A.III. Cinétique - Dynamique

Soit G le centre de gravité de l'ensemble de solides E ou du solide S de masse M et R_0 un repère.

A.III.1 Préliminaires

A.III.1.a Dérivée sous le signe somme

Nous allons utiliser des outils mathématiques relatifs à la dérivée sous le signe somme.

Dans le cas de systèmes matériels E à masse conservative, c'est-à-dire que leur masse m est indépendante

- du repère dans lequel on observe leur mouvement
- du temps t auquel on observe leur mouvement

On montre en mathématiques que si f est une fonction vectorielle qui à tout point M de E et à tout instant t associe le vecteur $\vec{f}(M,t)$, alors :

$$\frac{d}{dt}\int_E \vec{f}(M,t)\,dm = \int_E \frac{d}{dt}\vec{f}(M,t)\,dm$$

On admettra cette relation dans la suite pour le calcul des résultantes cinétique et dynamique.

A.III.1.b Vitesse et accélération du centre de gravité d'un ensemble de solides

Lorsque l'on parle d'un ensemble de solides E de centre de gravité G, on ne peut plus calculer simplement $\vec{V}(G,E/0)$ et $\vec{\Gamma}(G,E/0)$. En effet, l'ensemble E possède des pièces en mouvement les unes par rapport aux autres et ces expressions ne peuvent pas être développées. Dans ce cas, on doit passer par l'expression :

$$\vec{V}(G,E/0) = \vec{V}(G/0) \quad ; \quad \vec{\Gamma}(G,E/0) = \left.\frac{d\vec{V}(G/0)}{dt}\right)_0$$

Avec :

$$\vec{V}(G/0) = \vec{V}(G/S_i) + \vec{V}(G,S_i/0)$$

Ou toute autre composition du mouvement nécessaire…

A.III.2 Torseur cinétique

A.III.2.a Définition

Soit E un ensemble matériel, c'est-à-dire un ensemble de N solides, en mouvement possible les uns par rapport aux autres, de centre de gravité G et de masse M.

$$\{C(E/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(E/0) = \int_E \vec{V}(M,E/R_0)dm \\ \vec{\sigma}(A,E/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,E/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$\int_S \vec{V}(M,E/R_0)dm$ s'appelle la résultante cinétique $\overrightarrow{R_c}(E/0)$ de E dans son mouvement par rapport à R_0.

$\vec{\sigma}(A,E/R_0)$ s'appelle le moment cinétique en A de E dans son mouvement par rapport à R_0.

Le moment cinétique est un champ de moment du torseur cinétique, soit :

$$\vec{\sigma}(A,E/R_0) = \vec{\sigma}(B,E/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/0)$$

A.III.2.b Résultante cinétique

Soit O un point fixe dans R_0.

$$\overrightarrow{R_c} = \int_S \vec{V}(M,E/R_0)dm = \int_S \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} dm = \frac{d}{dt}\left.\int_S \overrightarrow{OM}dm\right)_{R_0} = \left.\frac{d}{dt} M\overrightarrow{OG}\right)_{R_0} = M\vec{V}(G,E/R_0)$$

A.III.2.c Moment cinétique

A.III.2.c.i Cas d'un solide

• **<u>Calcul</u>**

Soit le point A lié à S.

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)dm$$

$$\vec{V}(M,S/R_0) = \vec{V}(A,S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R_0) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R_0)dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(A,S/R_0)dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}dm$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM}dm \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}dm$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0)$$

• **Récapitulatif**

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(E/0) = M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

• **Remarque importante**

Le produit $I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$ ne peut être réalisé que si $I(A,S)$ et $\vec{\Omega}(S/R_0)$ sont exprimés dans la même base !

