A. Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement

A.I. Objectifs

Nous savons aujourd'hui étudier les mécanismes et déterminer les actions dans les liaisons en statique, à l'aide des équations issues du principe fondamental de la statique (PFS). Toutefois, dès qu'il y a accélération, les actions changent et le PFS ne permet plus de les déterminer.

C'est le principe fondamental de la dynamique (PFD) qui va nous permettre de caractériser les actions mécaniques dès lors que l'équilibre statique est rompu.

Le PFS donne les relations suivantes :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext\to S}} = \vec{0} \quad ; \quad \sum \overrightarrow{M_{ext\to S}} = \vec{0}$$

Aujourd'hui, nous sommes en passe de montrer de nouvelles relations tenant compte des accélérations. Nous connaissons bien la relation suivante :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext\to S}} = m\vec{a}$$

Nous ferons toutefois un rappel des calculs de masses des solides.

Mais ce n'est pas tout, il y a aussi une relation en rotation. Dans ce cas, nous allons mettre en place des outils permettant de traduire les caractéristiques des solides en rotation, en particulier la matrice d'inertie, puis la relation du principe fondamental de la dynamique permettant de caractériser ces mouvements de rotation en présence d'accélérations angulaires.

A.II. Caractéristiques des solides

A.II.1 Masse d'un solide

La masse d'un ensemble matériel volumique E s'écrit :

$$M(E) = \int_E \rho(M)dV$$

avec $\rho(M)$ sa masse volumique.

Si $\rho(M)$ est constante $\rho(M) = \rho$ et V est son volume, alors

$$M(E) = \rho V$$

On raisonne de la même façon avec des masses surfaciques et linéiques.

A.II.2 Centre de gravité

A.II.2.a Définition

Le centre de gravité G d'un ensemble matériel volumique E est défini dans un repère d'origine O par :

$$\int_E \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$$

Soit :

$$\int_E (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) dm = \vec{0}$$

$$\int_E \overrightarrow{GO} dm + \int_E \overrightarrow{OM} dm = \vec{0}$$

$$\int_E \overrightarrow{OM} dm = m\overrightarrow{OG}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\, dm$		
$x_G = \frac{1}{m}\int_E x dm$	$y_G = \frac{1}{m}\int_E y dm$	$z_G = \frac{1}{m}\int_E z dm$

Si l'ensemble matériel comporte un élément de symétrie (géométrie et centre de gravité), le centre de gravité appartient à cet élément.

Si la masse volumique est constante, on a aussi : $\rho(M) = \rho = constante$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int_E \overrightarrow{OM}\, dV$		
$x_G = \frac{1}{V}\int_E x dV$	$y_G = \frac{1}{V}\int_E y dV$	$z_G = \frac{1}{V}\int_E z dV$

A.II.2.b Relations barycentriques

Si l'on connaît les N centres de gravité G_i de N sous-ensembles de masse respectives m_i (positive ou négative ex cylindre creux), on peut déterminer le centre de gravité par :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG_i}\right)$$

A.II.3 Centre d’inertie des courbes et des surfaces planes (pour information)

A.II.3.a Centre d’inertie – Définition

Le centre d’inertie d’un objet, ou centre de masse G, est le point de l’espace où l’on applique les effets d’inertie, c’est-à-dire le vecteur variation de quantité de mouvement.

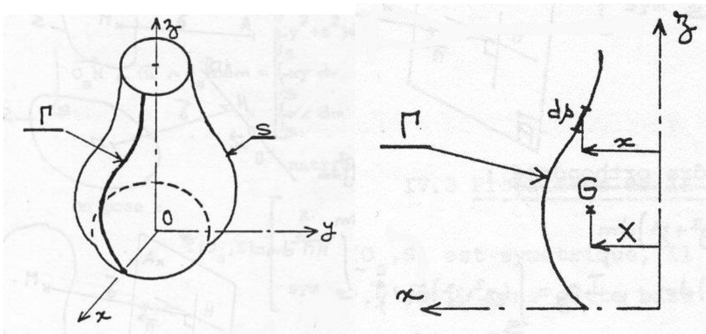
A.II.3.b Théorème de Guldin

Le théorème de Guldin va permettre de mettre en relation la position du centre d’inertie d’une courbe plane/d’une surface plane avec la surface/le volume engendré par rotation de cette courbe/surface.

