Choix de l'architecture des mécanismes

COURS

Programme - Compétences		
C11	RESOUDRE	Loi entrée sortie géométrique et cinématique · Fermeture géométrique ; · Fermeture cinématique.
C12	RESOUDRE	Actions mécaniques dans les liaisons, équations de mouvement · Théorème des actions réciproques ; · Hyperstatisme.
B219	RESOUDRE	Modèle cinématique d'un mécanisme · Liaison cinématiquement équivalente ; · Mobilité d'une chaîne ouverte ; · Hyperstatisme et mobilité d'une chaîne fermée.
B11 B12	MODELISER	Isolement d'un solide ou d'un système de solides · Approche mécanique ;
B217	MODELISER	· Modélisation cinématique des liaisons entre solides : - liaisons parfaites normalisées, - degré de liberté, - liaisons réelles.
B220	MODELISER	Modélisation des actions mécaniques · Modèle global (torseur d'action mécanique) ;
B221	MODELISER	· Principe fondamental de la statique.

A. Analyse des mécanismes

A.I. Objectif

La transmission de fortes puissances, la nécessité de fonctionnement à jeu nul, le contrôle de la répartition d'efforts, de pressions dans les contacts, la maîtrise de l'usure, des coincements, les conditions de montage et les contraintes induites, le tolérancement, sont autant de notions qui découlent de la maîtrise de l'architecture et de l'analyse des mécanismes.

L'analyse préliminaire des mécanismes doit permettre de choisir les liaisons d'un mécanisme dans une démarche de conception et dimensionnement d'un produit afin de répondre à un cahier des charges. Elle permet en particulier de prévoir si la détermination des inconnues statiques/dynamiques est possible à l'aide de résolutions usuelles et, dans le cas contraire, d'en localiser l'origine.

A.II. Hypothèses de ce chapitre

Dans ce chapitre :

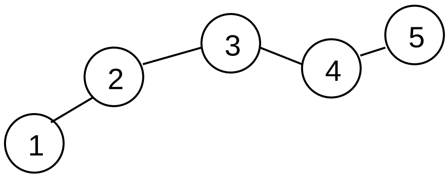
- Les pièces sont supposées indéformables
- Les liaisons son supposées à positionnements relatifs parfaits
- Les surfaces de contact sont parfaites
- Les liaisons sont supposées parfaites (sans frottement)
- Le jeu dans les liaisons est nul
- Les contacts sont maintenus dans les liaisons ponctuelle, appui plan et linéaire rectiligne

A.III. Structure des mécanismes

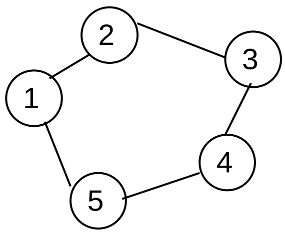
A.III.1 Graphe de structure

Le graphe de structure, ou graphe des liaisons, peut être de 3 types :

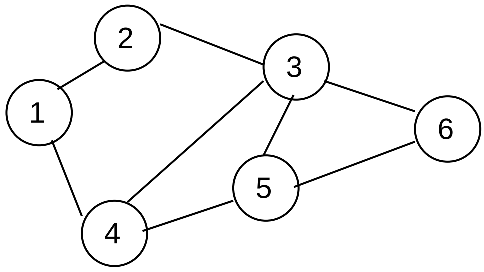
Chaîne ouverte :



Chaîne simple fermée à 1 cycle :



Chaîne complexe à γ cycles, γ>1 :



A.III.2 Nombre cyclomatique

Dans le cas de chaînes fermées, on définit γ, le nombre cyclomatique, représentant le nombre de cycles indépendants du mécanisme étudié.

Si γ est simplement calculé dans le cas de quelques cycles, il peut vite devenir difficile à appréhender.

La théorie des graphes montre que le nombre cyclomatique d'une chaîne fermée complexe est donné par la relation :

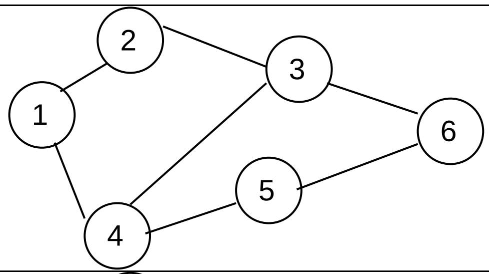
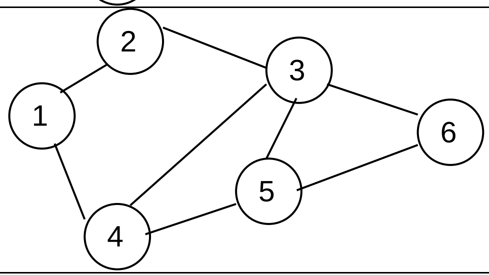
$$\gamma = L - p + 1$$

L *: nombre de liaisons*

p *: nombre de solides*

Le nombre cyclomatique correspond au nombre de fermetures de chaînes cinématiques nécessaires et suffisantes à l'étude cinématique complète d'un mécanisme.

Exemple :

1		$L = 7$ $P = 6$ $\gamma = 7 - 6 + 1 = 2$ 12341 et 34563
2		$L = 8$ $P = 6$ $\gamma = 8 - 6 + 1 = 3$

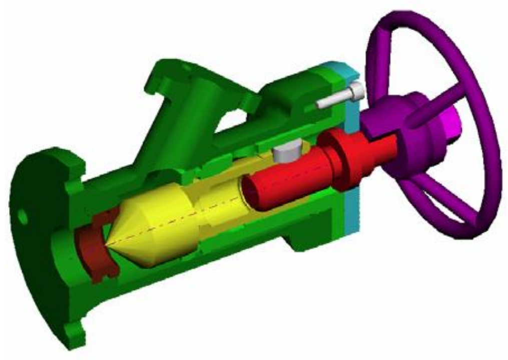
Remarque : Dans le cas n° 1 ci-dessus, on détaille 2 chaînes indépendantes 12341 et 34563. Il est parfaitement possible d'étudier une des solutions parmi les 3 suivantes :

12341 & 34563 – 12341 & 1236541 – 34563 & 1236541

A.IV. Rappels – Méthodes de résolution cinématique et statique

Le programme de 1° année a permis de mettre en place les méthodes de résolutions cinématique et statique des mécanismes. Ce paragraphe a pour seul de but de rappeler succinctement ces méthodes en vue de leur application.

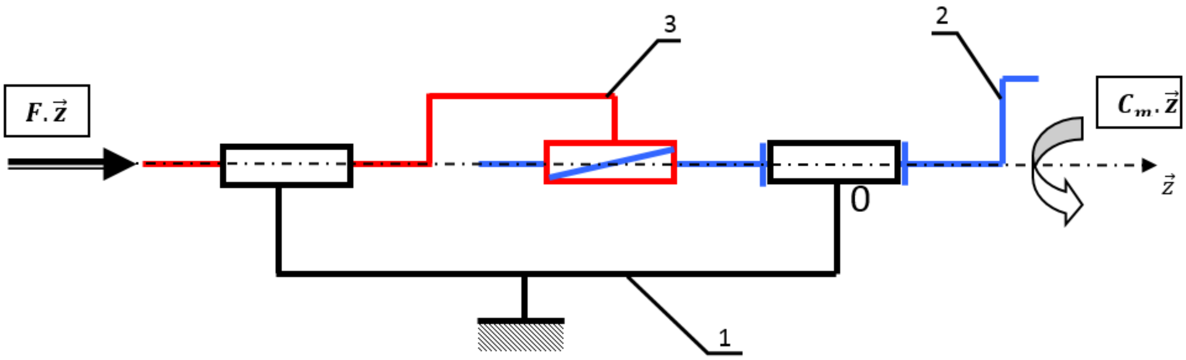
Partons du plan ou d'une vue 3D d'un mécanisme : Vanne de robinet



Le volant 2 entraîne la vis de commande (liaison complète) en rotation par rapport au corps 1(liaison pivot), la vis de commande entraîne par l'intermédiaire d'une liaison hélicoïdale le pointeau 3, le pointeau est en liaison glissière par rapport au corps.

A.IV.1 Mise en place du schéma cinématique

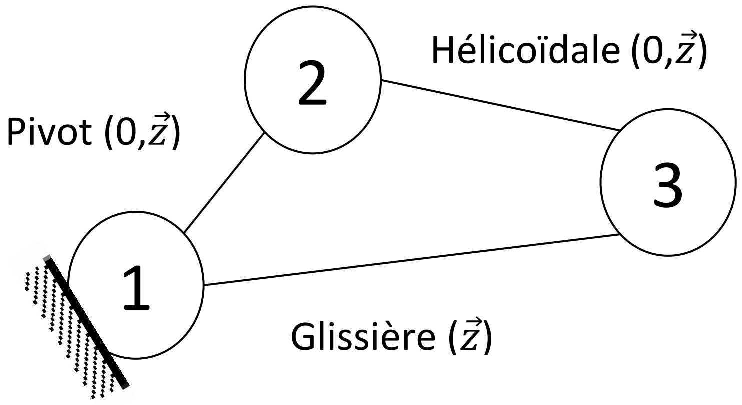
A partir de l'analyse de la géométrie des pièces, des classes d'équivalence et des surfaces en contact entre celles-ci, on met en place la modélisation cinématique minimale du système :



$$\mathfrak{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Rappel : schéma d'architecture et schéma cinématique minimal sont des schémas cinématiques. Le schéma d'architecture représente l'ensemble des liaisons en détail (pivot en réalité réalisée par 2 liaisons en parallèle Sphère cylindre + Appui plan… Le schéma cinématique minimal est le plus simple des schémas.

A.IV.2 Mise en place du graphe des liaisons



A.IV.3 Torseurs cinématiques et statiques des liaisons usuelles

Il est nécessaire de connaître les torseurs cinématiques et statiques des liaisons usuelles. Se référer aux deux documents remis pendant le cours.

A.IV.4 Résolution cinématique

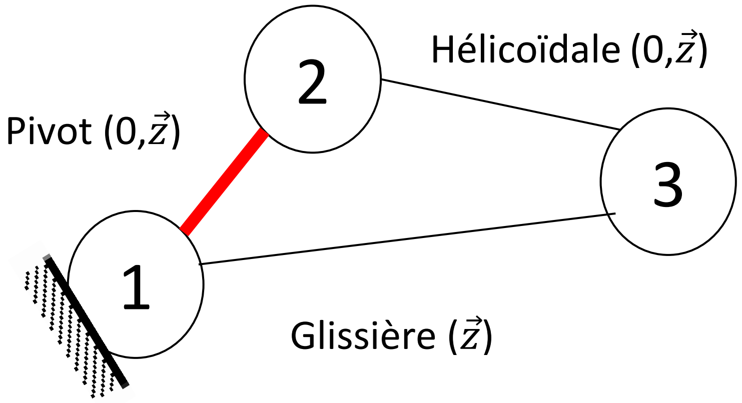
L'objectif de l'étude cinématique est de déterminer la vitesse de rotation du volant pour obtenir une vitesse donnée du coulisseau.

A.IV.4.a Rappel

- Poser le graphe des liaisons en y faisant apparaître la liaison d'entrée
- Exprimer les torseurs cinématiques des différentes liaisons en leurs points caractéristiques
- Déterminer le nombre cyclomatique du mécanisme et écrire les γ fermetures de chaîne cinématique indépendantes
- Pour chaque chaîne indépendante choisie
    - Choisir le point d'expression des différents torseurs cinématiques
    - Ecrire la fermeture de chaîne en sommant ses torseurs
    - En déduire deux équations vectorielles en résultante et moment
    - Choisir une base de projection de ces équations
    - Projeter afin d'obtenir un système de 6 équations
- Regrouper les différents systèmes d'équations
- Résoudre

A.IV.4.b Graphe des liaisons

Mettre en couleur la liaison correspondant à l'entrée connue.



