A.V. Analyse des mécanismes

Attention, pour mener à bien l'analyse des mécanismes, il convient de ne pas regrouper des inconnues cinématiques de liaisons, par exemple : $R_{4/3} + R_{3/0}$ ne doit pas être réduit à $R_{4/0}$.

A.V.1 Notations

A.V.1.a Inconnues

Soit $i_c(i)$ le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la liaison i.

Soit $i_s(i)$ le nombre d'inconnues statiques indépendantes de la liaison i.

On a : $i_c(i) + i_s(i) = 6$

Pour un mécanisme composé de L liaisons :

- On note I_c le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du mécanisme

$$I_c = \sum_{i=1}^{L} i_c(i)$$

- On note I_s le nombre d'inconnues statiques indépendantes du mécanisme.

$$I_s = \sum_{i=1}^{L} i_s(i)$$

On a :

$$I_c + I_s = 6L$$

A.V.1.b Equations

Pour un mécanisme composé de p pièces (bâti compris) et L liaisons :

- On note E_c le nombre d'équations issues de la résolution cinématique du mécanisme permettant d'écrire le système cinématique à résoudre.

$$E_c = 6\gamma = 6(\mathrm{L} - \mathrm{p} + 1)$$

- On note E_s le nombre d'équations issues de la résolution statique (dynamique) du mécanisme permettant d'écrire le système statique à résoudre.

$$E_s = 6(\mathrm{p} - 1)$$

Remarque : dans certains cours, on trouve les formules $\begin{cases} E_c = 6(\mathrm{L} - \mathrm{p}) \\ E_s = 6p \end{cases}$ qui attention, comprennent un nombre p de pièces bâti exclu !!!

A.V.2 Définitions

A.V.2.a Equations liées

Dans la suite, nous dirons d'une équation qu'elle est liée si, dans un système d'équations, elle est obtenue par combinaison linéaire des autres équations. On peut aussi parler d'équation dépendante. Une équation liée, au même titre qu'une équation $0 = 0$, traduit la diminution du rang d'un système linéaire.

Rappel : le rang d'un système linéaire est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

A.V.2.b Degré d'hyperstatisme

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme, noté h est

- le nombre d'équations inutiles (équation $0 = 0$ ou équation dont les inconnues ont toutes été déterminées) lors de la résolution du système cinématique. Il correspond à la différence entre le nombre d'équations cinématiques E_c et le rang r_c du système cinématique.

$$h = E_c - r_c$$

- le nombre d'inconnues statiques à fixer afin de déterminer toutes les inconnues statiques du système statique. Il correspond à la différence entre le nombre d'inconnues statiques I_s et le rang r_s du système statique.

$$h = I_s - r_s$$

Si $h = 0$, le mécanisme est isostatique, toutes les inconnues statiques de liaison peuvent être calculées.

Si $h \geq 1$, le mécanisme est hyperstatique, des inconnues de liaison ne peuvent être déterminées.

Remarque : si l'on trouve h<0, généralement, soit :

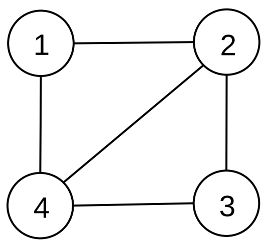
- il y a une erreur dans l'application des formules
- une mobilité (interne ?) a été oubliée

Dans le cas de mécanismes à γ chaînes cinématiques indépendantes de degré d'hyperstatisme h, on choisit γ chaînes indépendantes. Soit h_i le degré d'hyperstatisme de la chaîne indépendante i parmi celles choisies, alors : $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$

Remarque : il n'y a pas γ chaines cinématiques indépendantes uniques, et ce calcul dépend donc des chaînes choisies :

Choix 1	1241 & 2342
Choix 2	1241 & 12341
Choix 3	2342 & 12341

Toutefois, la formule reste vraie quels que soient les choix.



Tout degré d'hyperstatisme d'une chaîne cinématique d'un mécanisme est un degré d'hyperstatisme du mécanisme complet.

Il existe des degrés d'hyperstatisme qui sont issus de l'assemblage de plusieurs chaînes cinématiques, alors que chacune d'elles peut être isostatique (cf DM).

A.V.2.c Notion de Mobilité

A.V.2.c.i Mobilité

La mobilité d'un mécanisme, notée m, est

- le nombre d'inconnues cinématiques à fixer afin de déterminer toutes les inconnues cinématiques du système cinématique. Il correspond au nombre d'inconnues cinématiques minimal qu'il est nécessaire de fixer afin que le mécanisme soit entièrement immobile. C'est la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques I_c et le rang r_c du système linéaire cinématique.

$$m = I_c - r_c$$

- le nombre d'équations inutiles (équation $0 = 0$ ou équation dont les inconnues ont toutes été déterminées) lors de la résolution du système statique. Il correspond à la différence entre le nombre d'équations statiques E_s et le rang r_s du système inéaire statique

$$m = E_S - r_s$$

Un système est immobile lorsque $m = 0$.

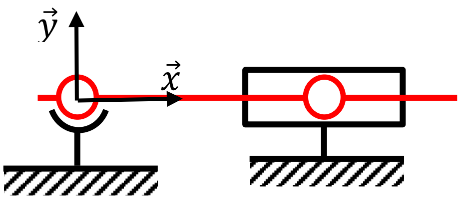
Un système est mobile de mobilité m lorsque $m > 0$.

Pour trouver les mobilités « à la main », l'idéal consiste à imaginer bloquer un premier mouvement, ce qui porte la mobilité à 1, puis de voir si d'autres pièces peuvent bouger. Si oui, on imagine bloquer un nouveau mouvement, m = m + 1, et ainsi de suite jusqu'à ce que plus rien ne puisse bouger. On a alors la mobilité du mécanisme. Attention, on parle bien de blocage de mouvement, et non de liaison. En effet, dans une liaison il peut y avoir plusieurs mouvements possibles et seul un à bloquer.

On définit deux types de mobilités rencontrées dans les mécanismes, la mobilité utile m_u et la mobilité interne m_i telles que :

$$m = m_u + m_i$$

Remarque : parfois, on peut discuter du caractère interne ou utile d'une mobilité. Ce qui compte, c'est de toutes les compter. Exemple :



La pièce peut tourner sur elle-même, on pourrait dire de la mobilité qu'elle est interne. En réalité, cela dépend de ce que réalise cette pièce comme fonction, en tournant.