Il sera très utile pour déterminer des surfaces et volumes connaissant la position d’un centre d’inertie.

A.II.3.b.i Centre d’inertie des courbes planes

Soit S une surface de révolution d’axe $(O,\vec{z})$. Soit Γ une génératrice de S de longueur L ne coupant pas l’axe $(O,\vec{z})$.



On appelle X les coordonné du centre d’inertie de la courbe plane Γ dans le plan (O,x,z).

Par définition du centre d’inertie G de Γ, on a :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_\Gamma \overrightarrow{OM}dm$$

En projection suivant $\vec{x}$, on a donc :

$$mX = \int_\Gamma xdm$$

La masse m de la courbe Γ vaut :

$$m = \mu L$$

avec μ masse linéique de Γ.

Le long de Γ, on a :

$$dm = \mu ds$$

On obtient :

$$\mu LX = \int_{\Gamma} x\mu ds$$

$$LX = \int_{\Gamma} xds$$

Par ailleurs, l'aire de la surface engendrée par la révolution de la courbe Γ autour de l'axe $(O, \vec{z})$ vaut :

$$S = \int_{S} xd\theta ds = 2\pi \int_{\Gamma} xds$$

Il vient donc :

$$\frac{S}{2\pi} = \int_{\Gamma} xds$$

$$LX = \int_{\Gamma} xds = \frac{S}{2\pi}$$

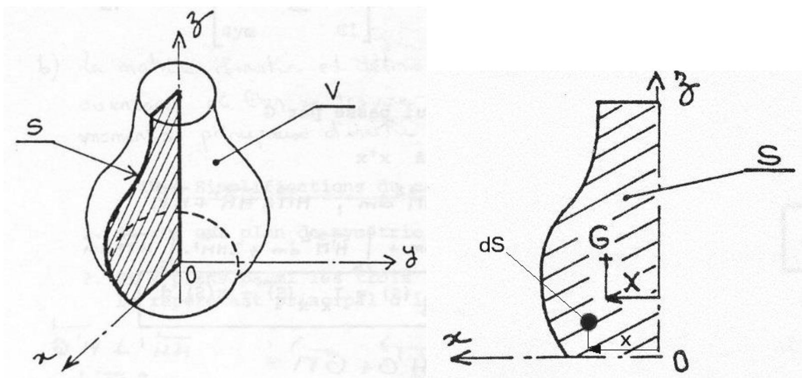
Soit :

$$X = \frac{S}{2\pi L}$$

Premier énoncé du théorème de Guldin

A.II.3.b.ii Centre d'inertie des surfaces planes

Soit V un volume de révolution d'axe $(O, \vec{z})$. Soit S une surface plane engendrant le volume V par rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$ et ne coupant pas cet axe .



On appelle X les coordonné du centre d'inertie de la surface plane S dans le plan (O, x, z).

Par définition du centre d'inertie G de S, on a :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_{S} \overrightarrow{OM} dm$$

En projection suivant $\vec{x}$, on a donc :

$$mX = \int_S x dm$$

La masse m de la surface S vaut :

$$m = \sigma S$$

avec σ masse surfacique de S.

Le long de Γ, on a :

$$dm = \sigma dS$$

On obtient :

$$\sigma S X = \int_S x \sigma dS$$

$$SX = \int_S x dS$$

Par ailleurs, le volume engendré par la révolution de la surface S autour de l'axe $(O, \vec{z})$ vaut :

$$V = \int_V x dx d\theta dz = 2\pi \int_S x dS$$

Il vient donc :

$$\frac{V}{2\pi} = \int_\Gamma x dS$$

$$SX = \int_S x dS = \frac{V}{2\pi}$$

Soit :