A.IV.4.c Torseurs cinématiques des liaisons

Liaison	Torseur cinématique
L_{31} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_{3/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
L_{21} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O,\vec{z})$
L_{32} Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/2} & W_{3/2} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O,\vec{z})$ $W_{3/2} = \frac{pas}{2\pi} R_{3/2}$

A.IV.4.d Nombre cyclomatique et fermetures de chaînes

$$\gamma = L - p + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$$

Chaîne à étudier : 1231

A.IV.4.e Fermeture de chaîne

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/2} & W_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{pas}{2\pi} R_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} (R_{3/2} + R_{2/1})\vec{z} = \vec{0} \\ \left(W_{3/1} + \frac{pas}{2\pi} R_{3/2}\right)\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

Choix de la base de projection : $\mathfrak{B}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ W_{3/1} + \frac{pas}{2\pi} R_{3/2} = 0 \end{cases}$$

A.IV.4.f Bilan des équations cinématiques à résoudre

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$$

A.IV.4.g Résolution

Il faut résoudre le système en exprimant le plus d'inconnues cinématiques possible en fonction d'autres, en nombre le plus faible possible, correspondant alors au nombre de mobilités du mécanisme.

Dans un premier temps, on détermine les éventuelles inconnues cinématiques dont le calcul est immédiat, du type $P_{2/1} \cos \theta_{2/1} = 0$. On l'entoure en noire dans l'équation où elle a été déterminée puis en bleu dans les autres afin de mentionner qu'elle est connue. Dans l'exemple ci-dessus, il n'y en a pas.

Ensuite, il existe deux solutions :

- d'une manière générale, on choisit une inconnue cinématique, soit on a une donnée d'entrée liée à une mobilité, auquel cas on choisit celle-ci, soit on la choisit au hasard) et on l'entoure en rouge dans les équations où elle est présente. Une à une, on détermine les autres inconnues pouvant être déterminées en fonction de celle-ci en prenant soin d'entourer l'inconnue déterminée dans l'équation qui a servi à la déterminer en noir et on entoure ensuite cette inconnue dans toutes les autres équations en bleu pour signifier qu'elle est connue. S'il y a plusieurs mobilités, il faut recommencer cette démarche pour les autres inconnues permettant de mouvoir le système sur ces mobilités. A la fin, on doit arriver à une expression de toutes les inconnues cinématiques du problème en fonction des inconnues d'entrée (autant que de mobilités).

- Dans une démarche d'analyse des mécanismes, on peut ne pas faire cette démarche qui consiste à entourer les inconnues d'entrée. Dans ce cas, on cherche simplement à exprimer le plus d'inconnues cinématiques en fonction du moins possible des autres. Si le travail est bien fait, on sait alors qu'en imposant m inconnues cinématiques, on peut déterminer toutes les autres. Cela permet de déterminer la mobilité du système.

$\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}}+R_{2/1}=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}}+\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}}=0 \end{cases}$	$W_{3/1}=-\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$

$\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}}+\boldsymbol{R_{2/1}}=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}}+\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}}=0 \end{cases}$	$W_{3/1}=-\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$ $R_{2/1}=-\boldsymbol{R_{3/2}}$

Remarque : Dans le cas particulier où la mobilité du mécanisme étudié est nulle :

- Dans le cas de la première démarche, on trouvera finalement que l'inconnue choisie comme connue est nulle
- Dans le cas de la seconde démarche, on trouvera simplement que toutes les inconnues cinématiques du système sont nulles

A.IV.5 Résolution statique

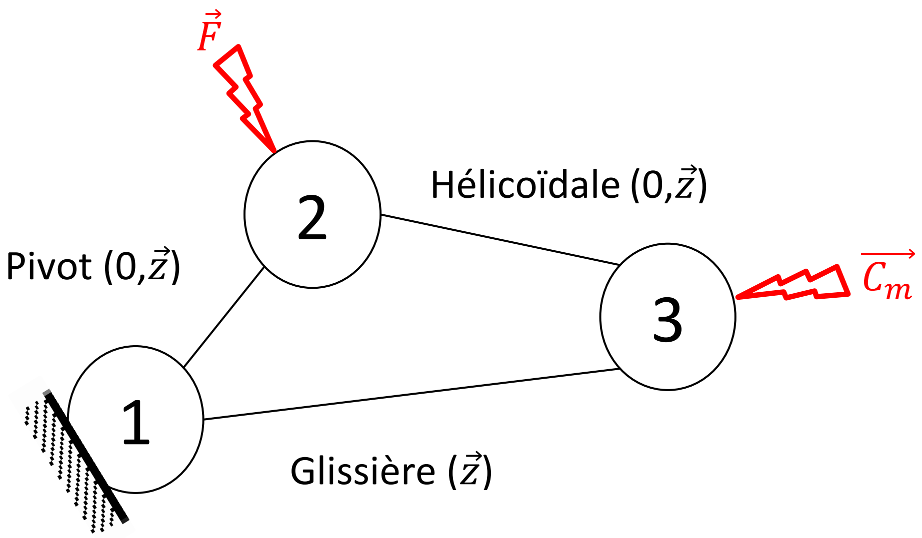
L'objectif de l'étude statique est de mettre en relation le couple moteur à imposer sur le volant connaissant l'effort sur le coulisseau afin qu'ils soient équilibrés. En parallèle, on souhaite déterminer les actions dans toutes les liaisons.

A.IV.5.a Rappel

- Poser le graphe des liaisons en y faisant apparaître les actions extérieures
- Exprimer les torseurs statiques des différentes liaisons en leurs points caractéristiques
- Exprimer les torseurs des actions extérieures
- Isoler chaque solide sauf le bâti (Rq : des isolements de plusieurs solides biens choisis peuvent convenir)
    - Choisir le point d'expression des différents torseurs des actions s'exerçant sur lui
    - Sommer ces torseurs et appliquer le PFS
    - En déduire deux équations vectorielles en résultante et moment
    - Choisir une base de projection de ces équations
    - Projeter afin d'obtenir un système de 6 équations
- Regrouper les différents systèmes d'équations
- Résoudre

A.IV.5.b Graphe des liaisons

Faire apparaître les actions extérieures.



A.IV.5.c Torseurs statiques des liaisons

Liaison	Torseur statique
L_{31} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{T}_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{3/1} & L_{3/1} \\ Y_{3/1} & M_{3/1} \\ 0 & N_{3/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
L_{21} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ X_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$
L_{32} Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} X_{3/2} & L_{3/2} \\ Y_{3/2} & M_{3/2} \\ Z_{3/2} & N_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$ $N_{3/2} = -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2}$

A.IV.5.d Actions mécaniques extérieures

Couple moteur sur volant $\overrightarrow{C_m}$	$\{\mathcal{T}_{m\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P$
Effort résistant sur le pointeau $\vec{F}$	$\{\mathcal{T}_{effort\to 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $\forall P \in (O, \vec{z})$

A.IV.5.e Application du principe fondamental de la statique à chaque solide

Pour chaque pièce isolée i sauf le bâti: $\sum\{\mathcal{T}_{ext\to i}\} = \{0\}$

Chaque torseur devant être exprimé au même point.

Pièce	PFS
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} + \{\mathcal{T}_{m\to 2}\} = \{0\}$ $\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} X_{3/2} & L_{3/2} \\ Y_{3/2} & M_{3/2} \\ Z_{3/2} & -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}}$ $\begin{cases} (X_{1/2} + X_{3/2})\vec{x} + (Y_{1/2} + Y_{3/2})\vec{y} + (Z_{1/2} + Z_{3/2})\vec{z} = \vec{0} \\ (L_{1/2} + L_{3/2})\vec{x} + (M_{1/2} + M_{3/2})\vec{y} + \left(-\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + C_m\right)\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$

	Choix de la base de projection : $\mathfrak{B}$ $\begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=0 \\ Z_{1/2}+Z_{3/2}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+C_m=0 \end{cases}$
3	$\{\mathcal{T}_{2/3}\}+\{\mathcal{T}_{1/3}\}+\{\mathcal{T}_{effort\to 3}\}=\{0\}$ $\begin{Bmatrix} X_{2/3} & L_{2/3} \\ Y_{2/3} & M_{2/3} \\ Z_{2/3} & \dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} X_{1/3} & L_{1/3} \\ Y_{1/3} & M_{1/3} \\ 0 & N_{1/3} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$ $\begin{cases} (X_{2/3}+X_{1/3})\vec{x}+(Y_{2/3}+Y_{1/3})\vec{y}+(Z_{2/3}+F)\vec{z}=\vec{0} \\ (L_{2/3}+L_{1/3})\vec{x}+(M_{2/3}+M_{1/3})\vec{y}+\left(\dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+N_{1/3}\right)\vec{z}=\vec{0} \end{cases}$ $\begin{cases} X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ Z_{2/3}+F=0 \\ L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{2/3}+M_{1/3}=0 \\ \dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+N_{1/3}=0 \end{cases}$

A.IV.5.f Bilan des équations statiques à résoudre

$\begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=0 \\ Z_{1/2}+Z_{3/2}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+C_m=0 \end{cases}$	$\begin{cases} X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ Z_{2/3}+F=0 \\ L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{2/3}+M_{1/3}=0 \\ \dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+N_{1/3}=0 \end{cases}$

A.IV.5.g Résolution

Si des actions extérieures sont présentes, on les entoure en rouge dans les équations. Attention, les actions extérieures ne sont pas des inconnues de liaison ! Il faut les supposer connues. La résolution permettra de mettre une relation entre elles. Il se peut qu'aucune action extérieure ne soit présente, auquel cas on devra trouver que toutes les inconnues statiques calculables sont nulle.

Une à une, on détermine une des inconnues statiques, on l'entoure en noir dans l'équation qui a permis de la déterminer (soit en fonction des données extérieures, soit nulle si pas d'actions extérieures), puis en bleu dans toutes les autres équations afin de signifier qu'elle est connue.

En général, la présence d'actions extérieures permet de guider la résolution. Dans ce cas, on part de ces équations pour mener la résolution.

<table>
<tr>
<td colspan="2">$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + \boldsymbol{Z_{3/2}} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$Z_{3/2} = \boldsymbol{F}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{1/2}} + \boldsymbol{Z_{3/2}} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{N_{1/3}} = 0 \end{cases}$$</td>
<td>$$\begin{gathered} Z_{3/2} = \boldsymbol{F} \\ N_{1/3} = -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{F} \\ Z_{1/2} = -\boldsymbol{F} \\ -\frac{pas}{2\pi} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{gathered}$$</td>
</tr>
</table>

A.IV.6 Remarques

Lors de la résolution cinématique, le choix des points, des bases de projection et des fermetures de chaînes influence la forme du système cinématique.

Lors de la résolution statique, le choix des points, des bases de projection et éventuellement des isolements (plusieurs solides en même temps) influence la forme du système statique.

Quels que soient ces choix, les résultats de la résolution des systèmes de de l'analyse des mécanismes ne peuvent être différents.

A.V. Analyse des mécanismes

Attention, pour mener à bien l'analyse des mécanismes, il convient de ne pas regrouper des inconnues cinématiques de liaisons, par exemple : $R_{4/3} + R_{3/0}$ ne doit pas être réduit à $R_{4/0}$.

A.V.1 Notations

A.V.1.a Inconnues

Soit $i_c(i)$ le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la liaison i.

Soit $i_s(i)$ le nombre d'inconnues statiques indépendantes de la liaison i.

On a : $i_c(i) + i_s(i) = 6$

Pour un mécanisme composé de L liaisons :

- On note I_c le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du mécanisme

$$I_c = \sum_{i=1}^{L} i_c(i)$$

- On note I_s le nombre d'inconnues statiques indépendantes du mécanisme.

$$I_s = \sum_{i=1}^{L} i_s(i)$$

On a :

$$I_c + I_s = 6L$$

A.V.1.b Equations

Pour un mécanisme composé de p pièces (bâti compris) et L liaisons :

- On note E_c le nombre d'équations issues de la résolution cinématique du mécanisme permettant d'écrire le système cinématique à résoudre.

$$E_c = 6\gamma = 6(\mathrm{L} - \mathrm{p} + 1)$$

- On note E_s le nombre d'équations issues de la résolution statique (dynamique) du mécanisme permettant d'écrire le système statique à résoudre.

$$E_s = 6(\mathrm{p} - 1)$$

Remarque : dans certains cours, on trouve les formules $\begin{cases} E_c = 6(\mathrm{L} - \mathrm{p}) \\ E_s = 6p \end{cases}$ qui attention, comprennent un nombre p de pièces bâti exclu !!!

