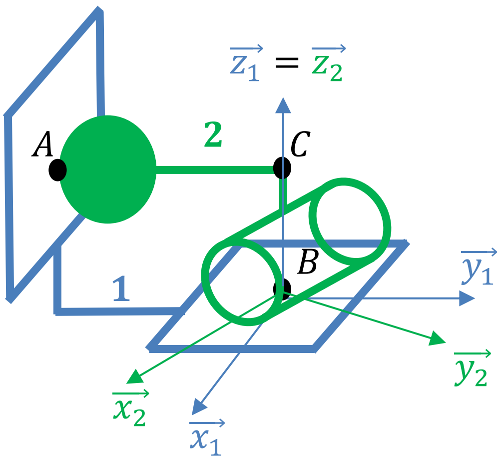
- Un torseur qui présente une forme non usuelle avec des inconnues indépendantes



$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/1} \\ 0 & V_{4/1} \\ 0 & W_{4/1} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$3DDL - 3\ inconnues\ indépendantes$$

- Un torseur présentant ou non une forme usuelle mais avec des inconnues **dépendantes**



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P_{2/1}} & U_{2/1} \\ \boldsymbol{\tan\theta_{2/1} P_{2/1}} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

$$Q_{2/1} = \tan\theta_{2/1} P_{2/1}$$

$$= \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & \boldsymbol{U_{2/1}\cos\theta_{1/2}} \\ 0 & \boldsymbol{U_{2/1}\sin\theta_{1/2}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$U_{2/1} = V_{2/1}\tan\theta_{2/1}$$

- Un mélange des 2 solutions précédentes

La difficulté lors de la détermination de liaisons équivalentes sera de bien choisir le point d'expression du torseur équivalent et sa base afin d'obtenir ce que l'on appelle la forme canonique du torseur dans le but de le reconnaître si c'est une liaison usuelle, ou d'exprimer au plus simple ses DDL dans le cas d'une liaison non usuelle.

A.VI.2 Préliminaires

A.VI.2.a.i Reconnaissance d'une liaison

Pour reconnaître une liaison usuelle, il faut :

- obtenir la forme canonique du torseur associé. La forme canonique d'un torseur est la forme du torseur lorsque son moment est minimum (choix du point) et ses composantes ont des expressions les plus simples (le plus de 0 possibles) (choix de la base). Par forme on entend composantes nulles ou non nulles et places de celles-ci dans le torseur
- N'obtenir que des inconnues indépendantes

On pourra alors vérifier que le torseur obtenu correspond **ou non** à une liaison usuelle. Lorsque l'on obtient le torseur équivalent final, il est composé soit

- d'inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- d'inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée

La forme et l'indépendance des inconnues d'un torseur dépendent de deux choix :

- Le point d'expression du torseur équivalent
- La base d'expression du torseur équivalent

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0.

A.VI.2.a.ii Choix du point

• **Principe**

La reconnaissance d'une liaison par son torseur (cinématique, statique) dépend du point où celui-ci est exprimé. Ainsi, si le torseur d'une liaison est écrit en un point du lieu géométrique caractéristique de celle-ci (et si la base est bien choisie, point développé au prochain paragraphe), sa reconnaissance sera triviale :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaît ici le torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe $(A,\vec{x})$. Cette écriture est la forme canonique du torseur de la liaison pivot.

Par contre, si ce torseur est exprimé en un point quelconque de l'espace $P(x,y,z)$, le torseur associé à cette liaison prendra une forme non conventionnelle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & zP_{2/1} \\ 0 & -yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

On remarque alors que les 3 composantes de ce torseur ne sont **pas indépendantes** :

$$V_{2/1} = zP_{2/1} \quad ; \quad W_{2/1} = -yP_{2/1}$$

Des inconnues en moment dépendent inconnues en résultante et on voit que la forme du torseur obtenu n'est pas la forme correspondant au moment minimum.

