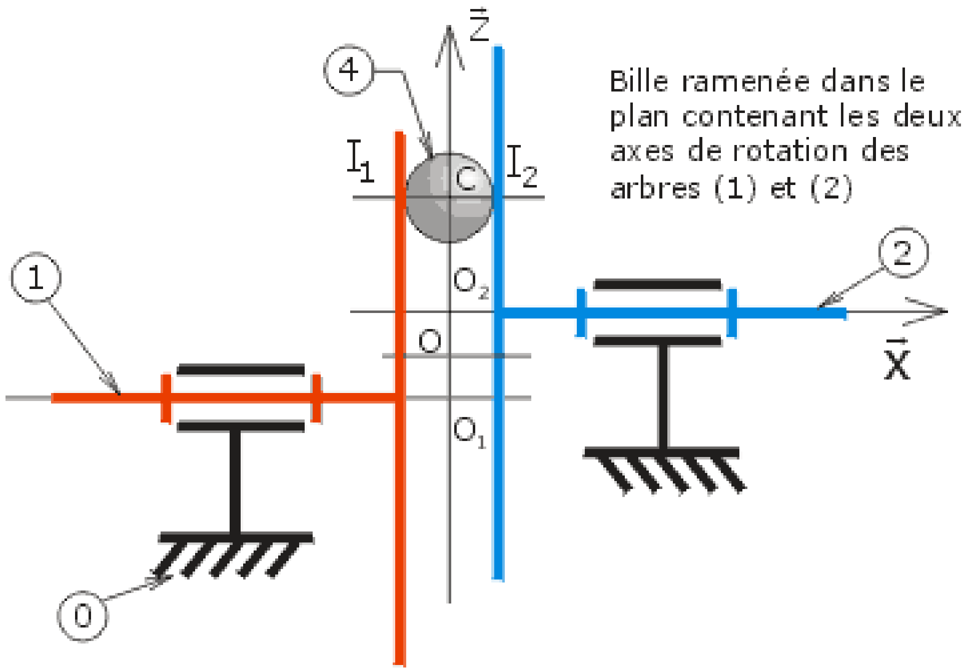
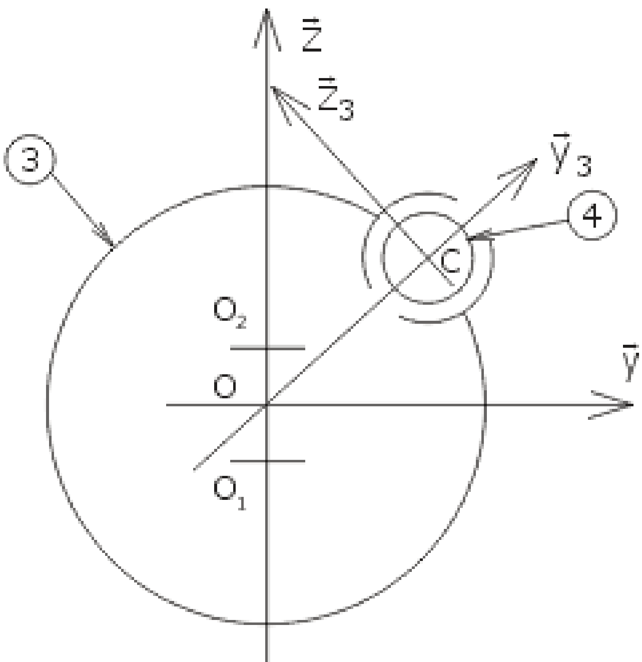
Enoncé

D'après sujet ENS cachan de 1985

Le mécanisme a pour entrée un arbre (1) en liaison pivot $(O_1,\vec{x})$ avec un bâti (0) . Cet arbre est muni d'un plateau en contact avec les billes d'une butée à billes centrée en O . L'arbre de sortie (2), lui-même muni d'un plateau, en liaison pivot $(O_2,\vec{x})$ par rapport à (0), est aussi en contact avec les billes de la butée (3) . Lors du mouvement des arbres, les billes ont un mouvement satellitaire par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$. Ce mouvement est imposé par la cage (3) qui contraint le centre C de chaque bille à une trajectoire circulaire de centre O dans le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$. Cette cage (3) peut être déplacée suivant l'axe $(O,\vec{z})$ et permet de ce fait le réglage du rapport de vitesse entrée/sortie . On note $\overrightarrow{O_1O}=k.\vec{z}$