A.V.2 Définitions

A.V.2.a Equations liées

Dans la suite, nous dirons d'une équation qu'elle est liée si, dans un système d'équations, elle est obtenue par combinaison linéaire des autres équations. On peut aussi parler d'équation dépendante. Une équation liée, au même titre qu'une équation $0 = 0$, traduit la diminution du rang d'un système linéaire.

Rappel : le rang d'un système linéaire est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

A.V.2.b Degré d'hyperstatisme

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme, noté h est

- le nombre d'équations inutiles (équation $0 = 0$ ou équation dont les inconnues ont toutes été déterminées) lors de la résolution du système cinématique. Il correspond à la différence entre le nombre d'équations cinématiques E_c et le rang r_c du système cinématique.

$$h = E_c - r_c$$

- le nombre d'inconnues statiques à fixer afin de déterminer toutes les inconnues statiques du système statique. Il correspond à la différence entre le nombre d'inconnues statiques I_s et le rang r_s du système statique.

$$h = I_s - r_s$$

Si $h = 0$, le mécanisme est isostatique, toutes les inconnues statiques de liaison peuvent être calculées.

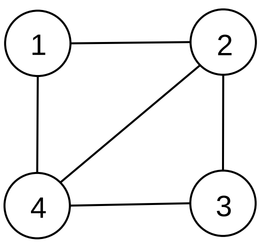
Si $h \geq 1$, le mécanisme est hyperstatique, des inconnues de liaison ne peuvent être déterminées.

Remarque : si l'on trouve h<0, généralement, soit :

- il y a une erreur dans l'application des formules
- une mobilité (interne ?) a été oubliée

Dans le cas de mécanismes à γ chaînes cinématiques indépendantes de degré d'hyperstatisme h, on choisit γ chaînes indépendantes. Soit h_i le degré d'hyperstatisme de la chaîne indépendante i parmi celles choisies, alors : $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$

Remarque : il n'y a pas γ chaines cinématiques indépendantes uniques, et ce calcul dépend donc des chaînes choisies :



Choix 1	1241 & 2342
Choix 2	1241 & 12341
Choix 3	2342 & 12341

Toutefois, la formule reste vraie quels que soient les choix.

Tout degré d'hyperstatisme d'une chaîne cinématique d'un mécanisme est un degré d'hyperstatisme du mécanisme complet.

Il existe des degrés d'hyperstatisme qui sont issus de l'assemblage de plusieurs chaînes cinématiques, alors que chacune d'elles peut être isostatique (cf DM).

A.V.2.c Notion de Mobilité

A.V.2.c.i Mobilité

La mobilité d'un mécanisme, notée m, est

- le nombre d'inconnues cinématiques à fixer afin de déterminer toutes les inconnues cinématiques du système cinématique. Il correspond au nombre d'inconnues cinématiques minimal qu'il est nécessaire de fixer afin que le mécanisme soit entièrement immobile. C'est la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques I_c et le rang r_c du système linéaire cinématique.

$$m = I_c - r_c$$

- le nombre d'équations inutiles (équation $0 = 0$ ou équation dont les inconnues ont toutes été déterminées) lors de la résolution du système statique. Il correspond à la différence entre le nombre d'équations statiques E_s et le rang r_s du système inéaire statique

$$m = E_S - r_s$$

Un système est immobile lorsque $m = 0$.

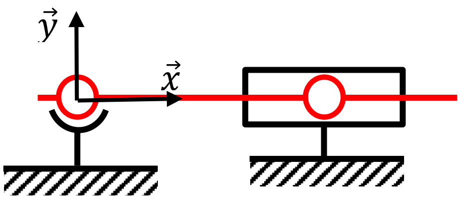
Un système est mobile de mobilité m lorsque $m > 0$.

Pour trouver les mobilités « à la main », l'idéal consiste à imaginer bloquer un premier mouvement, ce qui porte la mobilité à 1, puis de voir si d'autres pièces peuvent bouger. Si oui, on imagine bloquer un nouveau mouvement, m = m + 1, et ainsi de suite jusqu'à ce que plus rien ne puisse bouger. On a alors la mobilité du mécanisme. Attention, on parle bien de blocage de mouvement, et non de liaison. En effet, dans une liaison il peut y avoir plusieurs mouvements possibles et seul un à bloquer.

On définit deux types de mobilités rencontrées dans les mécanismes, la mobilité utile m_u et la mobilité interne m_i telles que :

$$m = m_u + m_i$$

Remarque : parfois, on peut discuter du caractère interne ou utile d'une mobilité. Ce qui compte, c'est de toutes les compter. Exemple :



La pièce peut tourner sur elle-même, on pourrait dire de la mobilité qu'elle est interne. En réalité, cela dépend de ce que réalise cette pièce comme fonction, en tournant.

A.V.2.c.ii Mobilité utile

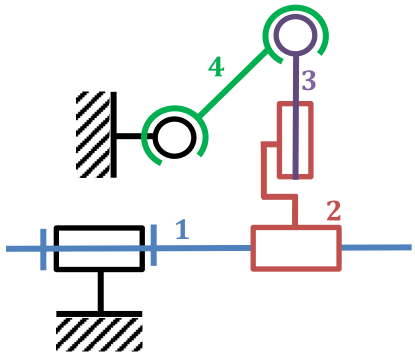
La mobilité utile, notée m_u, est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques d'entrée et ceux de sortie. Cela correspond aux mouvements souhaités du mécanisme entre l'entrée et la sortie. Généralement, ces mobilités sont les seules vues car elles correspondent à la fonction du mécanisme.

A.V.2.c.iii Mobilité interne

La mobilité interne, notée m_i, est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques des pièces internes du mécanisme. Cela correspond à des mouvements de pièces seules ou de plusieurs pièces entre elles, possible malgré le blocage des entrées correspondant aux mobilités utiles.

A.V.2.c.iv Exemple

Soit l'entrée du système via la pièce bleue en liaison pivot par rapport au bâti.



$m_u = 1$

$m_i = 3$

$m = 4$

On peut voir 4 mobilités :

- (1) Mouvement liant entrée et sortie : rotation de la pièce 1 induisant un mouvement particulier de translation du piston 3 dans la pièce 2, toute autre mobilité étant bloquée
- (2) Rotation sur elle-même de la bielle 4
- (3) Rotation sur lui-même du piston 3
- (4) Mouvement de plusieurs pièces entre elles : Translation de 2 sur 1 induisant un mouvement de 3 et 4, toute autre mobilité étant bloquée

Les rotations (2) et (3) sont très clairement des mobilités internes.

Le mouvement (1) est clairement la mobilité utile, faut-il que soit précisé dans l'étude que la pièce 1 impose le mouvement souhaité

Le mouvement (4) est à priori vu comme une mobilité interne. Elle peut être issue d'un oubli lors de la modélisation, par exemple un arrêt en translation de 2 horizontalement. Toutefois, s'il était précisé qu'un réglage de la position de la pièce 2 permet une modification de la loi de mouvement entrée/sortie, cette mobilité pourrait être vue comme une mobilité utile (secondaire).

A.V.2.c.v Remarques importante

A mois d'être capable de déterminer les rangs des systèmes d'équations qui sont mis en place, par la méthode mathématique sur nos systèmes relativement complexes, seule la bonne estimation personnelle des mobilités m (ou de l'hyperstatisme h) permet de mener une étude correcte des mécanismes en en déduisant le rang et donc l'autre valeur recherchée (h ou m).

Dans certains cas, la mobilité n'est pas déterminable par lecture visuelle du schéma cinématique. Il n'y a alors pas d'autre solution que le calcul du rang du système, soit cinématique, soit statique. Le système cinématique présentant moins d'équations, il est plus aisé de l'utiliser.

Généralement, les mobilités internes de pièces seules sont oubliées. Des mobilités internes liant plusieurs pièces sont très difficiles à voir et résultent généralement d'une modélisation erronée.

A.V.2.d Formules d'analyse

A.V.2.d.i Méthode cinématique

Reprenons la formule de l'hyperstatisme : $h = E_c - r_c$

Sachant que : $E_c = 6\gamma$ et $m = I_c - r_c$

$$h = m + E_c - I_c$$

Remarque : Si on sait estimer m ou h, on a l'autre grandeur sans devoir déterminer le rang r_c en utilisant I_c et E_c

A.V.2.d.ii Méthode statique

Reprenons la formule de l'hyperstatisme : $h = I_s - r_s$

Sachant que : $m = E_s - r_s$ et $E_s = 6(p - 1)$

$$h = m + I_s - E_s$$

Remarque : Si on sait estimer m ou h, on a l'autre grandeur sans devoir déterminer le rang r_s en utilisant I_s et E_s

A.V.2.d.iii Bilan

Cinématique	Statique
$E_c = 6\gamma$	$E_s = 6(p-1)$
$m = I_c - r_c$	$m = E_S - r_S$
$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
$h = m + E_c - I_c$	$h = m + I_s - E_s$

A.V.2.d.iv Remarques

• **Remarque 1 : Moyen mnémotechnique**

On peut remarquer l'analogie entre les formules en statique et cinématique. Il faut échanger I et E selon la méthode choisie. Il existe un moyen mnémotechnique simple permettant de se souvenir de la formule statique, puis d'en déduire la formule cinématique. En effet, plus il y a d'inconnues statiques, plus risque d'augmenter le degré d'hyperstatisme du système (trop d'inconnues statiques).

On retient donc la formule :

$$\boldsymbol{h} = m + I_s - E_s$$

On en déduit la formule cinématique en échangeant les s en c et I et E.

$$h = m + E_c - I_c$$

• **Remarque 2 : r_c et r_s différents à priori**

Attention, r_c et r_s n'ont pas de raisons d'être égaux, bien qu'ils puissent l'être

• **Remarque 3 : formules avec valeurs absolues (à éviter)**

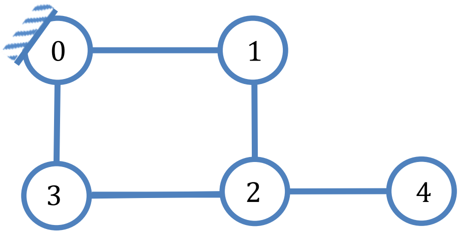
$E_c = h - r_c$	$E_s = m + r_s$
$I_c = m - r_c$	$I_s = h + r_s$
$I_c - E_c = m - h$	$I_s - E_s = h - m$

On a donc :

$$|I_c - E_c| = |I_s - E_s| = |m - h|$$

• Remarque 4 : chaines ouvertes

Soit le mécanisme représenté par le graphe des liaisons suivant :



Soient les variables sans primes ' les variables associées à la chaîne fermée 01230

Soient les variables avec prime ' les variables associées à l'isolement de la chaîne fermée 01230 à laquelle on ajoute la pièce 4 par exemple

Point de vue cinématique	Point de vue statique
A chaque pièce de la partie en chaîne ouverte ajoutée dans l'étude : - Il n'y a pas de nouvelle chaîne fermée $E_c' = E_c$ - on ajoute α (1 à 6) mobilités correspondant à autant d'inconnues cinématiques à imposer : $\begin{cases} m' = m + \alpha \\ I_c' = I_c + \alpha \end{cases}$ $h = m + E_c - I_c$ $h' = m' + I_c' - E_c'$ $h' = (m + \alpha) + E_c - (I_c + \alpha) = h$	A chaque pièce de la partie en chaîne ouverte ajoutée dans l'étude : - on ajoute 6 équations : $E_s' = E_s + 6$ - on ajoute α (1 à 6) mobilités : $m' = m + \alpha$ - on ajoute β $(\beta = 6 - \alpha)$ inconnues statiques : $I_s' = I_s + \beta = I_s + 6 - \alpha$ $h = m + I_s - E_s$ $h' = m' + I_s' - E_s'$ $h' = (m + \alpha) + (I_s + 6 - \alpha) - (E_s + 6) = h$

La démarche serait la même à chaque ajout d'une nouvelle pièce en chaîne ouverte

Conclusions :

- Toute chaîne ouverte est isostatique (démonstration similaire en enlevant la chaîne fermée initiale 01230
- S'il existe une portion de chaîne ouverte en plus d'une ou plusieurs chaînes fermées dans un système, l'étude de l'hyperstatisme de celui-ci peut n'être menée que sur la ou les chaînes fermées, sans prendre en compte la partie en chaîne ouverte.