A.V.2.c.ii Mobilité utile

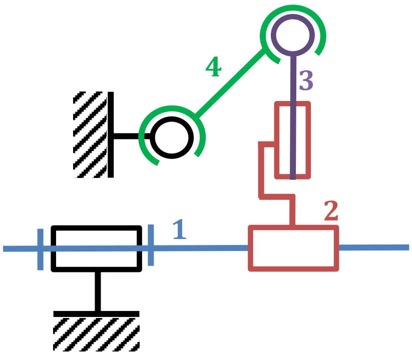
La mobilité utile, notée m_u, est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques d'entrée et ceux de sortie. Cela correspond aux mouvements souhaités du mécanisme entre l'entrée et la sortie. Généralement, ces mobilités sont les seules vues car elles correspondent à la fonction du mécanisme.

A.V.2.c.iii Mobilité interne

La mobilité interne, notée m_i, est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques des pièces internes du mécanisme. Cela correspond à des mouvements de pièces seules ou de plusieurs pièces entre elles, possible malgré le blocage des entrées correspondant aux mobilités utiles.

A.V.2.c.iv Exemple

Soit l'entrée du système via la pièce bleue en liaison pivot par rapport au bâti.



$$m_u = 1$$

$$m_i = 3$$

$$m = 4$$

On peut voir 4 mobilités :

- (1) Mouvement liant entrée et sortie : rotation de la pièce 1 induisant un mouvement particulier de translation du piston 3 dans la pièce 2, toute autre mobilité étant bloquée
- (2) Rotation sur elle-même de la bielle 4
- (3) Rotation sur lui-même du piston 3
- (4) Mouvement de plusieurs pièces entre elles : Translation de 2 sur 1 induisant un mouvement de 3 et 4, toute autre mobilité étant bloquée

Les rotations (2) et (3) sont très clairement des mobilités internes.

Le mouvement (1) est clairement la mobilité utile, faut-il que soit précisé dans l'étude que la pièce 1 impose le mouvement souhaité

Le mouvement (4) est à priori vu comme une mobilité interne. Elle peut être issue d'un oubli lors de la modélisation, par exemple un arrêt en translation de 2 horizontalement. Toutefois, s'il était précisé qu'un réglage de la position de la pièce 2 permet une modification de la loi de mouvement entrée/sortie, cette mobilité pourrait être vue comme une mobilité utile (secondaire).

A.V.2.c.v Remarques importante

A mois d'être capable de déterminer les rangs des systèmes d'équations qui sont mis en place, par la méthode mathématique sur nos systèmes relativement complexes, seule la bonne estimation personnelle des mobilités m (ou de l'hyperstatisme h) permet de mener une étude correcte des mécanismes en en déduisant le rang et donc l'autre valeur recherchée (h ou m).

Dans certains cas, la mobilité n'est pas déterminable par lecture visuelle du schéma cinématique. Il n'y a alors pas d'autre solution que le calcul du rang du système, soit cinématique, soit statique. Le système cinématique présentant moins d'équations, il est plus aisé de l'utiliser.

Généralement, les mobilités internes de pièces seules sont oubliées. Des mobilités internes liant plusieurs pièces sont très difficiles à voir et résultent généralement d'une modélisation erronée.

A.V.2.d Formules d'analyse

A.V.2.d.i Méthode cinématique

Reprenons la formule de l'hyperstatisme : $h = E_c - r_c$

Sachant que : $E_c = 6\gamma$ et $m = I_c - r_c$

$$h = m + E_c - I_c$$

Remarque : Si on sait estimer m ou h, on a l'autre grandeur sans devoir déterminer le rang r_c en utilisant I_c et E_c

A.V.2.d.ii Méthode statique

Reprenons la formule de l'hyperstatisme : $h = I_s - r_s$

Sachant que : $m = E_s - r_s$ et $E_s = 6(p-1)$

$$h = m + I_s - E_s$$

Remarque : Si on sait estimer m ou h, on a l'autre grandeur sans devoir déterminer le rang r_s en utilisant I_s et E_s

A.V.2.d.iii Bilan

Cinématique	Statique
$E_c = 6\gamma$	$E_s = 6(p-1)$
$m = I_c - r_c$	$m = E_S - r_s$
$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
$h = m + E_c - I_c$	$h = m + I_s - E_s$

A.V.2.d.iv Remarques

• **Remarque 1 : Moyen mnémotechnique**

On peut remarquer l'analogie entre les formules en statique et cinématique. Il faut échanger I et E selon la méthode choisie. Il existe un moyen mnémotechnique simple permettant de se souvenir de la formule statique, puis d'en déduire la formule cinématique. En effet, plus il y a d'inconnues statiques, plus risque d'augmenter le degré d'hyperstatisme du système (trop d'inconnues statiques).

On retient donc la formule :

$$\boldsymbol{h} = m + I_s - E_s$$

On en déduit la formule cinématique en échangeant les s en c et I et E.

$$h = m + E_c - I_c$$

• **Remarque 2 : r_c et r_s différents à priori**

Attention, r_c et r_s n'ont pas de raisons d'être égaux, bien qu'ils puissent l'être

• **Remarque 3 : formules avec valeurs absolues (à éviter)**

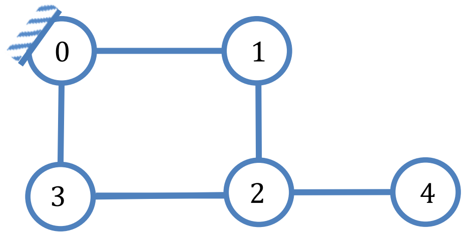
$E_c = h - r_c$	$E_s = m + r_s$
$I_c = m - r_c$	$I_s = h + r_s$
$I_c - E_c = m - h$	$I_s - E_s = h - m$

On a donc :

$$|I_c - E_c| = |I_s - E_s| = |m - h|$$

• Remarque 4 : chaines ouvertes

Soit le mécanisme représenté par le graphe des liaisons suivant :



Soient les variables sans primes ' les variables associées à la chaîne fermée 01230

Soient les variables avec prime ' les variables associées à l'isolement de la chaîne fermée 01230 à laquelle on ajoute la pièce 4 par exemple