On remarque qu'en $y = z = 0$, soit sur l'axe $(A, \vec{x})$, le moment est minimum et les inconnues sont indépendantes :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaître la liaison pivot recherchée.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix du point n'était pas bon au départ

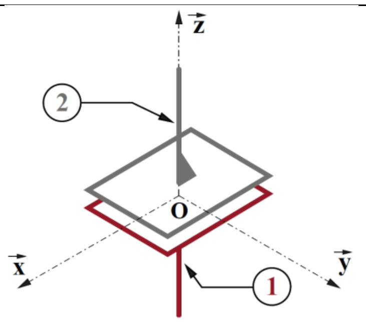
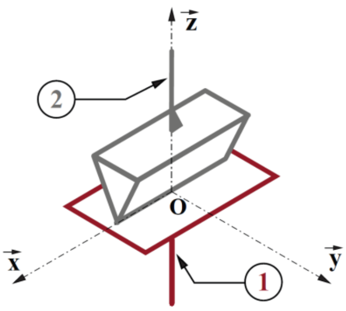
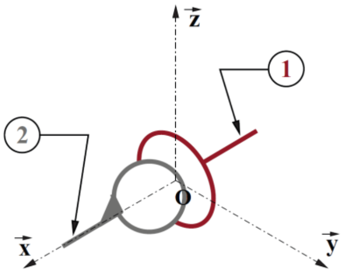
Conclusion : le choix du point avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir un point sur son lieu géométrique avant de commencer**.

• Effets d'un mauvais choix de point

Un mauvais choix de point conduit à l'apparition dans les moments de termes liés à la résultante du torseur et à des dimensions. Il faut alors déplacer le torseur en un autre point afin de minimiser le moment en jouant sur les dimensions et de rendre, si possible les inconnues indépendantes.

• Cas particuliers

A savoir, en cinématique par exemple, les liaisons Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle peuvent contenir des termes U,V et W dépendant de P, Q et R sans changer leur forme canonique. Il peut donc être possible de les reconnaître sans faire ce travail.

		
$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} - yR_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} - zP_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{x},\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} - xQ_{2/1} \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$

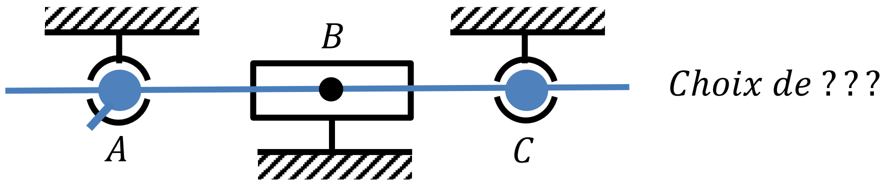
Remarques :

- En aucun cas cette dépendance à des termes en résultante n'induit une dépendance entre les inconnues cinématiques. Exemple pour l'appui plan : il n'est pas possible d'écrire : $U_{2/1} - yR_{2/1} = kR_{2/1}$. On remarque juste que les termes en moment sont « influencés » par les termes en résultante.
- Il en va de même en statique pour un certain nombre de liaisons (cf tableau des liaisons)
- Ce n'est pas parce que le moment n'est pas minimum que le torseur n'a pas sa forme canonique, mais si le moment est minimum, on a la forme canonique du torseur

• **Méthode de choix du point**

Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

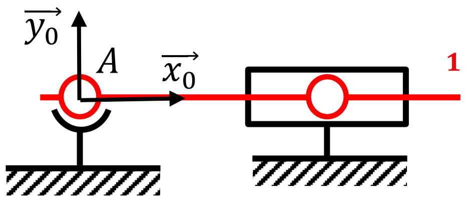
- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P.
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante $(X,Y,Z/P,Q,R)$.

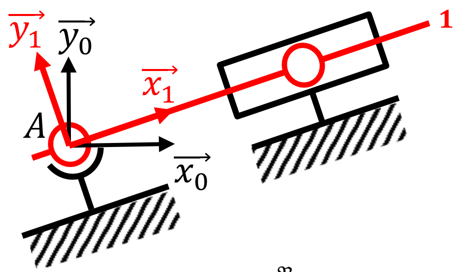


A.VI.2.a.iii Choix de la base

• **Principe**

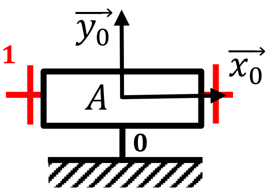
La base d'expression du torseur équivalent peut modifier sa forme. En général, la base est bien choisie intuitivement.

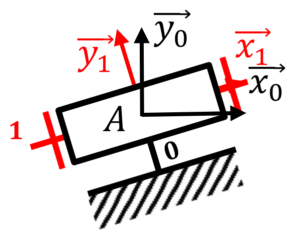




$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & 0 \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$





Dans le cas de droite, et dans la base 0, on remarque une dépendance de deux composantes en résultante (vitesse de rotation) et on remarque qu'un changement de base permet de supprimer celle-ci et de reconnaitre une liaison pivot.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix de la base n'était pas bon au départ

Conclusion : le choix de la base avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir une base contenant les vecteurs associés à la liaison recherchée avant de commencer**.