• Remarque 5 : Ordre de grandeur

$h = E_c - r_c$ $h = I_s - r_s$	$m = I_c - r_c$ $m = E_S - r_s$
$h \leq E_c$ $h \leq I_s$	$m \leq I_c$ $m \leq E_S$

Si on trouve h=7 pour un mécanisme à 1 chaîne cinématique, il y a un problème. On a effectivement

$$h \leq 6\gamma$$

A.V.3 Analyse des mécanismes

Reprenons l'exemple de la vanne traité précédemment :

A.V.3.a Analyse cinématique

A.V.3.a.i Interprétation du système cinématique

$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}} + \boldsymbol{R_{2/1}} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$	$W_{3/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$ $R_{2/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}$

• **Analyse des mobilités**

- Dans le cas présent, il a suffi d'imposer 1 inconnue cinématique pour exprimer toutes les autres en fonction de celle-ci. La mobilité est donc de 1.
- Si une équation met en relation **deux** inconnues cinématiques indéterminées n'intervenant pas dans d'autres équations, plus éventuellement d'autres inconnues déterminées par les autres équations, on met alors en évidence une mobilité interne de la pièce concernée selon le mouvement de l'équation correspondante.
  Exemple de la pièce 1 en double rotule avec le bâti : $\boldsymbol{P_{1/0}}^{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{P_{0/1}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$
- Si une équation traduit des relations entre inconnues cinématiques internes et indéterminées, on met en évidence une mobilité interne mettant en jeu plusieurs pièces. Cette situation est très rare, et provient en général d'une mauvaise modélisation du mécanisme étudié.

Remarque : Dans le cas d'un mécanisme à une seule pièce, la mobilité interne éventuelle peut être vue comme une mobilité utile, tout dépend du point de vue.

• **Analyse de l'hyperstatisme**

En cinématique, les degrés d'hyperstatisme sont des équations qui ne servent pas à déterminer d'inconnues.

- 4 équations $0 = 0$ traduisent 4 degrés d'hyperstatisme du mécanisme. Il convient d'identifier les équations concernées :
  - Rotation suivant $\vec{x}$
  - Rotation suivant $\vec{y}$
  - Translation suivant $\vec{x}$
  - Translation suivant $\vec{y}$
- Si une équation dont toutes les inconnues sont rouges et/ou bleues est présente, elle traduit un degré d'hyperstatisme.

Remarque : selon le choix de la base de projection des équations de la fermeture de chaîne, on fera apparaitre des équations $0 = 0$ ou liées. Le rang du système sera plus facilement appréhendé en présence d'équations $0 = 0$. Il conviendra donc de bien choisir la base de projection.

A.V.3.a.ii Formule d'analyse cinématique

L	3
p	3
γ	1
I_c	1+1+1=3
E_c	$6\gamma = 6$
m	1
h	$h = m + E_c - I_c$ $h = 1 + 6 - 3 = 4$

Doit être estimé

A.V.3.a.iii Méthode matricielle

En réalité, l'analyse sur les équations cinématiques que nous avons menée correspond à l'étude d'un système linéaire. Dans notre exemple, on a :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ W_{3/1} + \dfrac{pas}{2\pi} R_{3/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2/1} \\ R_{3/2} \\ W_{3/1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang du système cinématique r_c est le rang de la matrice $K_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix}$

$$r_c = \mathrm{rg}(K_c) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi, quel que soit le système étudié, si l'on ne trouve intuitivement ni h, ni m, il est possible d'étudier la matrice K_c afin de trouver r_c, ce qui donnera :

$$\begin{cases} h = E_c - r_c = 6 - 2 = 4 \\ m = I_c - r_c = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Il est très certainement plus intéressant de savoir estime h ou m « à la main » pour nos applications.

Remarque : On verra que l'étude de la matrice cinématique est plus simple que celle de la matrice statique qui contient plus d'équations.

A.V.3.b Analyse statique

A.V.3.b.i Interprétation du système statique

$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{1/2}} + \boldsymbol{Z_{3/2}} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{Z_{3/2}} + \boldsymbol{N_{1/3}} = 0 \end{cases}$	$Z_{3/2} = \boldsymbol{F}$ $N_{1/3} = -\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{F}$ $Z_{1/2} = -\boldsymbol{F}$ $-\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C_m} = 0$

• **Analyse des mobilités**

En statique, les mobilités sont des équations qui ne servent pas à déterminer d'inconnues.

- Une équation dont toutes les inconnues sont rouges et/ou bleues traduit une mobilité.
  - Si elle permet de mettre en relation les actions extérieures, elle traduit une mobilité utile.

$$-\frac{pas}{2\pi}F + C_m = 0$$

  - Si elle ne permet pas de mettre en relation les actions extérieures, on trouvera alors que chaque inconnue intervenant dans l'équation est nulle. Elle traduit une mobilité interne :
    - d'une pièce si toutes les inconnues de l'équation sont annulées par le seul isolement de cette pièce. Selon la base de projection, on aurait pu faire apparaître une équation $0 = 0$.
    - d'un ensemble de pièces si la nullité des inconnues de l'équation provient de l'isolement de plusieurs pièces.
- Si une équation $0 = 0$ apparaît, elle traduit une mobilité interne d'une pièce selon le mouvement de l'équation correspondante.

Remarque : selon le choix de la base de projection des équations du PFS, on fera apparaitre des équations $0 = 0$ ou non. Le rang du système sera plus facilement appréhendé en présence d'équations $0 = 0$. Il conviendra donc de bien choisir la base de projection.

• **Analyse de l'hyperstatisme**

- Il reste une (des) inconnue(s) non déterminées : le système est dit hyperstatique. En posant une des 3 inconnues sur X, Y, L et M, toutes les autres seront déterminées. L'hyperstatisme est dit d'ordre 4.

$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \end{cases}$$

Il convient d'identifier les inconnues concernées :

- X : Résultante suivant $\vec{x}$
- Y : Résultante suivant $\vec{y}$
- L : Moment suivant $\vec{x}$
- M : Moment suivant $\vec{y}$

A.V.3.b.ii Formule d'analyse statique

I_s	5+5+5=15
E_s	6(3-1)=12
m	1
h	$h = m + I_s - E_s$ $h = 1 + 15 - 12 = 4$

Doit être estimé

A.V.3.b.iii Méthode matricielle

De même que pour l'analyse cinématique, l'analyse sur les équations statiques que nous avons menée correspond à l'étude d'un système linéaire. Dans notre exemple, on a :

$$\begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=0 \\ Z_{1/2}+Z_{3/2}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+\boldsymbol{C_m}=0 \end{cases} \begin{cases} X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ Z_{2/3}+\boldsymbol{F}=0 \\ L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{2/3}+M_{1/3}=0 \\ \dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+N_{1/3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=0 \\ Z_{1/2}+Z_{3/2}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}=-\boldsymbol{C_m} \end{cases} \begin{cases} X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ Z_{2/3}=-\boldsymbol{F} \\ L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{2/3}+M_{1/3}=0 \\ \dfrac{pas}{2\pi}Z_{3/2}+N_{1/3}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1/2} \\ X_{3/2} \\ X_{1/3} \\ Y_{1/2} \\ Y_{3/2} \\ Y_{1/3} \\ Z_{1/2} \\ Z_{3/2} \\ L_{1/2} \\ L_{3/2} \\ L_{1/3} \\ M_{1/2} \\ M_{3/2} \\ M_{1/3} \\ N_{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{C_m} \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang du système statique r_s est le rang de la matrice K_s

$$K_s = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Chaque colonne contenant 1 et -1 est une combinaison linéaire des colonnes ayant un 1 à la hauteur du 1 et un 1 à la hauteur du -1, on peut donc les supprimer :

$$r_s = \mathrm{rg}(K_s) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

On réorganise les colonnes afin d'améliorer la lisibilité de la matrice :

$$r_s = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Ce n'est pas nécessaire, mais on peut supprimer les lignes combinaisons linéaires d'autres lignes :

$$r_s = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a 11 lignes linéairement indépendantes et 11 colonnes linéairement indépendantes, donc :

$$r_s = 11$$

Ainsi, quel que soit le système étudié, si l'on ne trouve intuitivement ni h, ni m, il est possible d'étudier la matrice K_s afin de trouver r_s, ce qui donnera :

$$\begin{cases} h = I_s - r_s = 15 - 11 = 4 \\ m = E_s - r_s = 12 - 11 = 1 \end{cases}$$

Il est très certainement plus intéressant de savoir estime h ou m « à la main » pour nos applications.

Remarque :

> Il vaut mieux étudier la matrice du système cinématique K_c, de taille plus faible que la matrice du système statique K_s

A.V.3.c Hyperstatisme d'un système

A.V.3.c.i Equations liées – Inconnues en surnombre

Un degré d'hyperstatisme est toujours lié à un axe en résultante ou en moment.

Une mobilité interne d'une pièce est toujours liée à un axe en résultante ou en moment.

Une mobilité interne de plusieurs pièces ou utile n'est pas directement liée à un axe.

		Cinématique	Statique
Eq	0=0	$h = h + 1$ sur l'axe concerné	$m = m + 1$ m_i sur l'axe concerné
	Liées	$h = h + 1$ changement de base pour conclure	$m = m + 1$ Si m_i d'une pièce : changement de base pour conclure
Inc	Inconnue à fixer	$m = m + 1$	$h = h + 1$ sur l'axe de l'inconnue concernée

pour conclure = pour dire quel axe est concerné

En résumé :

		Cinématique	Statique
Eq	0=0 Liées	$h = h + 1$	$m = m + 1$
Inc	Inconnue à fixer	$m = m + 1$	$h = h + 1$

A.V.3.c.ii Application

Que ce soit par l'étude cinématique ou statique, on met en évidence 4 degrés d'hyperstatisme sur les équations :

- Résultante (statique) ou vitesse (cinématique) suivant $\vec{x}$
- Résultante (statique) ou vitesse (cinématique) suivant $\vec{y}$
- Moment (statique) ou rotation (cinématique) suivant $\vec{x}$
- Moment (statique) ou rotation (cinématique) suivant $\vec{y}$

Les équations de cinématique $0 = 0$ traduisent l'absence de mouvement répétée sur la direction concernée. Le mouvement est donc bloqué plusieurs fois. Ces équations traduisent une condition géométrique drastique

- de position pour les équations en vitesse ou efforts
- d'orientation pour les équations en rotation ou moments

Un défaut de position des liaisons de la chaîne ou des surfaces en contact au niveau de ces liaisons suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraîne un montage impossible si les pièces ne sont pas déformables.

Un défaut d'orientation des liaisons de la chaîne ou des surfaces en contact au niveau de ces liaisons autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraîne un montage impossible si les pièces ne sont pas déformables.

Les équations statiques présentant des inconnues indéterminées montrent que ces efforts sont en surnombre pour être calculables.

A.V.3.c.iii Estimation du degré d'hyperstatisme « à la main »

La méthode « à la main » consiste à imaginer, une par une, 6 déformations (3 en position, 3 en orientation) des pièces ou liaisons pour chaque.