Point de vue cinématique	Point de vue statique
A chaque pièce de la partie en chaîne ouverte ajoutée dans l'étude : - Il n'y a pas de nouvelle chaîne fermée $E_c' = E_c$ - on ajoute α (1 à 6) mobilités correspondant à autant d'inconnues cinématiques à imposer : $\begin{cases} m' = m + \alpha \\ I_c' = I_c + \alpha \end{cases}$ $h = m + E_c - I_c$ $h' = m' + I_c' - E_c'$ $h' = (m + \alpha) + E_c - (I_c + \alpha) = h$	A chaque pièce de la partie en chaîne ouverte ajoutée dans l'étude : - on ajoute 6 équations : $E_s' = E_s + 6$ - on ajoute α (1 à 6) mobilités : $m' = m + \alpha$ - on ajoute β $(\beta = 6 - \alpha)$ inconnues statiques : $I_s' = I_s + \beta = I_s + 6 - \alpha$ $h = m + I_s - E_s$ $h' = m' + I_s' - E_s'$ $h' = (m + \alpha) + (I_s + 6 - \alpha) - (E_s + 6) = h$

La démarche serait la même à chaque ajout d'une nouvelle pièce en chaîne ouverte

Conclusions :

- Toute chaîne ouverte est isostatique (démonstration similaire en enlevant la chaîne fermée initiale 01230
- S'il existe une portion de chaîne ouverte en plus d'une ou plusieurs chaînes fermées dans un système, l'étude de l'hyperstatisme de celui-ci peut n'être menée que sur la ou les chaînes fermées, sans prendre en compte la partie en chaîne ouverte.

• Remarque 5 : Ordre de grandeur

$h = E_c - r_c$ $h = I_s - r_s$	$m = I_c - r_c$ $m = E_S - r_s$
$h \leq E_c$ $h \leq I_s$	$m \leq I_c$ $m \leq E_S$

Si on trouve h=7 pour un mécanisme à 1 chaîne cinématique, il y a un problème. On a effectivement

$$h \leq 6\gamma$$

A.V.3 Analyse des mécanismes

Reprenons l'exemple de la vanne traité précédemment :

A.V.3.a Analyse cinématique

A.V.3.a.i Interprétation du système cinématique

$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{R_{3/2}} + \boldsymbol{R_{2/1}} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \boldsymbol{W_{3/1}} + \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{R_{3/2}} = 0 \end{cases}$	$W_{3/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}\frac{pas}{2\pi}$ $R_{2/1} = -\boldsymbol{R_{3/2}}$

• **Analyse des mobilités**

- Dans le cas présent, il a suffi d'imposer 1 inconnue cinématique pour exprimer toutes les autres en fonction de celle-ci. La mobilité est donc de 1.
- Si une équation met en relation **deux** inconnues cinématiques indéterminées n'intervenant pas dans d'autres équations, plus éventuellement d'autres inconnues déterminées par les autres équations, on met alors en évidence une mobilité interne de la pièce concernée selon le mouvement de l'équation correspondante.
  Exemple de la pièce 1 en double rotule avec le bâti : $\boldsymbol{P_{1/0}}^{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{P_{0/1}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$
- Si une équation traduit des relations entre inconnues cinématiques internes et indéterminées, on met en évidence une mobilité interne mettant en jeu plusieurs pièces. Cette situation est très rare, et provient en général d'une mauvaise modélisation du mécanisme étudié.

Remarque : Dans le cas d'un mécanisme à une seule pièce, la mobilité interne éventuelle peut être vue comme une mobilité utile, tout dépend du point de vue.

• **Analyse de l'hyperstatisme**

En cinématique, les degrés d'hyperstatisme sont des équations qui ne servent pas à déterminer d'inconnues.

- 4 équations $0 = 0$ traduisent 4 degrés d'hyperstatisme du mécanisme. Il convient d'identifier les équations concernées :
  - Rotation suivant $\vec{x}$
  - Rotation suivant $\vec{y}$
  - Translation suivant $\vec{x}$
  - Translation suivant $\vec{y}$
- Si une équation dont toutes les inconnues sont rouges et/ou bleues est présente, elle traduit un degré d'hyperstatisme.

Remarque : selon le choix de la base de projection des équations de la fermeture de chaîne, on fera apparaitre des équations $0 = 0$ ou liées. Le rang du système sera plus facilement appréhendé en présence d'équations $0 = 0$. Il conviendra donc de bien choisir la base de projection.

A.V.3.a.ii Formule d'analyse cinématique

L	3
p	3
γ	1
I_c	1+1+1=3
E_c	$6\gamma = 6$
m	1
h	$h = m + E_c - I_c$ $h = 1 + 6 - 3 = 4$

Doit être estimé

A.V.3.a.iii Méthode matricielle

En réalité, l'analyse sur les équations cinématiques que nous avons menée correspond à l'étude d'un système linéaire. Dans notre exemple, on a :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{3/2} + R_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ W_{3/1} + \dfrac{pas}{2\pi} R_{3/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2/1} \\ R_{3/2} \\ W_{3/1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang du système cinématique r_c est le rang de la matrice $K_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix}$

$$r_c = \mathrm{rg}(K_c) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi, quel que soit le système étudié, si l'on ne trouve intuitivement ni h, ni m, il est possible d'étudier la matrice K_c afin de trouver r_c, ce qui donnera :

$$\begin{cases} h = E_c - r_c = 6 - 2 = 4 \\ m = I_c - r_c = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Il est très certainement plus intéressant de savoir estime h ou m « à la main » pour nos applications.

Remarque : On verra que l'étude de la matrice cinématique est plus simple que celle de la matrice statique qui contient plus d'équations.

A.V.3.b Analyse statique

A.V.3.b.i Interprétation du système statique

$\begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=0 \\ \boldsymbol{Z_{1/2}}+\boldsymbol{Z_{3/2}}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=0 \\ -\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{Z_{3/2}}+\boldsymbol{C_m}=0 \end{cases}$	$\begin{cases} X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ \boldsymbol{Z_{2/3}}+\boldsymbol{F}=0 \\ L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{2/3}+M_{1/3}=0 \\ \frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{Z_{3/2}}+\boldsymbol{N_{1/3}}=0 \end{cases}$	$Z_{3/2}=\boldsymbol{F}$ $N_{1/3}=-\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{F}$ $Z_{1/2}=-\boldsymbol{F}$ $-\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C_m}=0$

• **<u>Analyse des mobilités</u>**

En statique, les mobilités sont des équations qui ne servent pas à déterminer d'inconnues.