$$X = \frac{V}{2\pi S}$$

Deuxième énoncé du théorème de Guldin

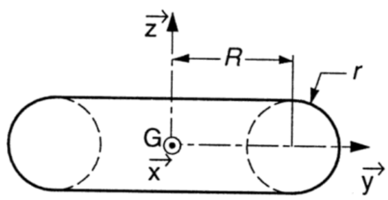
Exemple d'application pour le calcul du volume d'un tore :

$$X = \frac{V}{2\pi S}$$

$$V = X 2\pi S$$

$$V = R * 2\pi * \pi * r^2$$

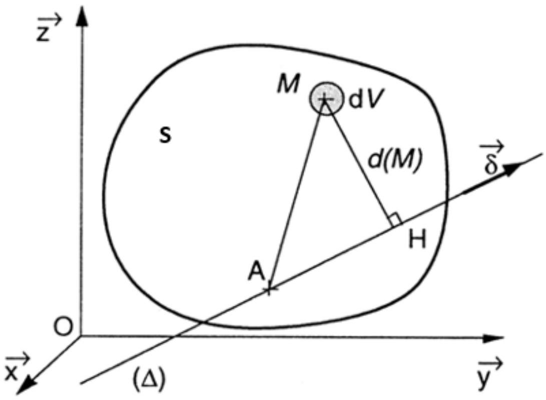
$$V = 2\pi^2 r^2 R$$



A.II.4 Moments d'inertie d'un solide

A.II.4.a Définition

Soit un solide S, un point A et une droite Δ passant par A.



$$\|\vec{\delta}\| = 1$$

On appelle « moment d'inertie du solide S par rapport au point A », la quantité :

$$I_A = \int_S \overrightarrow{AM}^2 dm$$

On appelle « moment d'inertie du solide S par rapport à la droite Δ », la quantité :

$$I_\Delta = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AM}\right)^2 dm = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm = \int_S d(M)^2 dm$$

Remarques :

- $I > 0$ (cas particulier de la masse ponctuelle : $I = 0$ « en son centre »)
- Unité : Kgm^2

A.II.4.b Traduction analytique

Soit le solide S, le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point M de coordonnées (x, y, z)..

Le moment d'inertie de S par rapport à l'origine O du repère :

$$I_O = \int_S \overrightarrow{OM}^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Le moment d'inertie de S par rapport aux trois axes du repère :

$I_{O_x} = \int_S (y^2 + z^2) dm$	$I_{O_y} = \int_S (x^2 + z^2) dm$	$I_{O_z} = \int_S (x^2 + y^2) dm$

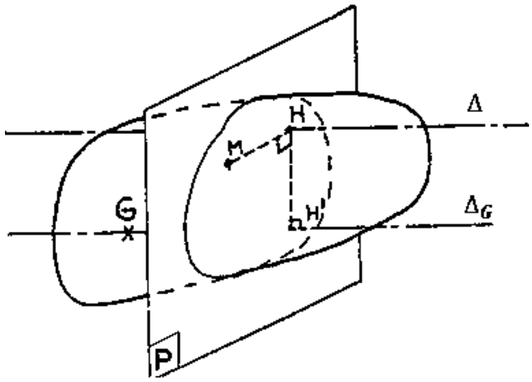
A.II.4.c Théorème d'Huygens

A.II.4.c.i Enoncé

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe D qui ne passe pas par le centre de gravité G est égal au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de md^2, m étant sa masse et d la distance entre G et D.

A.II.4.c.ii Expression du théorème

Soit le solide S, l'axe xx' passant par G et l'axe $\alpha\beta$ parallèle à xx' et distant de d.



$$\forall P$$

$$I_\Delta(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm$$

$$\overrightarrow{HM}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}$$

$$\overrightarrow{HM}^2 = d^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}$$

$$I_\Delta(S) = \int_S \left(d^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}\right) dm$$

$$I_\Delta(S) = \int_S d^2 dm + \int_S \overrightarrow{H'M}^2 dm + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{H'M} dm$$

$$\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}$$

$$I_\Delta(S) = md^2 + I_{\Delta_G}(S) + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{H'G} dm + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{GM} dm$$

$$\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'G} = 0 \; et \; \int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

$$I_\Delta(S) = md^2 + I_{\Delta_G}(S)$$

Donc :

$$I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S)d^2$$

Attention au sens d'expression !