Pour chaque chaîne (et non uniquement pour les chaînes indépendantes):

- effacer entièrement les liaisons des autres chaînes
- imaginer une déformation d'une pièce ou liaison selon,
    - une translation dans une direction de l'espace
    - une rotation autour d'un axe de l'espace en supposant que le système est isostatique pour chacune des 3 translations dans l'espace (point illustré dans les remarques)

  tout le reste de la chaîne étant supposé parfait et indéformable
- déterminer si le mécanisme est toujours montable sans déformer de pièces ou liaisons
    - Oui : Cette déformation ne correspond pas à un degré d'hyperstatisme
    - Non : Cette déformation correspond à un degré d'hyperstatisme suivant la direction étudiée

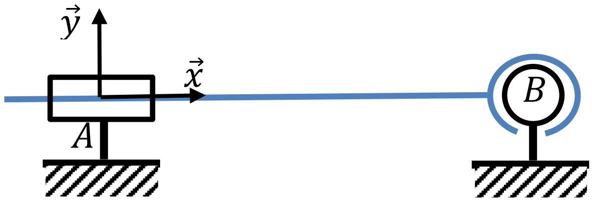
Remarques :

- Attention, dans certains cas, deux mouvements liés peuvent être responsables d'un seul degré d'hyperstatisme. Alors, par l'analyse « à la main », on peut croire que h=2 au lieu d'1, par exemple :

Le maintien de l'appui plan est lié à une translation suivant sa normale. Déplacer suivant $\vec{x}$ ou $\vec{y}$ l'une des pièces a en réalité le même effet de déplacement relatif suivant la normale des deux plans. Il faut retenir que lorsqu'il y a des contacts faisant intervenir des normales (appui plan, ponctuelle, linéaire rectiligne), il faut pouvoir aligner ces normales, puis pouvoir déplacer les deux solides dans la direction commune de ces normales afin d'assurer le contact

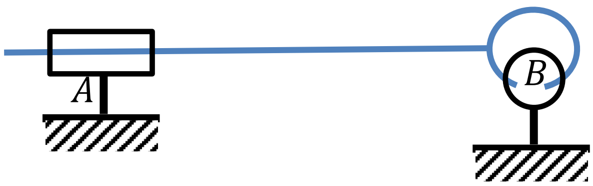
- Comme $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$, on peut passer à côté de degrés d'hyperstatisme du mécanisme complet si l'on ne regarde que des chaînes indépendantes. Par contre, on sait que l'hyperstatisme de chaque chaîne sera un degré d'hyperstatisme du mécanisme complet.
- Cas des rotations : lorsque l'on impose une déformation autour d'un axe afin de déterminer si celle-ci supporte un degré d'hyperstatisme, on imagine une rotation d'une pièce ou liaison. Attention, il est important dans ce cas d'imaginer que la chaîne étudiée ne présente pas de degrés d'hyperstatisme en translation. En effet, imposer une rotation en un lieu du mécanisme engendre forcément un mouvement des points qui ne sont pas sur l'axe de la rotation imaginée. Si le mécanisme est hyperstatique dans l'axe de la translation engendrée, nous serions amenés à avoir envie de dire que du fait de la rotation imposée, le mécanisme n'est plus montable car le point qui s'est translaté ne permet plus le montage, alors que ce n'est pas lié à l'orientation imposée par la rotation.

  Illustration :



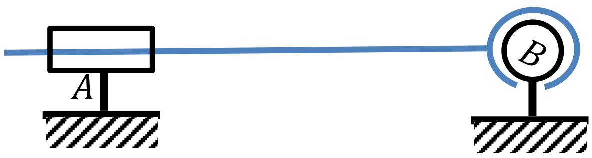
En imaginant les translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ que ce soit en A ou en B, pour une des 2 liaisons par exemple, on voit que ce mécanisme est hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Exemple :



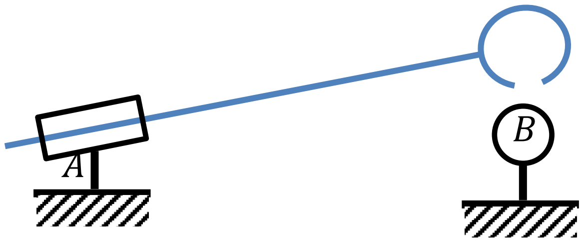
Si on imagine une quelconque rotation sur une des 3 directions en B, on voit que le mécanisme n'est pas hyperstatique en rotation.

Exemple :



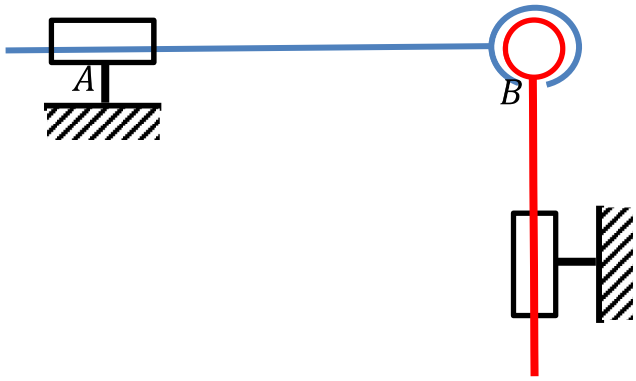
MAIS, si on imagine une rotation par exemple autour de $\vec{z}$ de la liaison en A, voilà à quoi on arrive :

Exemple :

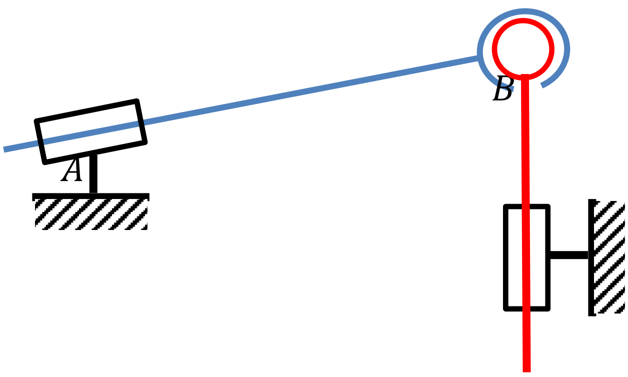


On est tenté de dire que du fait de cette rotation, le système n'est plus montable et on conclurait donc qu'il y a un degré d'hyperstatisme en rotation suivant $\vec{z}$, alors que ce n'est pas vrai. En réalité, le fait que le système soit hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$ est à l'origine de cette erreur d'interprétation.

Imaginons que le système n'est pas hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$, cela veut dire que la translation de B doit être possible suivant $\vec{y}$. Alors cette rotation n'engendre pas d'impossibilité de montage.

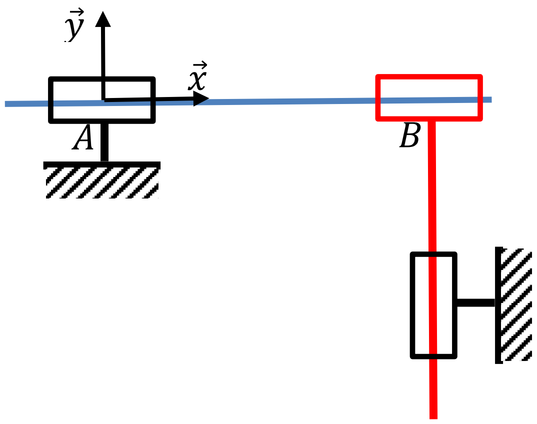


Dans ce cas, comme nous avons juste enlevé le degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$, si le mécanisme était hyperstatique en rotation autour de $\vec{z}$, on devrait le mettre en évidence avec la rotation proposée :

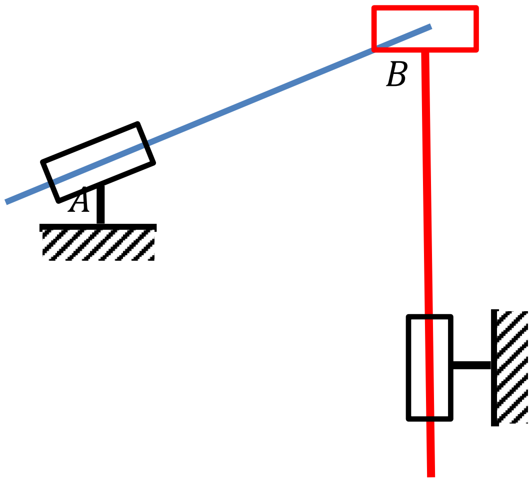


On voit bien qu'en faisant abstraction de l'hyperstatisme en translation du mécanisme, cette rotation n'empêche pas le montage.

Pour être plus claire et pour conclure, prenons l'exemple suivant :



Par rapport au système initialement étudié, nous avons supprimé le degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$ mais nous avons ajouté un degré d'hyperstatisme en rotation autour de $\vec{z}$. Imaginons la même déformation que précédemment en A en rotation autour de $\vec{z}$



Ici, on voit bien que même si le système n'est pas hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$, la rotation proposée induit un montage impossible, à cause d'un problème d'orientation non autorisée en B.

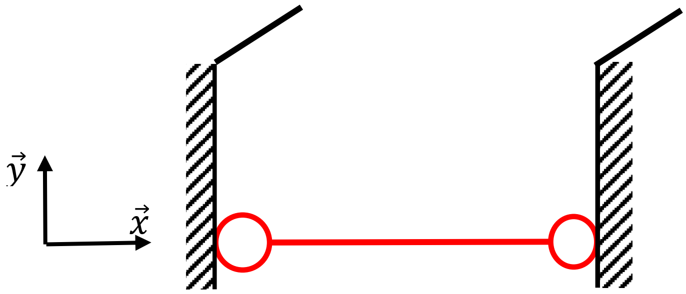
A.V.3.c.iv Mécanismes dans des positions particulières

La position particulière de certains mécanismes peut conduire :

- à un mauvais calcul d'hyperstatisme du fait de mobilités non vues
- à un changement du degré d'hyperstatisme du système du fait de la présence d'une nouvelle mobilité : $h = m + \cdots$

Prenons des exemples pour comprendre.

• **<u>Exemple 1</u>**



$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 5 + 6 - 10 = 1$$

Les translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ ainsi que la rotation autour de $\vec{x}$ sont possibles et bien visibles.

Si on s'arrête là, on trouve $h = -1$. Il reste donc au moins une mobilité.

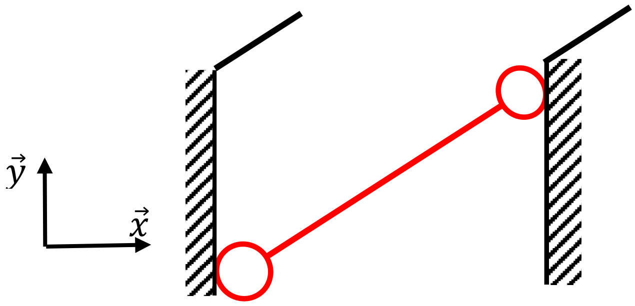
Par ailleurs, on voit bien qu'il y a un degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{x}$. Comment assurer le contact de chaque côté ? On a donc à priori $h = 1$, donc on a oublié 2 mobilités.

Regardons les rotations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Sont-elles possibles ? On voit bien que si la pièce tourne autour de ces axes, on va perdre les contacts des ponctuelles. On aurait donc envie de dire que ce ne sont pas des mobilités. Alors résonnons en statique. Si on applique un couple autour de $\vec{y}$ ou $\vec{z}$, on voit bien que rien ne va reprendre ces couples dans la situation particulière exposée, que l'équilibre est impossible. On peut donc conclure que ces 2 mobilités existent, bien qu'impossibles à réaliser concrètement.

Ainsi :

$$m = 5 \text{ et } h = 1$$

Prenons maintenant le même système dans une autre position :



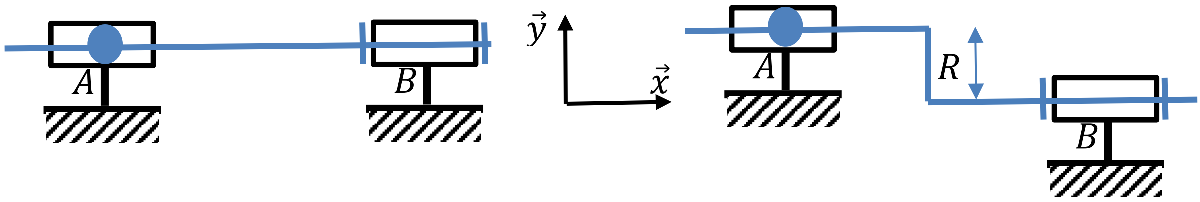
On peut remarquer que l'hyperstatisme axial a disparu, il n'y a plus aucun problèmes pour assurer le contact des deux ponctuelles.

Dans les calculs, ce qui change, c'est la mobilité. Dans cette situation, la rotation autour de $\vec{z}$ n'est plus possible

$$m = 4 \text{ et } h = 0$$

- **Exemple 2**

Soit le mécanisme suivant dans 2 positions différentes :



$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 1 + 6 - 5 = 2$$

$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 0 + 6 - 5 = 1$$

Dans le cas de gauche, l'hyperstatisme est lié à deux translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Les 2 axes doivent être coaxiaux et cela se traduit par 2 dimensions nulles.

Dans l'autre cas, l'hyperstatisme est lié à la distance R. En fait, où que soient les deux liaisons dans l'espace et quelle que soit leur orientation, on pourra tourner la pièce afin de la mettre dans le plan contenant les deux liaisons. Il ne faudra alors que maîtriser la distance R afin d'assurer le montage.