- Une équation dont toutes les inconnues sont rouges et/ou bleues traduit une mobilité.
  - Si elle permet de mettre en relation les actions extérieures, elle traduit une mobilité utile.

$$-\frac{pas}{2\pi}\boldsymbol{F}+C_m=0$$

  - Si elle ne permet pas de mettre en relation les actions extérieures, on trouvera alors que chaque inconnue intervenant dans l'équation est nulle. Elle traduit une mobilité interne :
    - d'une pièce si toutes les inconnues de l'équation sont annulées par le seul isolement de cette pièce. Selon la base de projection, on aurait pu faire apparaître une équation $0=0$.
    - d'un ensemble de pièces si la nullité des inconnues de l'équation provient de l'isolement de plusieurs pièces.
- Si une équation $0=0$ apparaît, elle traduit une mobilité interne d'une pièce selon le mouvement de l'équation correspondante.

Remarque : selon le choix de la base de projection des équations du PFS, on fera apparaitre des équations $0=0$ ou non. Le rang du système sera plus facilement appréhendé en présence d'équations $0=0$. Il conviendra donc de bien choisir la base de projection.

• **<u>Analyse de l'hyperstatisme</u>**

- Il reste une (des) inconnue(s) non déterminées : le système est dit hyperstatique. En posant une des 3 inconnues sur X, Y, L et M, toutes les autres seront déterminées. L'hyperstatisme est dit d'ordre 4.

$$\begin{cases} X_{1/2}+X_{3/2}=X_{2/3}+X_{1/3}=0 \\ Y_{1/2}+Y_{3/2}=Y_{2/3}+Y_{1/3}=0 \\ L_{1/2}+L_{3/2}=L_{2/3}+L_{1/3}=0 \\ M_{1/2}+M_{3/2}=M_{2/3}+M_{1/3}=0 \end{cases}$$

Il convient d'identifier les inconnues concernées :

- X : Résultante suivant $\vec{x}$
- Y : Résultante suivant $\vec{y}$
- L : Moment suivant $\vec{x}$
- M : Moment suivant $\vec{y}$

A.V.3.b.ii Formule d'analyse statique

I_s	5+5+5=15
E_s	6(3-1)=12
m	1
h	$h = m + I_s - E_s$ $h = 1 + 15 - 12 = 4$

Doit être estimé

A.V.3.b.iii Méthode matricielle

De même que pour l'analyse cinématique, l'analyse sur les équations statiques que nous avons menée correspond à l'étude d'un système linéaire. Dans notre exemple, on a :

$$\begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + \boldsymbol{C_m} = 0 \end{cases} \begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} + \boldsymbol{F} = 0 \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \dfrac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{1/2} + X_{3/2} = 0 \\ Y_{1/2} + Y_{3/2} = 0 \\ Z_{1/2} + Z_{3/2} = 0 \\ L_{1/2} + L_{3/2} = 0 \\ M_{1/2} + M_{3/2} = 0 \\ -\dfrac{pas}{2\pi} Z_{3/2} = -\boldsymbol{C_m} \end{cases} \begin{cases} X_{2/3} + X_{1/3} = 0 \\ Y_{2/3} + Y_{1/3} = 0 \\ Z_{2/3} = -\boldsymbol{F} \\ L_{2/3} + L_{1/3} = 0 \\ M_{2/3} + M_{1/3} = 0 \\ \dfrac{pas}{2\pi} Z_{3/2} + N_{1/3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1/2} \\ X_{3/2} \\ X_{1/3} \\ Y_{1/2} \\ Y_{3/2} \\ Y_{1/3} \\ Z_{1/2} \\ Z_{3/2} \\ L_{1/2} \\ L_{3/2} \\ L_{1/3} \\ M_{1/2} \\ M_{3/2} \\ M_{1/3} \\ N_{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{C_m} \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang du système statique r_s est le rang de la matrice K_s

$$K_s = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Chaque colonne contenant 1 et -1 est une combinaison linéaire des colonnes ayant un 1 à la hauteur du 1 et un 1 à la hauteur du -1, on peut donc les supprimer :

$$r_s = \mathrm{rg}(K_s) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

On réorganise les colonnes afin d'améliorer la lisibilité de la matrice :

$$r_s = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Ce n'est pas nécessaire, mais on peut supprimer les lignes combinaisons linéaires d'autres lignes :

$$r_s = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{pas}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a 11 lignes linéairement indépendantes et 11 colonnes linéairement indépendantes, donc :

$$r_s = 11$$

Ainsi, quel que soit le système étudié, si l'on ne trouve intuitivement ni h, ni m, il est possible d'étudier la matrice K_s afin de trouver r_s, ce qui donnera :

$$\begin{cases} h = I_s - r_s = 15 - 11 = 4 \\ m = E_s - r_s = 12 - 11 = 1 \end{cases}$$

Il est très certainement plus intéressant de savoir estime h ou m « à la main » pour nos applications.

Remarque :

Il vaut mieux étudier la matrice du système cinématique K_c, de taille plus faible que la matrice du système statique K_s

A.V.3.c Hyperstatisme d'un système

A.V.3.c.i Equations liées – Inconnues en surnombre

Un degré d'hyperstatisme est toujours lié à un axe en résultante ou en moment.

Une mobilité interne d'une pièce est toujours liée à un axe en résultante ou en moment.

Une mobilité interne de plusieurs pièces ou utile n'est pas directement liée à un axe.