A.II.5 Opérateur d'inertie d'un solide

A.II.5.a Définition

Soit un solide S et un point A.

L'opérateur d'inertie, $I(A,S)$, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $I(A,S)\vec{u}$ tel que :

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

Cet terme va apparaître lors du calcul du moment cinétique des solides un peu plus tard dans le cours.

Cet opérateur est linéaire et symétrique.

A.II.5.b Matrice d'inertie

Soit $\mathfrak{B}_S$ une base $(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$ liée au solide S étudié.

A.II.5.b.i Expression

On place l'origine du repère au point où est calculée la matrice, c'est-à-dire les intégrales.

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{x_S} + y\overrightarrow{y_S} + z\overrightarrow{z_S}$$

$$\vec{u} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S}$$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} ay^2 - bxy - cxz + az^2 \\ bz^2 - cyz - axy + bx^2 \\ cx^2 - axz - byz + cy^2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\begin{bmatrix} ay^2 - bxy - cxz + az^2 \\ bz^2 - cyz - axy + bx^2 \\ cx^2 - axz - byz + cy^2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = I(A,S)\vec{u}$$

En prenant A comme origine du repère, on a :

$$I(A,S)=\begin{bmatrix}\int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2+z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}=\begin{bmatrix}A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Astuce pour reconstruire cette matrice : on associé x à 1, y à 2 et z à 3

- Les termes diagonaux à la ligne et colonne i ne contiennent pas i
- Les termes hors diagonaux à la ligne i et la colonne j contiennent le terme ij

A, B et C sont appelés moments d'inertie par rapport aux axes $(O,\overrightarrow{x_S})$, $(O,\overrightarrow{y_S})$ et $(O,\overrightarrow{z_S})$.

E, F et G sont appelés **produits d'inertie** par rapport aux axes $(O,\overrightarrow{y_S})$ et $(O,\overrightarrow{z_S})$, $(O,\overrightarrow{x_S})$ et $(O,\overrightarrow{z_S})$ ou $(O,\overrightarrow{y_S})$ et $(O,\overrightarrow{z_S})$.

Remarque : La matrice d'inertie étant carrée, symétrique et réelle, elle est diagonalisable. Il existe donc une base de vecteurs propres $\mathfrak{B}_S{}'$ dans laquelle $I(A,S)$ est diagonale. Elle s'écrit dans cette base :

$$I(A,S)=\begin{bmatrix}A^* & 0 & 0 \\ 0 & B^* & 0 \\ 0 & 0 & C^*\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S{}'}$$

A^*, B^* et C^* s'appellent les **moments principaux d'inertie** et la base $\mathfrak{B}_S{}'$ est la base principale d'inertie.

Une matrice d'inertie de la forme $I(A,S)=\begin{bmatrix}A^* & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ montre que $\vec{x}$ est axe principal d'inertie du solide S.

A.II.5.b.ii Théorème de Huygens généralisé

Soit le point A et un solide S de masse M tel que :

$$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

Dans la même base, on a la relation entre $I(A,S)$ et $I(G,S)$ suivante :

$$I(A,S) = I(G,S) + M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Attention au sens d'expression !

Remarque : la matrice d'inertie ne dépend pas du sens d'expression de $\overrightarrow{AG}$ – On peut utiliser $\overrightarrow{GA}$

Démonstration :

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM})dm = \int_S (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})dm + \int_S \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM})dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM})dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})\int_S dm + \overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\int_S \overrightarrow{GM}dm + \int_S \overrightarrow{GM}dm\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + I(G,S)\vec{u}$$

$$I(A,S)\vec{u} = I(G,S)\vec{u} + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\wedge\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\wedge\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} bw-cv \\ cu-aw \\ av-bu \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\wedge\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} c^2u-acw-abv+b^2u \\ a^2v-abu-bcw+c^2v \\ b^2w-bcv-acu+a^2w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$= \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(A,S)\vec{u} = I(G,S)\vec{u} + M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\vec{u}$$

$$I(A,S) = I(G,S) + M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Remarque : pour obtenir la relation liant l'opérateur d'inertie en deux points O et O' quelconques, il suffit d'appliquer le théorème de Huygens en O puis en O', et d'en faire la différence membre à membre.

