

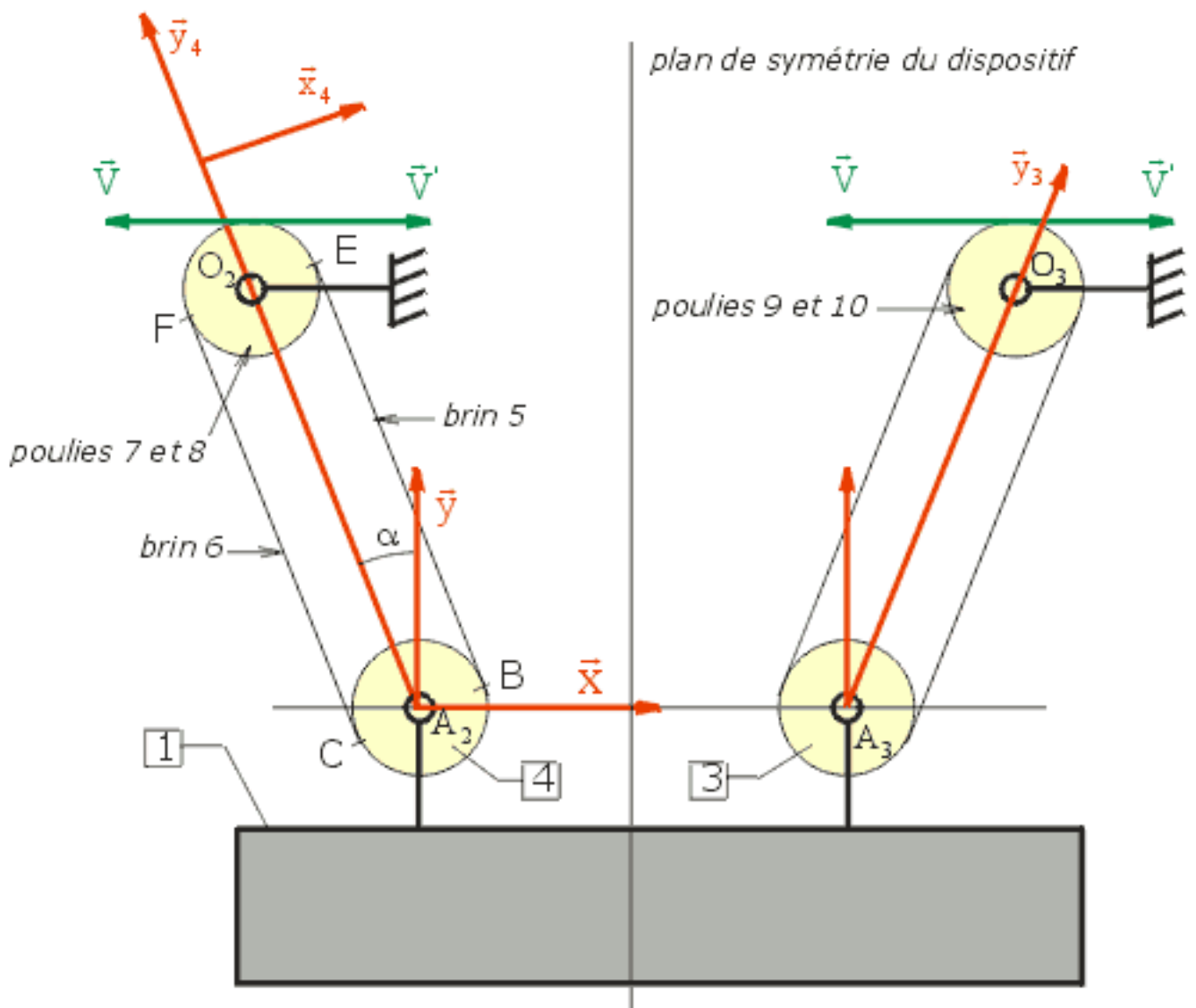
Énoncé

Le variateur représenté est un mécanisme permettant d'obtenir une variation de vitesse entre un arbre moteur (1) et un arbre récepteur (2). Ces deux arbres sont en liaison pivot par rapport au bâti (0) d'axes respectifs (O_1, \vec{x}_1) et (O_2, \vec{x}_2) . La transmission de puissance s'effectue par l'intermédiaire d'un galet biconique (3). Celui-ci est en liaison pivot d'axe (O_3, \vec{x}_0) avec un support (4). Ce support est lui-même en liaison pivot (O_4, \vec{z}_0) avec la pièce (5), non représentée, qui peut être déplacée suivant l'axe (O_4, \vec{y}_0) par rapport au bâti. Le positionnement de l'axe (O_4, \vec{z}_0) (Par l'intermédiaire d'un système vis/écrou non représenté) détermine un rapport de vitesse entre les arbres d'entrée et de sortie.

Le galet biconique (3) est en liaison linéique rectiligne de direction \vec{y}_0 avec :

- * Le plateau (P_1) lié à l'arbre (1). Le contact entre (1) et (3), de longueur $2.\ell_1$ est centré au point M.
- * Le plateau (P_2) lié à l'arbre (2). Le contact entre (2) et (3), de longueur $2.\ell_2$ est centré au point M'

Les points M et M' ainsi que O_3 sont alignés suivant la direction \vec{x}_0 .