• Effets d'un mauvais choix de base

Un mauvais choix de base fait apparaître des relations adimensionnées (rapports de longueurs, cos, sin, tan) entre des composantes soit de la résultante, soit du moment, soit des deux. Il faut alors faire un changement de base afin de rendre, si possible, ces inconnues indépendantes.

• Méthode de choix de la base

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, $\mathfrak{B}$ sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x},-,-) \rightarrow$ choix d'une base quelconque contenant le vecteur $\vec{x}$, quelle que soit sa position)

• Remarque

On remarquera que pour réussir à trouver la forme canonique d'un torseur par changement de base, il sera nécessaire d'avoir les mêmes relations entre deux mêmes composantes de la résultante et du moment :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1}\cos\theta_{10} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & V_{2/1}\sin\theta_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1}\cos\theta_{01} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

A.VI.3 Analyse

A.VI.3.a Préliminaires

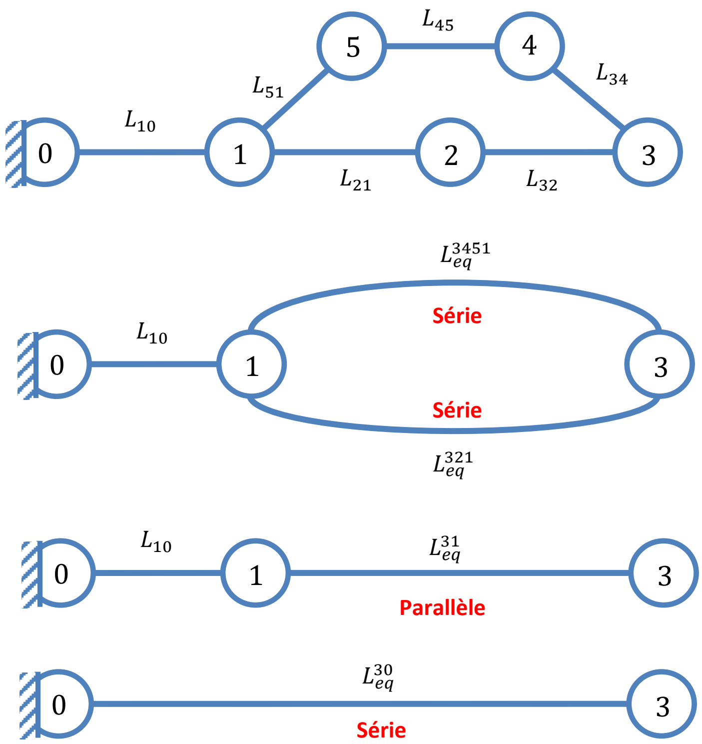
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

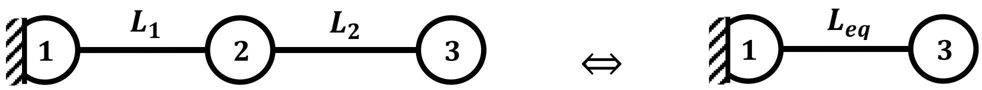
A.VI.3.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et ou s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



A.VI.3.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

A.VI.3.c.i Méthode cinématique – A privilégier

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}$ … $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$.
- Par composition du mouvement, on a :
$$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$
Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{n/1} & U_{n/1} \\ Q_{n/1} & V_{n/1} \\ R_{n/1} & W_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.c.ii Méthode statique

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{T}_{n/n-1}\}$, $\{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\}$ … $\{\mathcal{T}_{2/1}\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{n/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par application du PFS à chaque solide, on a :

Solide	PFS	Déduction
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{3/2}\}$
i	$\{\mathcal{T}_{i-1/i}\} + \{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{\mathcal{T}_{i/i-1}\}$
n	$\{\mathcal{T}_{n-1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$
n via L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$

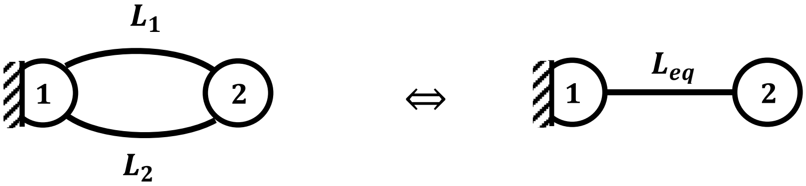
Finalement, on trouve :

$$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \cdots = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$$

Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$

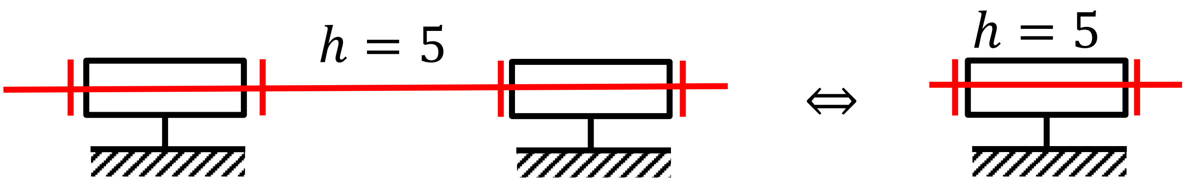
- Exprimer $\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Dans le cas des liaisons en parallèle, la solution réelle peut présenter un degré d'hyperstatisme non nul. Avant de remplacer un ensemble de liaisons per une liaison équivalente isostatique, il convient donc d'analyser le montage afin de garder l'information d'hyperstatisme.



Le degré d'hyperstatisme du système contenant des liaisons équivalentes sera inférieur au degré d'hyperstatisme du système contenant toutes les liaisons. L'écart sera égal à la somme des degrés d'hyperstatisme de chaque liaison équivalente étudiée.

A.VI.3.d.i Méthode cinématique

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\}, \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\}$ … $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par fermeture cinématique de chaque chaîne indépendante, on a :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$$
Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
    - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
    - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d.ii Méthode statique – A privilégier

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^1\}, \{\mathcal{T}_{2/1}{}^2\}$ ... $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^n\}$.
- Par application du PFS, on a :

Solide	Liaison	PFS	Déduction
2	n	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{1/2}{}^i\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^i\}$
2	L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \{\mathcal{T}_{1/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$

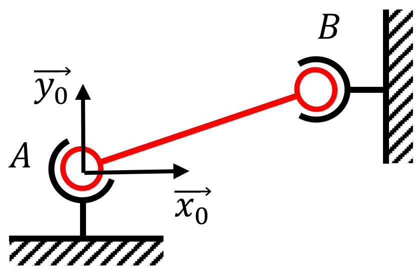
$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^i\} = \{\mathcal{T}_{2/1}{}^1\} + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^2\} + \cdots + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^n\}$$

Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

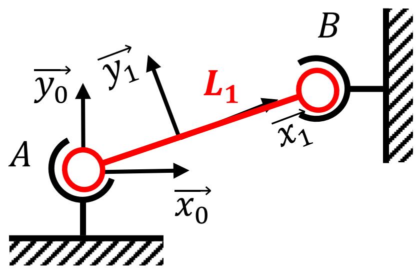
A.VI.4 Illustration de l'effet des choix de points et bases

Soit le schéma cinématique suivant :



A.VI.4.a Méthode recommandée

Pour déterminer la liaison équivalente entre la pièce 1 et le bâti, on voit s'il est possible de déterminer à priori la liaison recherchée. Dans ce cas, on cherche une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$.



On choisit donc un point sur l'axe de la liaison en prenant celui qui induira le moins de calculs (le plus d'inconnues en résultante). Ici, A et B donnent un travail équivalent.

Choisissons A

On choisit une base contenant l'axe de rotation.

Choisissons la base 1

Dans le cas de liaisons en parallèle, on privilégie la méthode statique afin de faire une somme :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} + \{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\}$$

On pose la définition du torseur recherché en A dans B_1

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

Puis les deux torseurs de liaison

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & -L_1 Z_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & L_1 Y_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 Z_{10}{}^2 \\ L_1 Y_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 & 0 \\ {Y_{10}}^1 & 0 \\ {Z_{10}}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1} + \begin{Bmatrix} {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

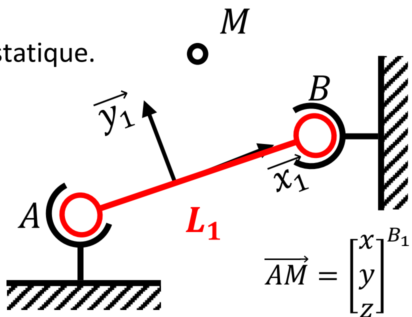
$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

On peut voir qu'aucune des composantes de ce torseur équivalent ne peut être exprimée comme combinaison linéaire des autres.

On a donc exprimé le torseur de la liaison équivalente entre 1 et 0 : c'est bien une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$.