Soit :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad ; \ \overrightarrow{O'G} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GO'} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} - \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} a-a' \\ b-b' \\ c-c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$A = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad ; \quad A' = \begin{bmatrix} b'^2+c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & a'^2+c'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2+b'^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O,S) = I(G,S) + MA$$

$$I(O',S) = I(G,S) + MA'$$

$$I(O',S) - I(O,S) = M(A'-A)$$

$$\boldsymbol{I(O',S) = I(O,S) + M(A'-A)}$$

Avec :

$$A'-A = \begin{bmatrix} (b'^2+c'^2)-(b^2+c^2) & ab-a'b' & ac-a'c' \\ ab-a'b' & (a'^2+c'^2)-(a^2+c^2) & bc-b'c' \\ ac-a'c' & bc-b'c' & (a'^2+b'^2)-(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Remarque : il est nécessaire de connaître le centre de gravité de S pour utiliser cette formule (définition des matrices A et A')

A.II.5.b.iii Symétries et calculs de $I(O,S)$

Les différents cas suivants permettent de considérablement simplifier les calculs de matrices d'inertie.

On suppose à chaque fois que le point O appartient aux éléments de symétrie proposés.

- **$(O, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S})$ plan de symétrie**

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Démonstration :

$$D = \int_S yzdm = \int_{z<0} yzdm + \int_{z>0} yzdm = \int_{z<0} yzdm - \int_{z<0} yzdm = 0$$

$$E = \int_S xzdm = \int_{z<0} xzdm + \int_{z>0} xzdm = \int_{z<0} xzdm - \int_{z<0} xzdm = 0$$

• **Deux plans de symétrie parmi les plans $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$, $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})$, $(O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Démonstration :

- Si $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ plan de symétrie : $D=E=0$
- Si $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})$ plan de symétrie : $D=F=0$
- Si $(O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$ plan de symétrie : $E=F=0$
- Si deux d'entre eux sont plans de symétrie : $D=E=F=0$

• **Solide de révolution d'axe $(O,\overrightarrow{z_S})$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad \forall \mathfrak{B}(\_,\_,\overrightarrow{z_S})$$

$$A=\frac{C}{2}+\int_S z^2 dm$$

Démonstration :

Il existe une infinité de plans de symétrie contenant l'axe $(O,\overrightarrow{z_S})$, on a donc :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Puis :

$$\int_S x^2 dm=\int_S y^2 dm=\frac{1}{2}\int_S (x^2+y^2)dm=\frac{C}{2}$$

$$A=\int_S (y^2+z^2)dm=B=\int_S (x^2+z^2)dm=\frac{C}{2}+\int_S z^2 dm$$

Remarque : cette propriété reste valable pour tout solide de symétrie de révolution sur ¼ de tour, un ½ ou ¾ de tour :

$$A=\int_V (y^2+z^2)dm=\int_V y^2 dm+\int_V z^2 dm$$

$$B=\int_V (x^2+z^2)dm=\int_V x^2 dm+\int_V z^2 dm$$

$$\int_V x^2 dm=\rho\int_a^b\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\alpha} r^2\cos^2\theta\, r dr d\theta dz=\rho\int_a^b dz\int_{r_i}^{r_2} r^3 dr\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$\int_V y^2 dm = \rho \int_a^b \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\alpha r^2 \sin^2\theta \, r dr d\theta dz = \rho \int_a^b dz \int_{r_i}^{r_2} r^3 dr \int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\alpha \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^\alpha (1 - \sin^2\theta) d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left[\alpha - \int_0^\alpha \cos 2\theta \, d\theta\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha - \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\alpha\right] = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta = \alpha - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4} = \frac{4\alpha - 2\alpha + \sin 2\alpha}{4} = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$$

Au final :