$\overrightarrow{O_1O_2} = h.\vec{z} = \overrightarrow{cte}$

$\overrightarrow{O_1O} = k.\vec{z}$

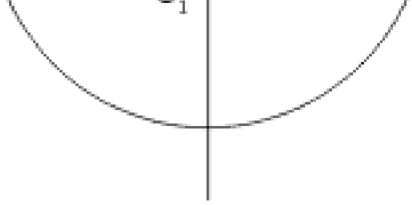
$\overrightarrow{OC} = R.\vec{y}_3$

rayon de la bille (4) $=r$

$\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0}.\vec{x}$

$\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{2/0}.\vec{x}$

$\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{3/0}.\vec{x}$



$\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{2/0}.\vec{X}$

$\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{3/0}.\vec{X}$

(1) Traduire le non glissement aux points de contact I_1 et I_2

(2) Déterminer le rapport de vitesse $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du paramètre de réglage k

---

Solution

(1) Etudions le non glissement en I_1 :

En I_1 on peut écrire:

$$\vec{V}(I_1 \in 1/4) = \vec{0}$$

En utilisant la propriété de composition des vitesses on a en I_1 :

$$\vec{V}(I_1 \in 1/4) = \vec{V}(I_1 \in 1/0) + \vec{V}(I_1 \in 0/4) = \vec{0}$$

Ce qui se traduit par
$$\underbrace{\vec{V}(I_1 \in 1/0)}_{\underbrace{\vec{V}(O_1 \in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{I_1O_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}} = \underbrace{\vec{V}(I_1 \in 4/0)}_{\vec{V}(C \in 4/0) + \overrightarrow{I_1C} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}}$$

On obtient donc $\boxed{\overrightarrow{I_1O_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{V}(C \in 4/0) + \overrightarrow{I_1C} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}}$ 1)

Etudions le non glissement en I_2 :

En I_2 on peut aussi écrire:

$$\vec{V}(I_2 \in 2/4) = \vec{0}$$

En utilisant la propriété de composition des vitesses on a en I_2 :

$$\vec{V}(I_2 \in 2/4) = \vec{V}(I_2 \in 2/0) + \vec{V}(I_2 \in 0/4) = \vec{0}$$

Ce qui se traduit par :

$$\overbrace{\underbrace{\vec{V}(O_2 \in 2/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{I_2O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}}^{\vec{V}(I_2 \in 2/0)} = \overbrace{\vec{V}(C \in 4/0) + \overrightarrow{I_2C} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}}^{\vec{V}(I_2 \in 4/0)}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{I_2O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{V}(C \in 4/0) + \overrightarrow{I_2C} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}} \quad 2)$$

2 Pour établir la relation $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$, remarquons que le centre C de la bille est astreint à décrire une trajectoire circulaire de centre O dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$. On déduit donc d'après la composition des vitesses :

$$\vec{V}(C \in 4/0) = \overbrace{\underbrace{\vec{V}(O \in 3/0)}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{CO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}}_{-R.\vec{y}_3 \wedge \omega_{3/0}.\vec{x}}}^{\vec{V}(C \in 3/0)} = R.\omega_{3/0}.\vec{z}_3$$

En reprenant les expressions 1) et 2) de la question 1, et en sommant ces expressions terme à terme on obtient :

$$\overrightarrow{I_1O_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{I_2O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = 2.\vec{V}(C \in 4/0) \text{ car } \overrightarrow{I_1C} + \overrightarrow{I_2C} = \vec{0}$$

En explicitant cette relation il vient:

$$\underbrace{\left(r.\vec{x}-R.\vec{y}_3-k.\vec{z}\right)\wedge\left(\omega_{1/0}.\vec{x}\right)}_{\omega_{1/0}.\left(R.\vec{z}_3-k.\vec{y}\right)}+\underbrace{\left(-r.\vec{x}-R.\vec{y}_3+\left(h-k\right).\vec{z}\right)\wedge\left(\omega_{2/0}.\vec{x}\right)}_{\omega_{2/0}.\left(R.\vec{z}_3+\left(h-k\right).\vec{y}\right)}=2.R.\omega_{3/0}.\vec{z}_3$$

En projection sur la direction $\vec{y}$, nous obtenons : $-k.\omega_{1/0}+\left(h-k\right)\omega_{2/0}=0$. Le rapport entrée/sortie est donc : $\boxed{\dfrac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}=\dfrac{k}{h-k}}$