• **Cas particulier**

- $A = G$: $\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$
- A fixe dans R_0 : $\vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$

• **En pratique**

On se sert souvent de la formule de Varignon afin de calculer simplement le moment cinétique en G puis de le déplacer en un point A plutôt que de calculer moment cinétique en un point A :

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(G,S/R_0)$$

Car $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Cela dépend aussi du point où est exprimée la matrice d'inertie : comparer le calcul du déplacement matriciel avec Huygens généralisé au changement de point avec Varignon

A.III.2.c.ii Cas d'un ensemble matériel

Le torseur cinétique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenu en calculant le torseur cinétique de chaque solide puis en faisant la somme au même point:

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

A.III.3 Torseur dynamique

A.III.3.a Définition

Soit E un ensemble matériel de centre de gravité G et de masse M.

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(E/0) = \int_E \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm \\ \vec{\delta}(A,E/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$\int_S \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm$ s'appelle la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d}(E/0)$ de E dans son mouvement par rapport à R_0.

$\vec{\delta}(A,E/R_0)$ s'appelle le moment dynamique en A de E dans son mouvement par rapport à R_0.

Le moment dynamique est un champ de moment du torseur dynamique, soit :

$$\vec{\delta}(A,E/R_0) = \vec{\delta}(B,E/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d}(E/0)$$

A.III.3.b Résultante dynamique

Soit O un point fixe dans R_0.

$$\overrightarrow{R_d} = \int_S \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm = \int_S \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} dm = \frac{d^2}{dt^2}\left.\int_S \overrightarrow{OM}dm\right)_{R_0} = M\left.\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OG}\right)_{R_0} = M\vec{\Gamma}(G,E/R_0)$$

A.III.3.c Moment dynamique

A.III.3.c.i Cas d'un solide

La démonstration qui suit est valable que ce soit pour un solide ou pour un ensemble matériel.

• **<u>Calcul</u>**

Exprimons la dérivée du moment cinétique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)dm\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= \int_S \left.\frac{\left(d\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\right)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

$$= \int_S \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\, dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

Première intégrale :

$$\int_S \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm = \int_S \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

O fixe dans R_0

$$= \int_S \left(\vec{V}(M,S/R_0) - \vec{V}(A,S/R_0)\right) \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

$$= \int_S -\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm = -\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \int_S \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

$$= -M\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(G,S/R_0)$$

Seconde intégrale :

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,S/R_0)\,dm = \vec{\delta}(A,S/R_0)$$

Soit :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = -M\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(G,S/R_0) + \vec{\delta}(A,S/R_0)$$

Soit

$$\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(G,S/R_0)$$

• **<u>Récapitulatif</u>**

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} M\vec{\Gamma}(G,S/R_0) \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0) \wedge \vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

• **<u>Cas particuliers</u>**

- $A = G$: $\vec{\delta}(G,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$
- A fixe dans R_0 : $\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$

• **En pratique**

On se sert souvent de la formule de Varignon afin de calculer simplement le moment cinétique puis dynamique en G puis de le déplacer en un point A plutôt que de calculer moment cinétique et dynamique en un point A :

$$\vec{\delta}(A,S/R_0) = \vec{\delta}(G,S/R_0) + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Gamma}(G,S/R_0)$$

Car $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Et $\vec{\delta}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\delta}(G,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$$

Cela dépend aussi du point où est exprimée la matrice d'inertie : comparer le calcul du déplacement matriciel avec Huygens généralisé au changement de point avec Varignon

A.III.3.c.ii Cas d'un ensemble matériel

Bien que le calcul précédent soit valable pour un solide et pour un ensemble matériel, le torseur dynamique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenu généralement en calculant le torseur dynamique de chaque solide puis en faisant la somme au même point:

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

A.III.3.c.iii Moment dynamique d'une masse ponctuelle

Il arrive que l'on modélise un solide par une masse ponctuelle en son centre de gravité. Dans ce cas, le moment dynamique en un point quelconque de l'espace s'obtient simplement :

$$\vec{\delta}(O,S/R_0) = \vec{\delta}(G,S/R_0) + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = M\overrightarrow{OG} \wedge \vec{\Gamma}(G,S/R_0)$$

Or, pour une masse ponctuelle : $I(G,S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$, donc :

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}(G,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{\delta}(O,S/R_0) = M\overrightarrow{OG} \wedge \vec{\Gamma}(G,S/R_0)$$