Cet exemple illustre bien l'influence de positions particulières permettant de faire apparaître des mobilités et d'augmenter le degré d'hyperstatisme d'un système pourtant composé des mêmes pièces et liaisons.

A.V.3.d Conséquences géométriques de l'hyperstatisme

Tout degré d'hyperstatisme impose des conditions géométriques au mécanisme concerné.

Les degrés d'hyperstatisme en résultante (statique) ou translation imposent des conditions de position.

Les degrés d'hyperstatisme en moment (statique) ou rotation imposent des conditions d'orientation.

Ces conditions seront ajoutées au plan de définition à l'aide de la cotation.

Dans notre exemple, lorsque les pièces 0, 2 et 3 (par exemple) sont montées, le moindre défaut de position d'une des liaisons de la chaîne suivant les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraînent une impossibilité de monter l'axe de 3 dans 0 sans déformer au moins une pièce ou liaison. Il faudra tolérancer les différentes pièces afin d'assurer une position relative des différents axes afin que les pièces se montent. Il en va de même concernant les rotations.

A.V.3.e Rendre un mécanisme isostatique

A.V.3.e.i Principe

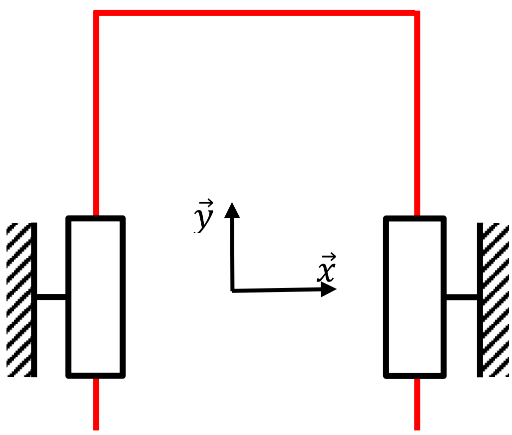
Pour rendre un système hyperstatique de degré h isostatique, il faut ajouter h degrés de liberté (DDL) **sans ajouter de mobilités internes**. Parfois, il suffit de modifier des liaisons, parfois il faut aussi ajouter des liaisons et pièces intermédiaires.

Dans les mécanismes à plusieurs chaînes cinématiques, comme $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$, il faut rendre isostatiques chaque chaîne du système (non pas uniquement γ chaînes). Le fait de rendre une chaîne isostatique peut diminuer le degré d'hyperstatisme d'autres chaînes.

A.V.3.e.ii Applications

• **Un premier exemple simple**

Soit le système suivant :

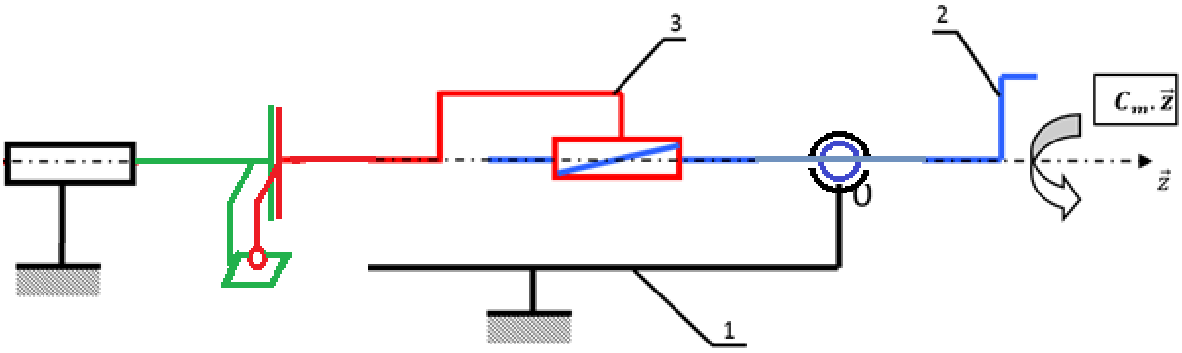


Question : calculer h, identifier l'origine des différents degrés d'hyperstatisme et proposer la solution la plus simple possible afin de rendre le système isostatique.

• **<u>Exemple du cours</u>**

Dans notre cas, il faut permettre les 4 mobilités manquantes sans changer le fonctionnement global du mécanisme ni ajouter de mobilités internes, par exemple :

- Permettre les 2 rotations manquantes en transformant la pivot en rotule
- Permettre les deux translations à l'aide de deux liaisons en parallèle Appui plan + Ponctuelle



Remarque : Il existe plusieurs solutions différentes. On pourrait mettre deux glissières en série à la place des deux liaisons en parallèle. Toutefois, cela induirait la présence d'une pièce supplémentaire.

Vérification de la solution proposée :

L	5
p	4
γ	2
I_c	3+1+3+5+1=13
E_c	$6\gamma = 12$
m	1
h	$h = m + E_c - I_c$ $h = 1 + 12 - 13 = 0$
I_s	3+5+3+1+5=17
E_s	6(4-1)=18
m	1
h	$h = m + I_s - E_s$ $h = 1 + 17 - 18 = 0$

Il faut donc ajouter des liaisons et des pièces.

A.V.4 Cas des problèmes plans

Dans le cas de problèmes plans de normale $\vec{z}$, à ne pas confondre avec des mécanismes 3D représentés dans le plan, on ne trouve que trois liaisons dont les nombres d'inconnues peuvent être réduits:

Glissière	Axe contenu dans le plan (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$)	$i_c^{2D} = 1$	$\boldsymbol{i_s^{2D} = 2}$
Pivot	Axe $\vec{z}$	$i_c^{2D} = 1$	$\boldsymbol{i_s^{2D} = 2}$
Ponctuelle	Normale dans le plan (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$)	$\boldsymbol{i_c^{2D} = 2}$	$i_s^{2D} = 1$

$$i_c^{2D} + i_s^{2D} = 3 \quad ; \quad I_c^{2D} + I_s^{2D} = 3L$$

L'analyse des mécanismes peut être simplifiée, en ne tenant pas compte des équations de la 3° dimension :

- Vecteur vitesse de rotation / Moment statique suivant $\vec{z}$
- Vecteur Vitesse de translation / Résultante statique suivant $\vec{x}$
- Vecteur Vitesse de translation / Résultante statique suivant $\vec{y}$

Ainsi, on a :

Cinématique	Statique
$E_c^{2D} = 3\gamma$	$E_s^{2D} = 3(p-1)$

Sans l'hypothèse des mécanismes plans, un mécanisme plan possède 3 degrés d'hyperstatisme supplémentaires :

$$h^{3D} = 3 + h^{2D} \ (\Delta)$$

Remarque : En pratique, cette formule n'est utilisée que dans le sens 2D vers 3D.

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0 = 0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D} = 3 + h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 2 inconnue cinématiques en plan, une ponctuelle 3D en a 5 en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 2 inconnues cinématiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D} = 3 + h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

A.V.5 Conclusion

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme s'obtient très rapidement à l'aide des formules d'analyse, si la mobilité est bien estimée « à la main ». Ensuite, il convient d'en déterminer les causes. Avec l'expérience, et en imaginant, à la main, des défauts géométriques dans le mécanisme, il devient possible de les déterminer et de proposer des améliorations très rapidement.

L'utilisation des méthodes de résolution cinématique et statique/dynamique permettent d'étudier les systèmes d'équations et de déterminer m et h. Ces méthodes sont très souvent coûteuses en temps, mais permettent d'appréhender la mobilité parfois difficile à déterminer. Il est préférable dans ce cas d'effectuer la méthode cinématique qui fera généralement apparaître moins d'équations.

Un mécanisme hyperstatique n'est pas forcément un mauvais mécanisme. Cependant, l'hyperstatisme doit être traité correctement. S'il est voulu, on cherche en général à créer un mécanisme plus résistant / robuste, ou à obtenir un fonctionnement sans jeu. S'il n'est pas voulu, il faut envisager une reconception afin de l'éviter. En général, l'hyperstatisme est trouvé dans les mécanismes transmettant de fortes puissances.

D'un point de vue statique, l'hyperstatisme correspond au fait que certains efforts sont repris plusieurs fois par différentes liaisons. Les efforts se répartissant sur plus de liaisons que nécessaire, il est donc plus résistant à dimensionnement équivalent. Toutefois, ne connaissant pas la répartition des efforts, l'hyperstatisme peut faire apparaître des efforts/pressions locales dans des liaisons qui ne peuvent les supporter, et apporter une usure prématurée. De même, des contraintes internes dans les pièces apparaissent alors même qu'aucun effort extérieur n'est exercé sur le mécanisme.

D'un point de vue géométrique, l'hyperstatisme apporte des conditions géométriques à respecter afin que les contacts soient réalisés comme prévu et que le montage soit possible. La cotation fonctionnelle des éléments du mécanisme joue alors un rôle important sur les efforts dans les liaisons et les pièces. Il est nécessaire de contrôler précisément

- la position des liaisons au travers de la géométrie des pièces
- la géométrie des pièces au travers de la géométrie des liaisons
- la déformation des pièces

Un mécanisme hyperstatique composé de pièces indéformables réelles présentant des défauts n'est pas montable.

Un mécanisme isostatique se monte simplement, sans génération de contraintes internes, et les exigences géométriques de conception sont fortement diminuées.

Il est possible de modifier un mécanisme hyperstatique afin de le rendre isostatique, mais cela induit

- la modification de liaisons
- et/ou l'ajout de liaisons et de pièces intermédiaires

La levée de l'hyperstatisme sera abordée dans le chapitre de résistance des matériaux. En effet, en prenant en compte la déformation des pièces, il devient possible de déterminer les efforts inconnus.

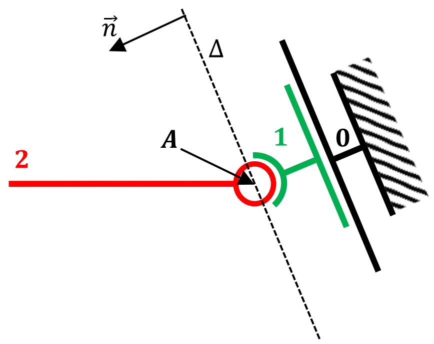
A.VI. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **cinématique**. Nous verrons plus tard qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode statique.

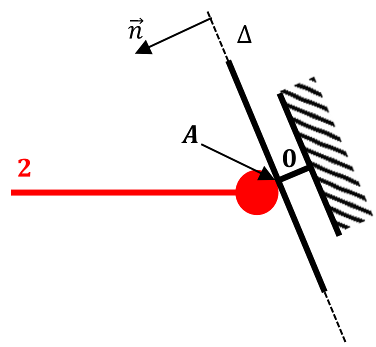
A.VI.1 Présentation

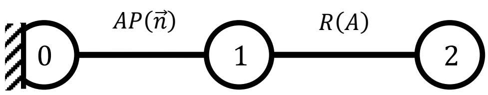
A.VI.1.a Exemples : série –parallèle

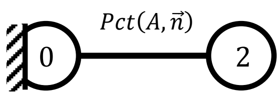
Plusieurs liaisons en série définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (et toujours isostatique)



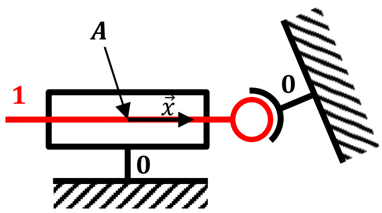
⇔



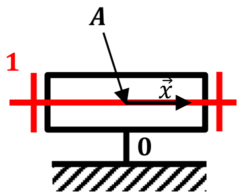


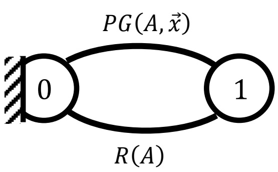


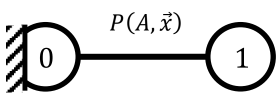
Plusieurs liaisons en parallèle définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (dont la solution non simplifiée peut être est isostatique ou hyperstatique - notion abordée en 2° année) :



⇔







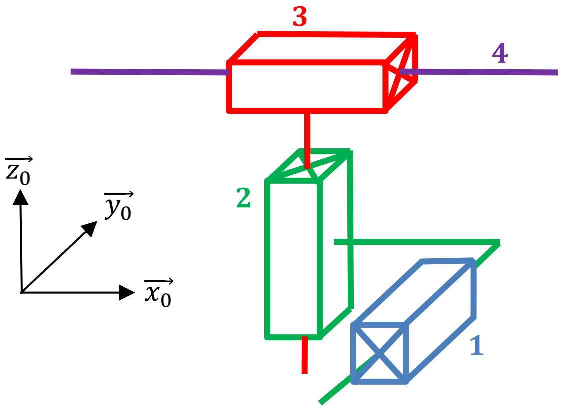
A.VI.1.b Objectifs

Obtenir une liaison équivalente dans un système complexe permet de le simplifier. En effet, lorsque l'on détermine une liaison équivalente à plusieurs liaisons, le nombre de liaisons du système en est d'autant réduit.