		Cinématique	Statique
Eq	0=0	$h = h + 1$ sur l'axe concerné	$m = m + 1$ m_i sur l'axe concerné
	Liées	$h = h + 1$ changement de base pour conclure	$m = m + 1$ Si m_i d'une pièce : changement de base pour conclure
Inc	Inconnue à fixer	$m = m + 1$	$h = h + 1$ sur l'axe de l'inconnue concernée

pour conclure = pour dire quel axe est concerné

En résumé :

		Cinématique	Statique
Eq	0=0 Liées	$h = h + 1$	$m = m + 1$
Inc	Inconnue à fixer	$m = m + 1$	$h = h + 1$

A.V.3.c.ii Application

Que ce soit par l'étude cinématique ou statique, on met en évidence 4 degrés d'hyperstatisme sur les équations :

- Résultante (statique) ou vitesse (cinématique) suivant $\vec{x}$
- Résultante (statique) ou vitesse (cinématique) suivant $\vec{y}$
- Moment (statique) ou rotation (cinématique) suivant $\vec{x}$
- Moment (statique) ou rotation (cinématique) suivant $\vec{y}$

Les équations de cinématique $0 = 0$ traduisent l'absence de mouvement répétée sur la direction concernée. Le mouvement est donc bloqué plusieurs fois. Ces équations traduisent une condition géométrique drastique

- de position pour les équations en vitesse ou efforts
- d'orientation pour les équations en rotation ou moments

Un défaut de position des liaisons de la chaîne ou des surfaces en contact au niveau de ces liaisons suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraîne un montage impossible si les pièces ne sont pas déformables.

Un défaut d'orientation des liaisons de la chaîne ou des surfaces en contact au niveau de ces liaisons autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraîne un montage impossible si les pièces ne sont pas déformables.

Les équations statiques présentant des inconnues indéterminées montrent que ces efforts sont en surnombre pour être calculables.

A.V.3.c.iii Estimation du degré d'hyperstatisme « à la main »

La méthode « à la main » consiste à imaginer, une par une, 6 déformations (3 en position, 3 en orientation) des pièces ou liaisons pour chaque.

Pour chaque chaîne (et non uniquement pour les chaînes indépendantes):

- effacer entièrement les liaisons des autres chaînes
- imaginer une déformation d'une pièce ou liaison selon,
  - une translation dans une direction de l'espace
  - une rotation autour d'un axe de l'espace en supposant que le système est isostatique pour chacune des 3 translations dans l'espace (point illustré dans les remarques)

  tout le reste de la chaîne étant supposé parfait et indéformable
- déterminer si le mécanisme est toujours montable sans déformer de pièces ou liaisons
  - Oui : Cette déformation ne correspond pas à un degré d'hyperstatisme
  - Non : Cette déformation correspond à un degré d'hyperstatisme suivant la direction étudiée

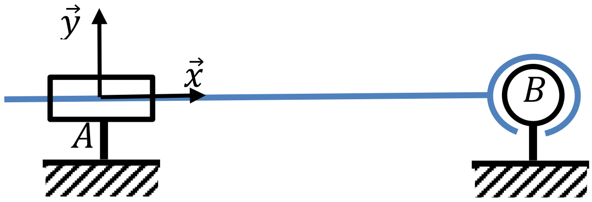
Remarques :

- Attention, dans certains cas, deux mouvements liés peuvent être responsables d'un seul degré d'hyperstatisme. Alors, par l'analyse « à la main », on peut croire que h=2 au lieu d'1, par exemple :

Le maintien de l'appui plan est lié à une translation suivant sa normale. Déplacer suivant $\vec{x}$ ou $\vec{y}$ l'une des pièces a en réalité le même effet de déplacement relatif suivant la normale des deux plans. Il faut retenir que lorsqu'il y a des contacts faisant intervenir des normales (appui plan, ponctuelle, linéaire rectiligne), il faut pouvoir aligner ces normales, puis pouvoir déplacer les deux solides dans la direction commune de ces normales afin d'assurer le contact

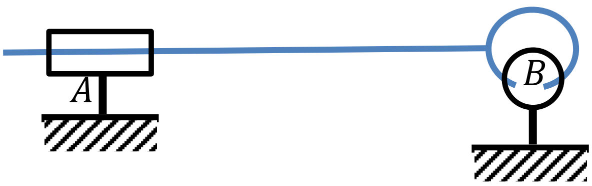
- Comme $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$, on peut passer à côté de degrés d'hyperstatisme du mécanisme complet si l'on ne regarde que des chaînes indépendantes. Par contre, on sait que l'hyperstatisme de chaque chaîne sera un degré d'hyperstatisme du mécanisme complet.
- Cas des rotations : lorsque l'on impose une déformation autour d'un axe afin de déterminer si celle-ci supporte un degré d'hyperstatisme, on imagine une rotation d'une pièce ou liaison. Attention, il est important dans ce cas d'imaginer que la chaîne étudiée ne présente pas de degrés d'hyperstatisme en translation. En effet, imposer une rotation en un lieu du mécanisme engendre forcément un mouvement des points qui ne sont pas sur l'axe de la rotation imaginée. Si le mécanisme est hyperstatique dans l'axe de la translation engendrée, nous serions amenés à avoir envie de dire que du fait de la rotation imposée, le mécanisme n'est plus montable car le point qui s'est translaté ne permet plus le montage, alors que ce n'est pas lié à l'orientation imposée par la rotation.

  Illustration :



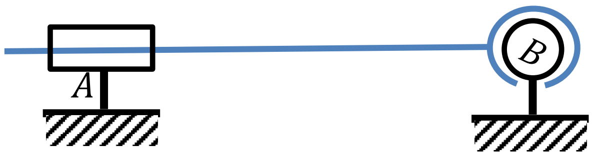
En imaginant les translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ que ce soit en A ou en B, pour une des 2 liaisons par exemple, on voit que ce mécanisme est hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Exemple :



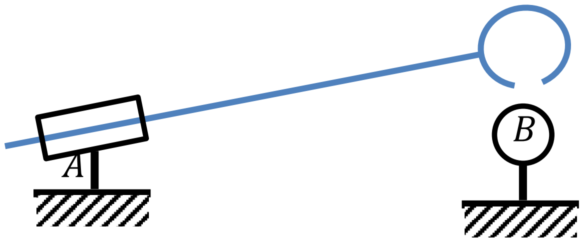
Si on imagine une quelconque rotation sur une des 3 directions en B, on voit que le mécanisme n'est pas hyperstatique en rotation.