A.VI.4.b Mauvais choix de point

Plaçons-nous en un point M quelconque. On garde la base B_1 et la méthode statique.



$$\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{B_1}$$

On pose la définition du torseur recherché en M dans B_1

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$M_M = M_A + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & (x-L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & -(x-L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$M_M = M_B + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} -(x-L_1) \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ (x-L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ -(x-L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_M^{B_1} + \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & (x-L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & -(x-L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 - yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 + (x-L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 - (x-L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & z(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2) - y(Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2) \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & x(Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2) - L_1 Z_{10}{}^2 - z(X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2) \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & -x(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2) + y(X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2) + L_1 Y_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

Nous sommes face à une écriture compliquée des moments. Sachant que nous cherchons un torseur à 5 inconnues indépendantes, on doit pouvoir montrer **qu'une inconnue est combinaison linéaire** des autres :

$$L_{10} = zY_{10} - yZ_{10}$$

Comme il s'agit d'un point mal choisit, cherchons à **minimiser le moment**.

En $x = y = z = 0$, soit au point A :

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

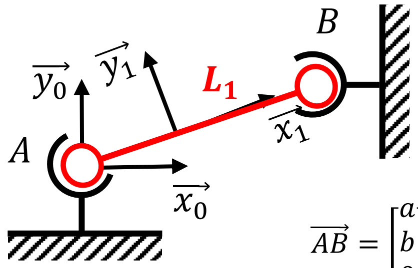
On trouve le torseur le la démarche précédente, c'est terminé. On peut d'ailleurs remarque que même si $x \neq 0$, la forme canonique est gardée et les inconnues sont indépendantes :

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 - z\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & y\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

Ce fait est lié à la remarque faite précédemment : en statique, un certain nombre de torseurs ne changent pas leur forme canonique tout en ayant des composantes qui peuvent changer de valeur.

A.VI.4.c Mauvais choix de base

Plaçons-nous dans la base 0 et faisons la méthode statique en A :



$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}^{B_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} + \{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$M_A = M_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_0} = \begin{bmatrix} bZ_{10}{}^2 \\ -aZ_{10}{}^2 \\ aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_0}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_0} + \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

On remarque ici que :

$$L_{10} = -\frac{b}{a} M_{10} = -\tan\left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}\right) M_{10}$$

Les inconnues statiques ne sont **pas indépendantes**. On voit qu'une rotation est en cause.

Effectuons un changement de base du moment de 0 dans 1 :

$$\overrightarrow{x_0} = \cos\theta_{01}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{01}\,\overrightarrow{y_1} = \cos\theta_{10}\,\overrightarrow{x_1} - \sin\theta_{10}\,\overrightarrow{y_1} = \frac{1}{L_1}\begin{bmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\overrightarrow{y_0} = -\sin\theta_{01}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{01}\,\overrightarrow{y_1} = \sin\theta_{10}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{10}\,\overrightarrow{y_1} = \frac{1}{L_1}\begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{bmatrix} b{Z_{10}}^2 \\ -a{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_0} = \begin{bmatrix} \frac{a}{L_1} b{Z_{10}}^2 - \frac{b}{L_1} a{Z_{10}}^2 \\ -\frac{b}{L_1} b{Z_{10}}^2 - \frac{a}{L_1} a{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a^2+b^2}{L_1}{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

Remarque : pour exprimer le torseur équivalent dans la base 1, compte tenu des choix effectués de définir les torseurs des rotules dans la base 0 au départ, il faut aussi projeter les composantes de la résultante :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \frac{a}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{b}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & 0 \\ -\frac{b}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{a}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & -L_1{Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

Remarques :

- Ici, les composantes ne correspondent pas aux composantes du torseur posé au départ !!! $\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0}$. Mais ce n'est pas grave, on revient en arrière, on annule cette définition et on définit le torseur équivalent ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} \frac{a}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{b}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & 0 \\ -\frac{b}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{a}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & -L_1{Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

- On ne trouve pas le même moment que lors de la démarche classique, mais il ne faut pas oublier que l'on n'a pas défini les torseurs des liaisons n°1 et n°2 dans les mêmes bases, donc c'est normal.

Finalement, toutes les inconnues de ce torseur équivalent sont indépendantes, on a fini et on reconnaît la liaison désirée.

BREF : méthode à éviter, le choix de la base doit être bien fait au départ !!! Vous l'aurez compris…

A.VI.5 Bilan

	Liaisons en série	Liaisons en parallèle
Cinématique	$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{2}\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{n}\}$
Statique	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \cdots = \{\mathcal{T}_{1/1}\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\} + \cdots + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$

Attention au choix du point et de la base d'expression des torseurs. Une erreur dans ces choix induit une reconnaissance très difficile de la liaison recherchée.

	S	**P**
C	**+**	**=**
S	**=**	**+**