Lorsque l'on détermine une liaison équivalente, on détermine concrètement le torseur équivalent à l'ensemble des torseurs des liaisons considérées en utilisant l'une des deux méthodes disponibles, adaptées aux assemblages de liaisons en série ou en parallèle.

La liaison équivalente obtenue n'est pas obligatoirement une liaison normalisée. En effet, le torseur obtenu peut être :

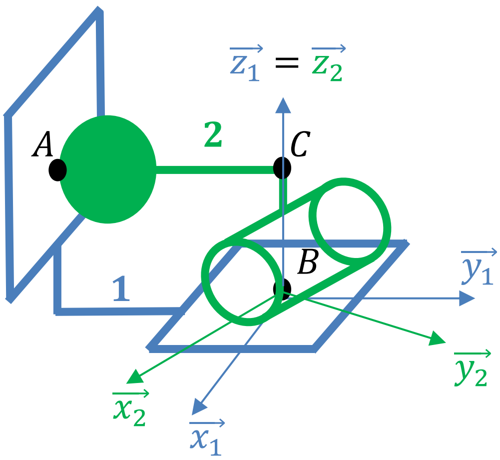
- Un torseur qui présente une forme non usuelle avec des inconnues indépendantes



$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/1} \\ 0 & V_{4/1} \\ 0 & W_{4/1} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$3DDL - \ 3\ inconnues\ indépendantes$$

- Un torseur présentant ou non une forme usuelle mais avec des inconnues **dépendantes**



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P_{2/1}} & U_{2/1} \\ \boldsymbol{\tan\theta_{2/1} P_{2/1}} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

$$Q_{2/1} = \tan\theta_{2/1} P_{2/1}$$

$$= \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & \boldsymbol{U_{2/1}\cos\theta_{1/2}} \\ 0 & \boldsymbol{U_{2/1}\sin\theta_{1/2}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$U_{2/1} = V_{2/1}\tan\theta_{2/1}$$

- Un mélange des 2 solutions précédentes

La difficulté lors de la détermination de liaisons équivalentes sera de bien choisir le point d'expression du torseur équivalent et sa base afin d'obtenir ce que l'on appelle la forme canonique du torseur dans le but de le reconnaître si c'est une liaison usuelle, ou d'exprimer au plus simple ses DDL dans le cas d'une liaison non usuelle.

A.VI.2 Préliminaires

A.VI.2.a.i Reconnaissance d'une liaison

Pour reconnaître une liaison usuelle, il faut :

- obtenir la forme canonique du torseur associé. La forme canonique d'un torseur est la forme du torseur lorsque son moment est minimum (choix du point) et ses composantes ont des expressions les plus simples (le plus de 0 possibles) (choix de la base). Par forme on entend composantes nulles ou non nulles et places de celles-ci dans le torseur
- N'obtenir que des inconnues indépendantes

On pourra alors vérifier que le torseur obtenu correspond **ou non** à une liaison usuelle. Lorsque l'on obtient le torseur équivalent final, il est composé soit

- d'inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- d'inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée

La forme et l'indépendance des inconnues d'un torseur dépendent de deux choix :

- Le point d'expression du torseur équivalent
- La base d'expression du torseur équivalent

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0.

A.VI.2.a.ii Choix du point

• <u>Principe</u>

La reconnaissance d'une liaison par son torseur (cinématique, statique) dépend du point où celui-ci est exprimé. Ainsi, si le torseur d'une liaison est écrit en un point du lieu géométrique caractéristique de celle-ci (et si la base est bien choisie, point développé au prochain paragraphe), sa reconnaissance sera triviale :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaît ici le torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe $(A,\vec{x})$. Cette écriture est la forme canonique du torseur de la liaison pivot.

Par contre, si ce torseur est exprimé en un point quelconque de l'espace $P(x,y,z)$, le torseur associé à cette liaison prendra une forme non conventionnelle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & zP_{2/1} \\ 0 & -yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

On remarque alors que les 3 composantes de ce torseur ne sont **pas indépendantes** :

$$V_{2/1} = zP_{2/1} \quad ; \quad W_{2/1} = -yP_{2/1}$$

Des inconnues en moment dépendent inconnues en résultante et on voit que la forme du torseur obtenu n'est pas la forme correspondant au moment minimum.

On remarque qu'en $y = z = 0$, soit sur l'axe $(A, \vec{x})$, le moment est minimum et les inconnues sont indépendantes :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaître la liaison pivot recherchée.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix du point n'était pas bon au départ

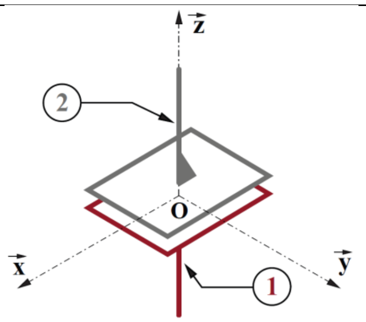
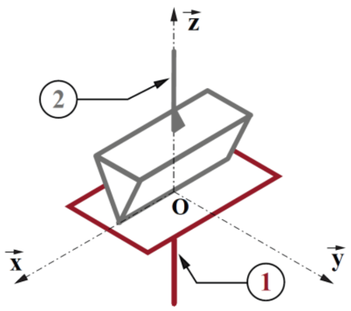
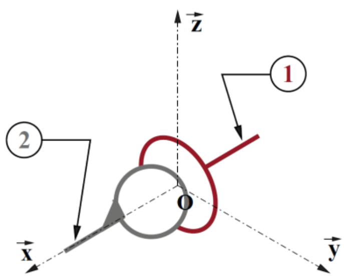
Conclusion : le choix du point avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir un point sur son lieu géométrique avant de commencer**.

- **<u>Effets d'un mauvais choix de point</u>**

Un mauvais choix de point conduit à l'apparition dans les moments de termes liés à la résultante du torseur et à des dimensions. Il faut alors déplacer le torseur en un autre point afin de minimiser le moment en jouant sur les dimensions et de rendre, si possible les inconnues indépendantes.

- **<u>Cas particuliers</u>**

A savoir, en cinématique par exemple, les liaisons Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle peuvent contenir des termes U,V et W dépendant de P, Q et R sans changer leur forme canonique. Il peut donc être possible de les reconnaître sans faire ce travail.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} - yR_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}}$
$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$</td>
<td>$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} - zP_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{x},\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$
$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$</td>
<td>$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} - xQ_{2/1} \end{Bmatrix}_{P \in (O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}}$
$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$</td>
</tr>
</table>

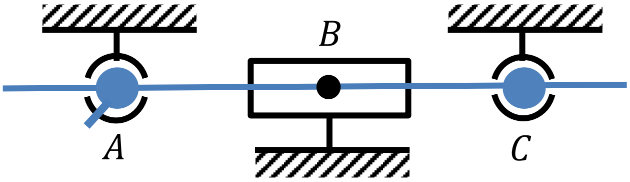
Remarques :

- En aucun cas cette dépendance à des termes en résultante n'induit une dépendance entre les inconnues cinématiques. Exemple pour l'appui plan : il n'est pas possible d'écrire : $U_{2/1} - yR_{2/1} = kR_{2/1}$. On remarque juste que les termes en moment sont « influencés » par les termes en résultante.
- Il en va de même en statique pour un certain nombre de liaisons (cf tableau des liaisons)
- Ce n'est pas parce que le moment n'est pas minimum que le torseur n'a pas sa forme canonique, mais si le moment est minimum, on a la forme canonique du torseur

• **<u>Méthode de choix du point</u>**

Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P.
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante $(X, Y, Z/P, Q, R)$.

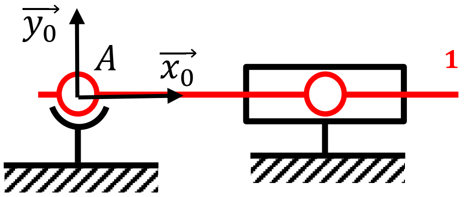


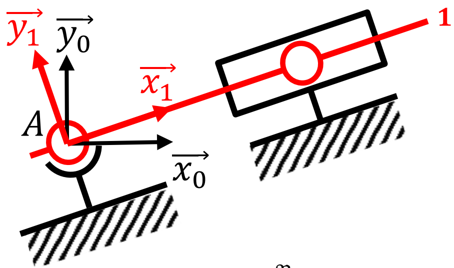
$Choix\ de\ ???$

A.VI.2.a.iii Choix de la base

• **<u>Principe</u>**

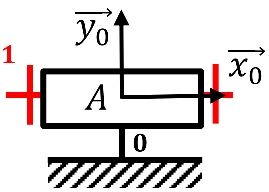
La base d'expression du torseur équivalent peut modifier sa forme. En général, la base est bien choisie intuitivement.

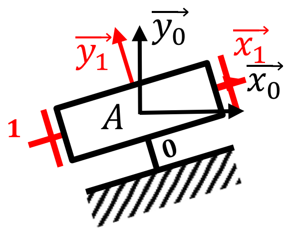




$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & 0 \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$





Dans le cas de droite, et dans la base 0, on remarque une dépendance de deux composantes en résultante (vitesse de rotation) et on remarque qu'un changement de base permet de supprimer celle-ci et de reconnaitre une liaison pivot.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix de la base n'était pas bon au départ

Conclusion : le choix de la base avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir une base contenant les vecteurs associés à la liaison recherchée avant de commencer**.

• Effets d'un mauvais choix de base

Un mauvais choix de base fait apparaître des relations adimensionnées (rapports de longueurs, cos, sin, tan) entre des composantes soit de la résultante, soit du moment, soit des deux. Il faut alors faire un changement de base afin de rendre, si possible, ces inconnues indépendantes.

• Méthode de choix de la base

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, $\mathfrak{B}$ sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x},-,-)$ → choix d'une base quelconque contenant le vecteur $\vec{x}$, quelle que soit sa position)

• Remarque

On remarquera que pour réussir à trouver la forme canonique d'un torseur par changement de base, il sera nécessaire d'avoir les mêmes relations entre deux mêmes composantes de la résultante et du moment :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1}\cos\theta_{10} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & V_{2/1}\sin\theta_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1}\cos\theta_{01} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

A.VI.3 Analyse

A.VI.3.a Préliminaires

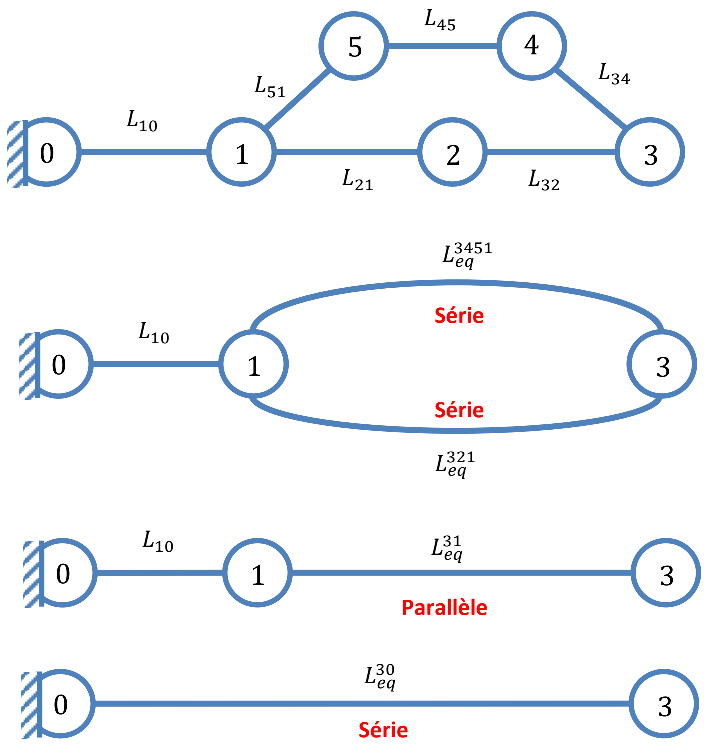
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