Exemple :



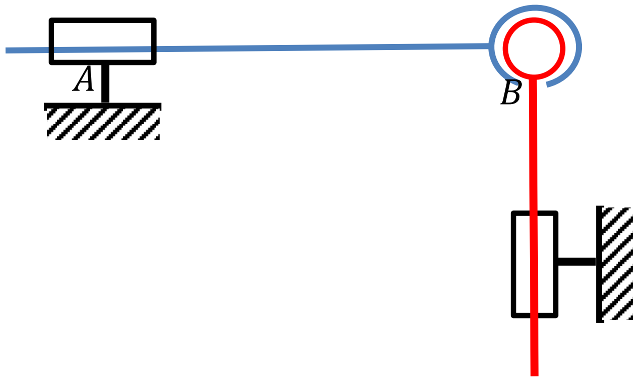
MAIS, si on imagine une rotation par exemple autour de $\vec{z}$ de la liaison en A, voilà à quoi on arrive :

Exemple :

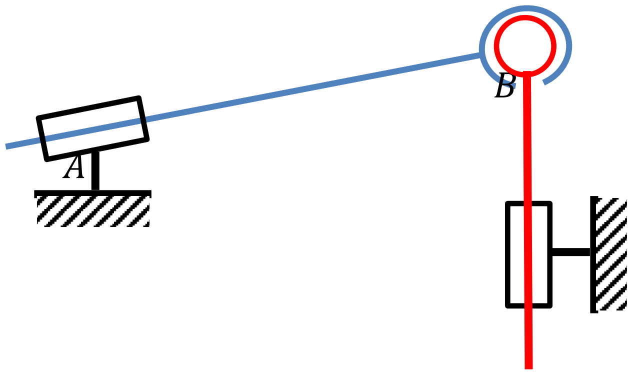


On est tenté de dire que du fait de cette rotation, le système n'est plus montable et on conclurait donc qu'il y a un degré d'hyperstatisme en rotation suivant $\vec{z}$, alors que ce n'est pas vrai. En réalité, le fait que le système soit hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$ est à l'origine de cette erreur d'interprétation.

Imaginons que le système n'est pas hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$, cela veut dire que la translation de B doit être possible suivant $\vec{y}$. Alors cette rotation n'engendre pas d'impossibilité de montage.

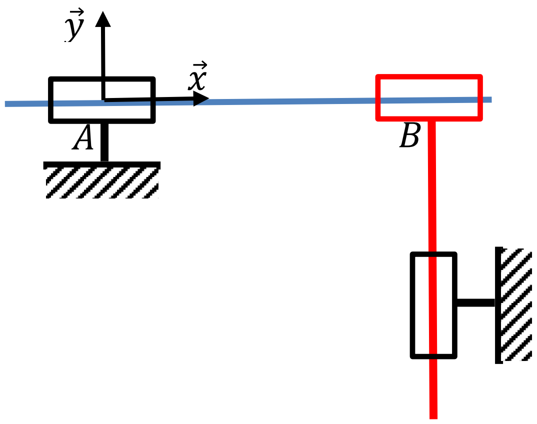


Dans ce cas, comme nous avons juste enlevé le degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$, si le mécanisme était hyperstatique en rotation autour de $\vec{z}$, on devrait le mettre en évidence avec la rotation proposée :

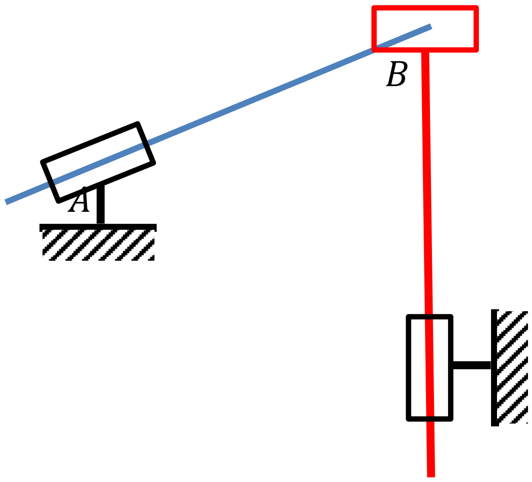


On voit bien qu'en faisant abstraction de l'hyperstatisme en translation du mécanisme, cette rotation n'empêche pas le montage.

Pour être plus claire et pour conclure, prenons l'exemple suivant :



Par rapport au système initialement étudié, nous avons supprimé le degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$ mais nous avons ajouté un degré d'hyperstatisme en rotation autour de $\vec{z}$. Imaginons la même déformation que précédemment en A en rotation autour de $\vec{z}$



Ici, on voit bien que même si le système n'est pas hyperstatique en translation suivant $\vec{y}$, la rotation proposée induit un montage impossible, à cause d'un problème d'orientation non autorisée en B.

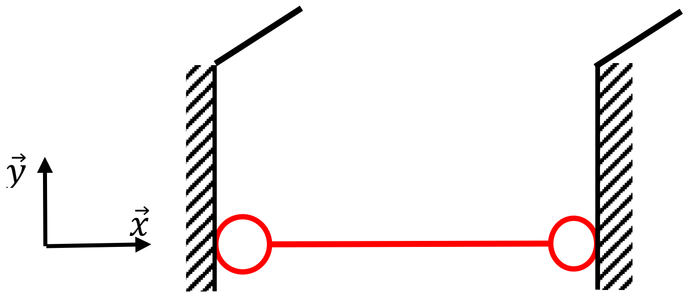
A.V.3.c.iv Mécanismes dans des positions particulières

La position particulière de certains mécanismes peut conduire :

- à un mauvais calcul d'hyperstatisme du fait de mobilités non vues
- à un changement du degré d'hyperstatisme du système du fait de la présence d'une nouvelle mobilité : $h = m + \cdots$

Prenons des exemples pour comprendre.

• **Exemple 1**



$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 5 + 6 - 10 = 1$$

Les translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ ainsi que la rotation autour de $\vec{x}$ sont possibles et bien visibles.

Si on s'arrête là, on trouve $h = -1$. Il reste donc au moins une mobilité.

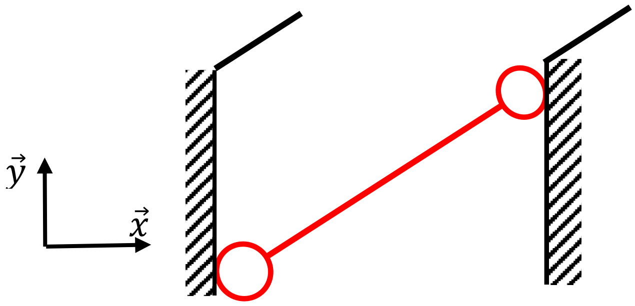
Par ailleurs, on voit bien qu'il y a un degré d'hyperstatisme en translation suivant $\vec{x}$. Comment assurer le contact de chaque côté ? On a donc à priori $h = 1$, donc on a oublié 2 mobilités.