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$$

	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \pi$	$\alpha = \frac{3\pi}{2}$
$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}$	$\frac{\pi - \sin\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi - \sin 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi - \sin 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
$\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$	$\frac{\pi + \sin 2\alpha}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi + \sin 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi + \sin 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Finalement, on montre donc que :

$$\forall \alpha = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \int_0^\alpha \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^\alpha \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\int_V y^2 dm = \int_V z^2 dm = \frac{1}{2}\int_V (y^2 + z^2) dm = \frac{A_i}{2}$$

Soit :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

$$\boxed{I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \; ; \; A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm \;\; \forall S \; de \; révolution \; d'axe \; (O, \vec{z}) \; sur \; \theta = k\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}}$$

- **Solide sphérique de centre 0**

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad \forall \mathfrak{B}_S$$

$$A = \frac{2}{3} I_O$$

$$\int_S x^2 dm = \int_S y^2 dm = \int_S z^2 dm$$

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 3 \int_S x^2 dm = \int_S r^2 dm$$

$$\int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S (x^2 + y^2) dm = 2 \int_S x^2 dm = 2 \int_S y^2 dm = 2 \int_S y^2 dm$$

$$A = B = C = \frac{2}{3} I_O$$

- **Plaque plane de plan $(O, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S})$ – $z = 0$**

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A + B \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Démonstration :

$$z = 0$$

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S y^2 dm$$

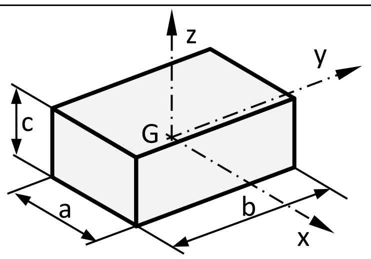
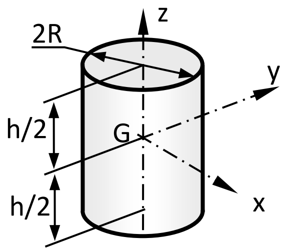
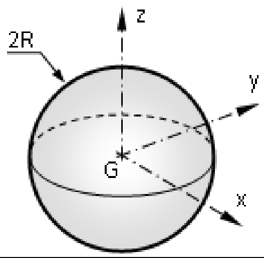
$$B = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S x^2 dm$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2) dm = A + B$$

$$D = \int_S yz dm = 0$$

$$E = \int_S xz dm = 0$$

A.II.5.b.iv Matrices d'inertie de quelques solides

	$I(G,S)=\begin{bmatrix}\frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2)\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
	$I(G,S)=\begin{bmatrix}m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2}\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
	$I(G,S)=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$

Remarque : Bien penser à exprimer les matrices d'inerties calculées sur les solides en fonction de leur masse.

A.II.5.b.v Cas d'une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle S_i de masse m_i placée en M_i telle que :

$$\overrightarrow{OM_i}=\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(M_i,S_i)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

D'après le théorème de Huygens généralisé avec M_i centre d'inertie de la masse ponctuelle, on a :

$$I(O,S_i)=I(M_i,S_i)+m_i\begin{bmatrix}{y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i\\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O,S_i)=m_i\begin{bmatrix}{y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i\\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Remarque : moment d'inertie I_Δ d'une masse ponctuelle autour d'un axe Δ, prenons $(O,\vec{z})$. Soit d la distance du point M à l'axe $(O,\vec{z})$:

$$d=\sqrt{{x_i}^2+{y_i}^2}$$

$$I_\Delta=m_i\,d^2$$

A.II.5.b.vi Matrice d'inertie d'un ensemble de solides en un même point

Soit un solide S composé de N solides S_i de centres de gravité G_i tels que $\overrightarrow{AG_i}=x_i\overrightarrow{x_S}+y_i\overrightarrow{y_S}+z_i\overrightarrow{z_S}$, de masse m_i et de matrice d'inertie autour de leur centre de gravité $I(G_i,S_i)$.