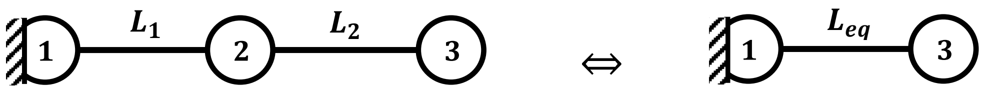
A.VI.3.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et ou s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



A.VI.3.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

A.VI.3.c.i Méthode cinématique – A privilégier

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}$ ... $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$.
- Par composition du mouvement, on a :
$$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$
Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{n/1} & U_{n/1} \\ Q_{n/1} & V_{n/1} \\ R_{n/1} & W_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
    - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
    - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.c.ii Méthode statique

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{T}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\}$ … $\{\mathcal{T}_{2/1}\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{n/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par application du PFS à chaque solide, on a :

Solide	PFS	Déduction
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{3/2}\}$
i	$\{\mathcal{T}_{i-1/i}\} + \{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{\mathcal{T}_{i/i-1}\}$
n	$\{\mathcal{T}_{n-1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$
n via L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$

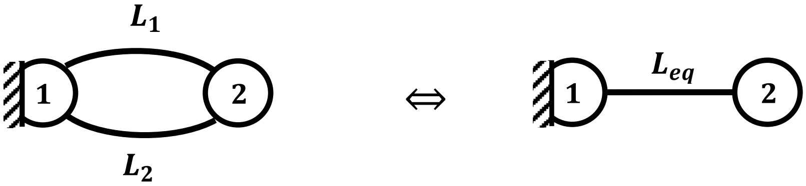
Finalement, on trouve :

$$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \cdots = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$$

Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$

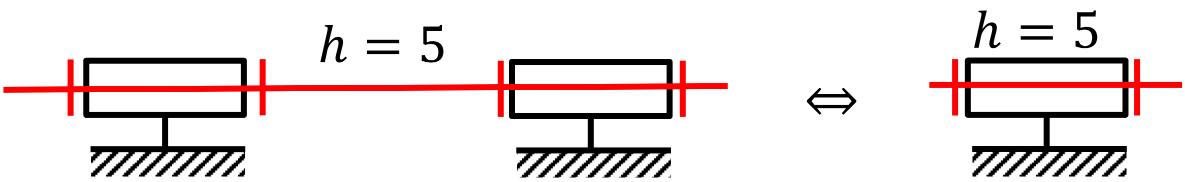
- Exprimer $\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Dans le cas des liaisons en parallèle, la solution réelle peut présenter un degré d'hyperstatisme non nul. Avant de remplacer un ensemble de liaisons per une liaison équivalente isostatique, il convient donc d'analyser le montage afin de garder l'information d'hyperstatisme.



Le degré d'hyperstatisme du système contenant des liaisons équivalentes sera inférieur au degré d'hyperstatisme du système contenant toutes les liaisons. L'écart sera égal à la somme des degrés d'hyperstatisme de chaque liaison équivalente étudiée.

A.VI.3.d.i Méthode cinématique

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\}, \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\} \dots \{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par fermeture cinématique de chaque chaîne indépendante, on a :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$$
Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
    - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
    - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d.ii Méthode statique – A privilégier

Méthode :

- Choisir point P et base $\mathfrak{B}$
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\}, \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\}$ … $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$.
- Par application du PFS, on a :

Solide	Liaison	PFS	Déduction
2	n	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{1/2}{}^{i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{i}\}$
2	L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \{\mathcal{T}_{1/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$

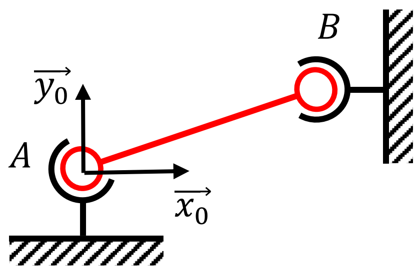
$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{i}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\} + \cdots + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$$

Attention au choix du point P et de la base $\mathfrak{B}$

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

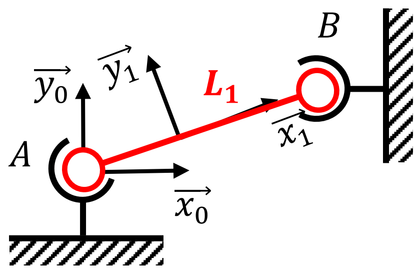
A.VI.4 Illustration de l'effet des choix de points et bases

Soit le schéma cinématique suivant :



A.VI.4.a Méthode recommandée

Pour déterminer la liaison équivalente entre la pièce 1 et le bâti, on voit s'il est possible de déterminer à priori la liaison recherchée. Dans ce cas, on cherche une liaison pivot d'axe $(A,\overrightarrow{x_1})$.



On choisit donc un point sur l'axe de la liaison en prenant celui qui induira le moins de calculs (le plus d'inconnues en résultante). Ici, A et B donnent un travail équivalent.

Choisissons A

On choisit une base contenant l'axe de rotation.

Choisissons la base 1

Dans le cas de liaisons en parallèle, on privilégie la méthode statique afin de faire une somme :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} + \{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\}$$

On pose la définition du torseur recherché en A dans B_1

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

Puis les deux torseurs de liaison

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & -L_1 Z_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & L_1 Y_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 Z_{10}{}^2 \\ L_1 Y_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 & 0 \\ {Y_{10}}^1 & 0 \\ {Z_{10}}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1} + \begin{Bmatrix} {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

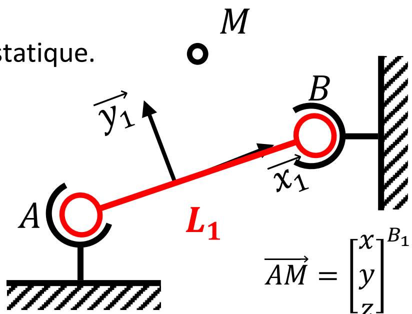
$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

On peut voir qu'aucune des composantes de ce torseur équivalent ne peut être exprimée comme combinaison linéaire des autres.

On a donc exprimé le torseur de la liaison équivalente entre 1 et 0 : c'est bien une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$.

A.VI.4.b Mauvais choix de point

Plaçons-nous en un point M quelconque. On garde la base B_1 et la méthode statique.



$$\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{B_1}$$

On pose la définition du torseur recherché en M dans B_1

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$M_M = M_A + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & (x - L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & -(x - L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$M_M = M_B + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} -(x - L_1) \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ (x - L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ -(x - L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 \\ Y_{10}{}^1 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_M^{B_1} + \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & (x - L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & -(x - L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & -yZ_{10}{}^1 + zY_{10}{}^1 - yZ_{10}{}^2 + zY_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & xZ_{10}{}^1 - zX_{10}{}^1 + (x - L_1)Z_{10}{}^2 - zX_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & -xY_{10}{}^1 + yX_{10}{}^1 - (x - L_1)Y_{10}{}^2 + yX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & z(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2) - y(Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2) \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & x(Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2) - L_1 Z_{10}{}^2 - z(X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2) \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & -x(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2) + y(X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2) + L_1 Y_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

Nous sommes face à une écriture compliquée des moments. Sachant que nous cherchons un torseur à 5 inconnues indépendantes, on doit pouvoir montrer **qu'une inconnue est combinaison linéaire** des autres :

$$L_{10} = zY_{10} - yZ_{10}$$

Comme il s'agit d'un point mal choisit, cherchons à **minimiser le moment**.

En $x = y = z = 0$, soit au point A :

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

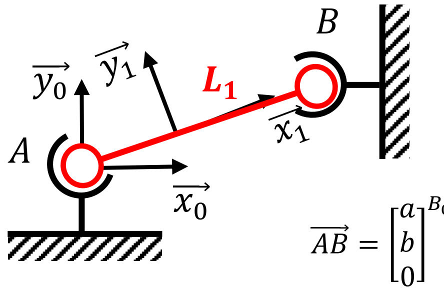
On trouve le torseur le la démarche précédente, c'est terminé. On peut d'ailleurs remarque que même si $x \neq 0$, la forme canonique est gardée et les inconnues sont indépendantes :

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_M^{B_1} = \begin{Bmatrix} {X_{10}}^1 + {X_{10}}^2 & 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 & -L_1 {Z_{10}}^2 - z\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & y\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + L_1 {Y_{10}}^2 \end{Bmatrix}_M^{B_1}$$

Ce fait est lié à la remarque faite précédemment : en statique, un certain nombre de torseurs ne changent pas leur forme canonique tout en ayant des composantes qui peuvent changer de valeur.

A.VI.4.c Mauvais choix de base

Plaçons-nous dans la base 0 et faisons la méthode statique en A :



$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} + \{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$M_A = M_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{10}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_0} = \begin{bmatrix} bZ_{10}{}^2 \\ -aZ_{10}{}^2 \\ aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{bmatrix}^{B_0}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & 0 \\ Z_{10}{}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_0} + \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^1 + X_{10}{}^2 & bZ_{10}{}^2 \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 & -aZ_{10}{}^2 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 & aY_{10}{}^2 - bX_{10}{}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_0}$$

On remarque ici que :

$$L_{10} = -\frac{b}{a} M_{10} = -\tan\left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}\right) M_{10}$$

Les inconnues statiques ne sont **pas indépendantes**. On voit qu'une rotation est en cause.

Effectuons un changement de base du moment de 0 dans 1 :

$$\overrightarrow{x_0} = \cos\theta_{01}\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{01}\overrightarrow{y_1} = \cos\theta_{10}\overrightarrow{x_1} - \sin\theta_{10}\overrightarrow{y_1} = \frac{1}{L_1}\begin{bmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\overrightarrow{y_0} = -\sin\theta_{01}\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{01}\overrightarrow{y_1} = \sin\theta_{10}\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{10}\overrightarrow{y_1} = \frac{1}{L_1}\begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$$

$$\begin{bmatrix} b{Z_{10}}^2 \\ -a{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_0} = \begin{bmatrix} \frac{a}{L_1} b{Z_{10}}^2 - \frac{b}{L_1} a{Z_{10}}^2 \\ -\frac{b}{L_1} b{Z_{10}}^2 - \frac{a}{L_1} a{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a^2+b^2}{L_1} {Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1{Z_{10}}^2 \\ a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{bmatrix}^{B_1}$$

Remarque : pour exprimer le torseur équivalent dans la base 1, compte tenu des choix effectués de définir les torseurs des rotules dans la base 0 au départ, il faut aussi projeter les composantes de la résultante :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \frac{a}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{b}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & 0 \\ -\frac{b}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{a}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & -L_1{Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

Remarques :

- Ici, les composantes ne correspondent pas aux composantes du torseur posé au départ !!! $\begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_0}$. Mais ce n'est pas grave, on revient en arrière, on annule cette définition et on définit le torseur équivalent ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{Bmatrix}_A^{B_1} = \begin{Bmatrix} \frac{a}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{b}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & 0 \\ -\frac{b}{L_1}\left({X_{10}}^1 + {X_{10}}^2\right) + \frac{a}{L_1}\left({Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2\right) & -L_1{Z_{10}}^2 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 & a{Y_{10}}^2 - b{X_{10}}^2 \end{Bmatrix}_A^{B_1}$$

- On ne trouve pas le même moment que lors de la démarche classique, mais il ne faut pas oublier que l'on n'a pas défini les torseurs des liaisons n°1 et n°2 dans les mêmes bases, donc c'est normal.

Finalement, toutes les inconnues de ce torseur équivalent sont indépendantes, on a fini et on reconnaît la liaison désirée.

BREF : méthode à éviter, le choix de la base doit être bien fait au départ !!! Vous l'aurez compris…

A.VI.5 Bilan

	Liaisons en série	Liaisons en parallèle
Cinématique	$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{2}\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{n}\}$
Statique	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \cdots = \{\mathcal{T}_{1/1}\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\} + \cdots + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$

Attention au choix du point et de la base d'expression des torseurs. Une erreur dans ces choix induit une reconnaissance très difficile de la liaison recherchée.

	S	**P**
C	**+**	**=**
S	**=**	**+**