Regardons les rotations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Sont-elles possibles ? On voit bien que si la pièce tourne autour de ces axes, on va perdre les contacts des ponctuelles. On aurait donc envie de dire que ce ne sont pas des mobilités. Alors résonnons en statique. Si on applique un couple autour de $\vec{y}$ ou $\vec{z}$, on voit bien que rien ne va reprendre ces couples dans la situation particulière exposée, que l'équilibre est impossible. On peut donc conclure que ces 2 mobilités existent, bien qu'impossibles à réaliser concrètement.

Ainsi :

$$m = 5 \text{ et } h = 1$$

Prenons maintenant le même système dans une autre position :



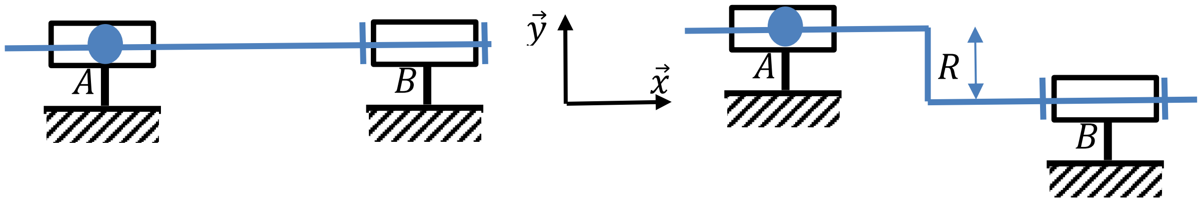
On peut remarquer que l'hyperstatisme axial a disparu, il n'y a plus aucun problèmes pour assurer le contact des deux ponctuelles.

Dans les calculs, ce qui change, c'est la mobilité. Dans cette situation, la rotation autour de $\vec{z}$ n'est plus possible

$$m = 4 \text{ et } h = 0$$

• **Exemple 2**

Soit le mécanisme suivant dans 2 positions différentes :



$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 1 + 6 - 5 = 2$$

$$h = m + E_c - I_c$$

$$= 0 + 6 - 5 = 1$$

Dans le cas de gauche, l'hyperstatisme est lié à deux translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Les 2 axes doivent être coaxiaux et cela se traduit par 2 dimensions nulles.

Dans l'autre cas, l'hyperstatisme est lié à la distance R. En fait, où que soient les deux liaisons dans l'espace et quelle que soit leur orientation, on pourra tourner la pièce afin de la mettre dans le plan contenant les deux liaisons. Il ne faudra alors que maîtriser la distance R afin d'assurer le montage.

Cet exemple illustre bien l'influence de positions particulières permettant de faire apparaître des mobilités et d'augmenter le degré d'hyperstatisme d'un système pourtant composé des mêmes pièces et liaisons.

A.V.3.d Conséquences géométriques de l'hyperstatisme

Tout degré d'hyperstatisme impose des conditions géométriques au mécanisme concerné.

Les degrés d'hyperstatisme en résultante (statique) ou translation imposent des conditions de position.

Les degrés d'hyperstatisme en moment (statique) ou rotation imposent des conditions d'orientation.

Ces conditions seront ajoutées au plan de définition à l'aide de la cotation.

Dans notre exemple, lorsque les pièces 0, 2 et 3 (par exemple) sont montées, le moindre défaut de position d'une des liaisons de la chaîne suivant les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$ entraînent une impossibilité de monter l'axe de 3 dans 0 sans déformer au moins une pièce ou liaison. Il faudra tolérancer les différentes pièces afin d'assurer une position relative des différents axes afin que les pièces se montent. Il en va de même concernant les rotations.

A.V.3.e Rendre un mécanisme isostatique

A.V.3.e.i Principe

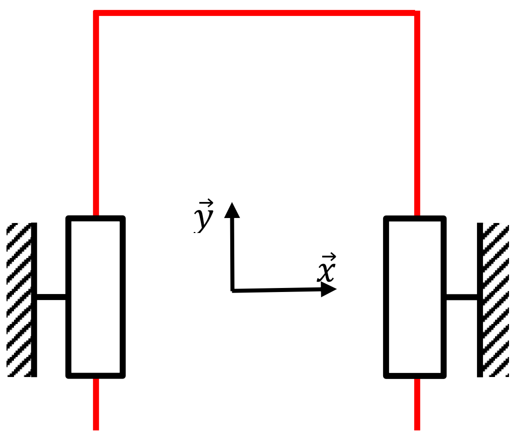
Pour rendre un système hyperstatique de degré h isostatique, il faut ajouter h degrés de liberté (DDL) **sans ajouter de mobilités internes**. Parfois, il suffit de modifier des liaisons, parfois il faut aussi ajouter des liaisons et pièces intermédiaires.

Dans les mécanismes à plusieurs chaînes cinématiques, comme $h \geq \sum_{i=1}^{\gamma} h_i$, il faut rendre isostatiques chaque chaîne du système (non pas uniquement γ chaînes). Le fait de rendre une chaîne isostatique peut diminuer le degré d'hyperstatisme d'autres chaînes.

A.V.3.e.ii Applications

• **Un premier exemple simple**

Soit le système suivant :

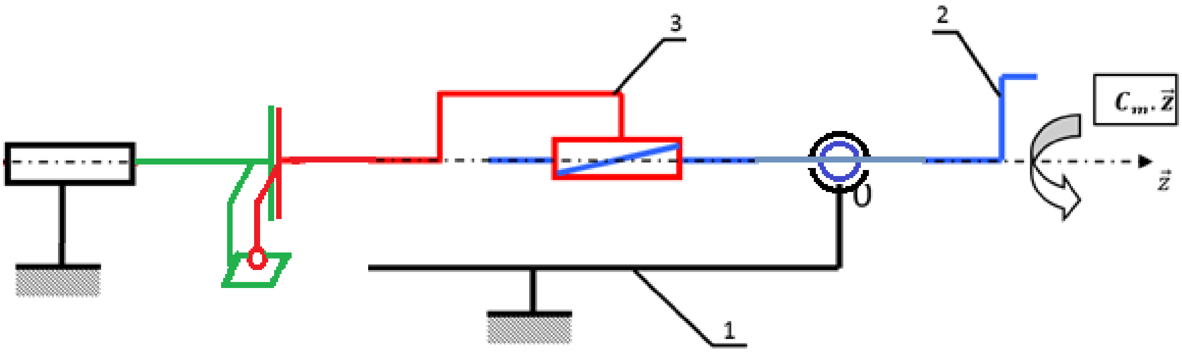


Question : calculer h, identifier l'origine des différents degrés d'hyperstatisme et proposer la solution la plus simple possible afin de rendre le système isostatique.