Pour déterminer la matrice d'inertie $I(O,S)$ de l'ensemble de ces solides en un point A, il faut :

- Exprimer chaque matrice d'inertie $I(A,S_i)$ en ce point à l'aide du théorème de Huygens généralisé

- Sommer les différentes matrices au même point

$$I(A,S)=\sum_{i=1}^{N}I(A,S_i)=\sum_{i=1}^{N}\left[I(G_i,S_i)+m_i\begin{bmatrix}{y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i\\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\right]$$

Remarque : pour trouver la matrice d'inertie d'un cylindre creux de rayons intérieur r et extérieur R, il suffit d'additionner les matrices d'inertie d'un cylindre plein de rayon extérieur avec sa masse, et un cylindre plein de rayon intérieur avec sa masse mais prise négativement ☺

Attention, chaque année, des élèves commettent des erreurs sur ce calcul. Soit un cylindre d'axe z, et intéressons-nous à C uniquement : On trouve par calcul intégral $C=M_t\frac{R^2+r^2}{2}$

- L'intuition nous pousse à croire que l'on devrait trouver R^2-r^2 du fait des bornes de l'intégrale, mais en réalité quand on fait apparaître la masse et que l'on remplace ρV, le – devient +
- De même, qu'en sommant les deux matrices de cylindre de masse positive et négative, ils on obtient $\frac{M_{ext}R^2-M_{int}r^2}{2}$. Il faut alors faire apparaître la masse totale pour avoir le $M\frac{R^2+r^2}{2}$…

A.II.5.c Opérations avec les matrices d'inertie

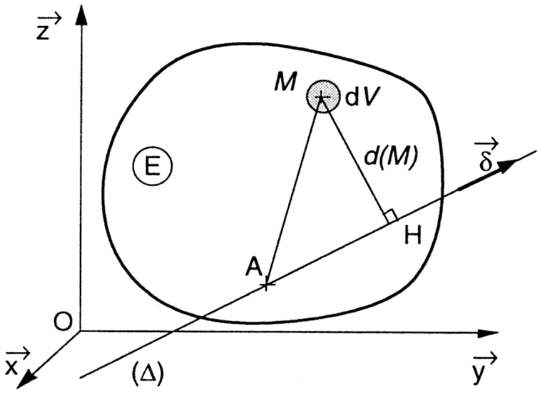
A.II.5.c.i Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Soit l'axe Δ défini par le point A et le vecteur unitaire $\vec{\delta}$. Le moment d'inertie $I_\Delta(S)$ du solide S par rapport à l'axe Δ est égal au produit scalaire du vecteur unitaire $\vec{\delta}$ et du vecteur $I(A,S)\vec{\delta}$

$$I_\Delta(S) = \vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

A sur l'axe ! ; $\vec{\delta}$ et $I(A,S)$ exprimés dans la même base

Démonstration :



$$I_\Delta(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm$$

$$= \int_S (\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{HA}^2) dm = \int_S \left[\overrightarrow{AM}^2 - \left(\overrightarrow{AM}.\vec{\delta}\right)^2\right] dm$$

$$= \int_S [(\overrightarrow{AM}^2\vec{\delta}).\vec{\delta} - (\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})(\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})] dm = \vec{\delta}.\int_S \left[(\overrightarrow{AM}^2\vec{\delta}) - \left((\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})\overrightarrow{AM}\right)\right] dm$$

$$= \vec{\delta}.\int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{AM}) dm = \vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

Avec :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

Exemple :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\vec{x_S}.I(A,S)\vec{x_S} = \vec{x_S}.\begin{bmatrix} A \\ -F \\ -E \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = A$$

A.II.5.c.ii Changement de base d'une matrice d'inertie

Lorsque l'on utilise les matrices d'inerties pour un calcul, il est obligatoire que la matrice et le vecteur avec lequel elle est utilisée soient dans la même base. Il peut donc être nécessaire d'effectuer un changement de base, soit de la matrice, soit du vecteur. Voici comment changer la base d'expression de la matrice d'inertie.

Soit P la matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2, elle présente en colonnes les composantes des vecteurs de la base B_2 exprimés dans la base B_1. Alors :

$$I(O,S)_{B_2} = P^{-1} I(O,S)_{B_1} P$$

Les bases B_1 et B_2 étant orthonormées directes, P est orthogonale, son déterminant est égal à ± 1.

On a donc :

$$P^{-1} = P^T$$