• **Exemple du cours**

Dans notre cas, il faut permettre les 4 mobilités manquantes sans changer le fonctionnement global du mécanisme ni ajouter de mobilités internes, par exemple :

- Permettre les 2 rotations manquantes en transformant la pivot en rotule
- Permettre les deux translations à l'aide de deux liaisons en parallèle Appui plan + Ponctuelle



Remarque : Il existe plusieurs solutions différentes. On pourrait mettre deux glissières en série à la place des deux liaisons en parallèle. Toutefois, cela induirait la présence d'une pièce supplémentaire.

Vérification de la solution proposée :

L	5
p	4
γ	2
I_c	3+1+3+5+1=13
E_c	$6\gamma = 12$
m	1
h	$h = m + E_c - I_c$ $h = 1 + 12 - 13 = 0$
I_s	3+5+3+1+5=17
E_s	6(4-1)=18
m	1
h	$h = m + I_s - E_s$ $h = 1 + 17 - 18 = 0$

Il faut donc ajouter des liaisons et des pièces.

A.V.4 Cas des problèmes plans

Dans le cas de problèmes plans de normale $\vec{z}$, à ne pas confondre avec des mécanismes 3D représentés dans le plan, on ne trouve que trois liaisons dont les nombres d'inconnues peuvent être réduits:

Glissière	Axe contenu dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$	$i_c^{2D}=1$	$\boldsymbol{i_s^{2D}=2}$
Pivot	Axe $\vec{z}$	$i_c^{2D}=1$	$\boldsymbol{i_s^{2D}=2}$
Ponctuelle	Normale dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$	$\boldsymbol{i_c^{2D}=2}$	$i_s^{2D}=1$

$$i_c^{2D}+i_s^{2D}=3 \quad ; \quad I_c^{2D}+I_s^{2D}=3L$$

L'analyse des mécanismes peut être simplifiée, en ne tenant pas compte des équations de la 3° dimension :

- Vecteur vitesse de rotation / Moment statique suivant $\vec{z}$
- Vecteur Vitesse de translation / Résultante statique suivant $\vec{x}$
- Vecteur Vitesse de translation / Résultante statique suivant $\vec{y}$

Ainsi, on a :

Cinématique	Statique
$E_c^{2D}=3\gamma$	$E_s^{2D}=3(p-1)$

Sans l'hypothèse des mécanismes plans, un mécanisme plan possède 3 degrés d'hyperstatisme supplémentaires :

$$h^{3D}=3+h^{2D}\ (\Delta)$$

Remarque : En pratique, cette formule n'est utilisée que dans le sens 2D vers 3D.

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0=0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D}=3+h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 2 inconnue cinématiques en plan, une ponctuelle 3D en a 5 en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 2 inconnues cinématiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D}=3+h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

A.V.5 Conclusion

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme s'obtient très rapidement à l'aide des formules d'analyse, si la mobilité est bien estimée « à la main ». Ensuite, il convient d'en déterminer les causes. Avec l'expérience, et en imaginant, à la main, des défauts géométriques dans le mécanisme, il devient possible de les déterminer et de proposer des améliorations très rapidement.

L'utilisation des méthodes de résolution cinématique et statique/dynamique permettent d'étudier les systèmes d'équations et de déterminer m et h. Ces méthodes sont très souvent coûteuses en temps, mais permettent d'appréhender la mobilité parfois difficile à déterminer. Il est préférable dans ce cas d'effectuer la méthode cinématique qui fera généralement apparaître moins d'équations.

Un mécanisme hyperstatique n'est pas forcément un mauvais mécanisme. Cependant, l'hyperstatisme doit être traité correctement. S'il est voulu, on cherche en général à créer un mécanisme plus résistant / robuste, ou à obtenir un fonctionnement sans jeu. S'il n'est pas voulu, il faut envisager une reconception afin de l'éviter. En général, l'hyperstatisme est trouvé dans les mécanismes transmettant de fortes puissances.

D'un point de vue statique, l'hyperstatisme correspond au fait que certains efforts sont repris plusieurs fois par différentes liaisons. Les efforts se répartissant sur plus de liaisons que nécessaire, il est donc plus résistant à dimensionnement équivalent. Toutefois, ne connaissant pas la répartition des efforts, l'hyperstatisme peut faire apparaître des efforts/pressions locales dans des liaisons qui ne peuvent les supporter, et apporter une usure prématurée. De même, des contraintes internes dans les pièces apparaissent alors même qu'aucun effort extérieur n'est exercé sur le mécanisme.

D'un point de vue géométrique, l'hyperstatisme apporte des conditions géométriques à respecter afin que les contacts soient réalisés comme prévu et que le montage soit possible. La cotation fonctionnelle des éléments du mécanisme joue alors un rôle important sur les efforts dans les liaisons et les pièces. Il est nécessaire de contrôler précisément

- la position des liaisons au travers de la géométrie des pièces
- la géométrie des pièces au travers de la géométrie des liaisons
- la déformation des pièces

Un mécanisme hyperstatique composé de pièces indéformables réelles présentant des défauts n'est pas montable.

Un mécanisme isostatique se monte simplement, sans génération de contraintes internes, et les exigences géométriques de conception sont fortement diminuées.

Il est possible de modifier un mécanisme hyperstatique afin de le rendre isostatique, mais cela induit

- la modification de liaisons
- et/ou l'ajout de liaisons et de pièces intermédiaires

La levée de l'hyperstatisme sera abordée dans le chapitre de résistance des matériaux. En effet, en prenant en compte la déformation des pièces, il devient possible de déterminer les efforts inconnus.