Le paramétrage utilisé est le suivant :

$$(O_1, \vec{x}_1) = (O_1, \vec{x}_0)$$

$$(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta_1$$

$$(O_2, \vec{x}_2) = (O_2, \vec{x}_0)$$

$$(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta_2$$

$$\vec{z}_0 = \vec{z}_0^0$$

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_0^0) = (\vec{y}_0, \vec{y}_0^0) = \alpha$$

$$(O_3, \vec{x}_3) = (O_3, \vec{x}_0^0)$$

$$(\vec{y}_0^0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0^0, \vec{z}_3) = \theta_3$$

La position relative des plateaux (P_1) et (P_2) est définie par l'écartement b et l'entraxe $2.a$. La position du point O_3 est telle que sa distance aux deux plateaux est identique. On a

$\overrightarrow{O_2 O_3} \cdot \vec{y}_0 = a + r$. Le paramètre de variation de vitesse étant dans ce cas r ($0 < r < a$).

On demande :

① A partir des paramètres introduits, de déterminer les vecteurs vitesses de rotations :

$$\vec{\Omega}_{1/0}, \vec{\Omega}_{2/0}, \vec{\Omega}_{3/0}, \vec{\Omega}_{3/1}, \vec{\Omega}_{3/2}$$

② On suppose que dans un premier temps, le contact entre les galets et les plateaux se fait ponctuellement aux points M et M'. Le contact est tel que la condition de roulement sans glissement est satisfaite aux points M et M'.

2.1 Etablir les expressions des vecteurs vitesses : $\vec{V}(M \in 1/0), \vec{V}(M' \in 2/0), \vec{V}(M \in 3/0),$

$$\vec{V}(M' \in 3/0)$$

2.2 En traduisant les conditions de roulement sans glissement aux points M et M', de déterminer l'expression du rapport de vitesse $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ en fonction du paramètre r et des données du problème. On a

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 \text{ et } \vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \vec{x}_0.$$

2.3 Déterminer le vecteur $\vec{\Omega}_{3/0}$ et son module en fonction de a, b, r et $\dot{\theta}_2$.

2.4 Tracer la courbe représentative de la variation du rapport $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$. Constatations ?

③ Les contacts en M et M' sont considérés maintenant comme linéiques rectilignes. On désigne par P et P' un point courant du segment de contact respectivement entre l'arbre (1) et le galet (3), et entre l'arbre (2) et le galet (3). On pose $\overrightarrow{MP} = -\lambda_P \cdot \vec{y}_0$ et $\overrightarrow{M'P'} = \lambda_{P'} \cdot \vec{y}_0$ avec $|\lambda_P| \ll a$ ainsi que $|\lambda_{P'}| \ll a$.

3.1 Déterminer les vitesses $\vec{V}(P \in 1/0), \vec{V}(P \in 3/0), \vec{V}(P' \in 2/0)$ et $\vec{V}(P' \in 3/0)$

3.2 Dédire les vitesses de glissement en P et P' : $\vec{V}(P \in 3/1)$ et $\vec{V}(P' \in 3/2)$ en fonction des

seules quantités : $a, r, \lambda_P, \lambda_{P'}, \cos \alpha, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$

④ On suppose maintenant l'existence de deux points de contacts G1 et G2 entre le galet et les plateaux, tel qu'en ces points il y ait roulement sans glissement. On pose : $\overrightarrow{MG1} = -\lambda_{G1} \cdot \vec{y}_0$ et

$$\overrightarrow{MG2} = \lambda_{G2} \cdot \vec{y}_0.$$

4.1 Dans le cas où $r = 0$, déterminer la répartition des vitesses de glissement le long des

segments de contact

4.2 Dans le cas où $r \neq 0$, $\lambda_{G1} < 0$, établir et représenter la répartition des vitesses de glissement le long du segment de contact entre (3) et (R_1). Donner alors l'expression de la vitesse de glissement maximale.

Solution

1 D'après le paramétrage proposé, on déduit les vecteurs vitesses de rotation :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/0} + \vec{\Omega}_{0/1} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_3 - \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{3/2} = \vec{\Omega}_{3/0} + \vec{\Omega}_{0/2} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_3 - \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$$

2.1 En utilisant la relation liant les vitesses des points d'un même solide, nous avons :

$$\vec{V}(M' \in 2/0) = \vec{V}(O_2 \in 2/0) + \overrightarrow{M'O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = (a+r) \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(M \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O_1 \in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{MO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -(a-r) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(M \in 3/0) = \underbrace{\vec{V}(O_3 \in 3/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{MO_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = -\frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(M' \in 3/0) = \underbrace{\vec{V}(O_3 \in 3/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{M'O_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(M' \in 3/0) = \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0}$$

2.2 Traduisons le non glissement en M et M' :

Le non glissement en M se traduit par :

$$\vec{V}(M \in 3/1) = \vec{0} = \vec{V}(M \in 3/0) + \vec{V}(M \in 0/1)$$

$$\vec{V}(M \in 3/0) = \vec{V}(M \in 1/0)$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0 = -(a-r) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \frac{2 \cdot (a-r)}{b \cdot \sin \alpha} \cdot \dot{\theta}_1 \quad (1)$$

Traduisons à présent le non glissement en M' :

$$\vec{V}(M' \in 3/2) = \vec{0} = \vec{V}(M' \in 3/0) + \vec{V}(M' \in 0/2)$$

$$\vec{V}(M' \in 3/0) = \vec{V}(M' \in 2/0)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0 = (a+r) \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_3 = \frac{2 \cdot (a+r)}{b \cdot \sin \alpha} \cdot \dot{\theta}_2 \quad (2)$$

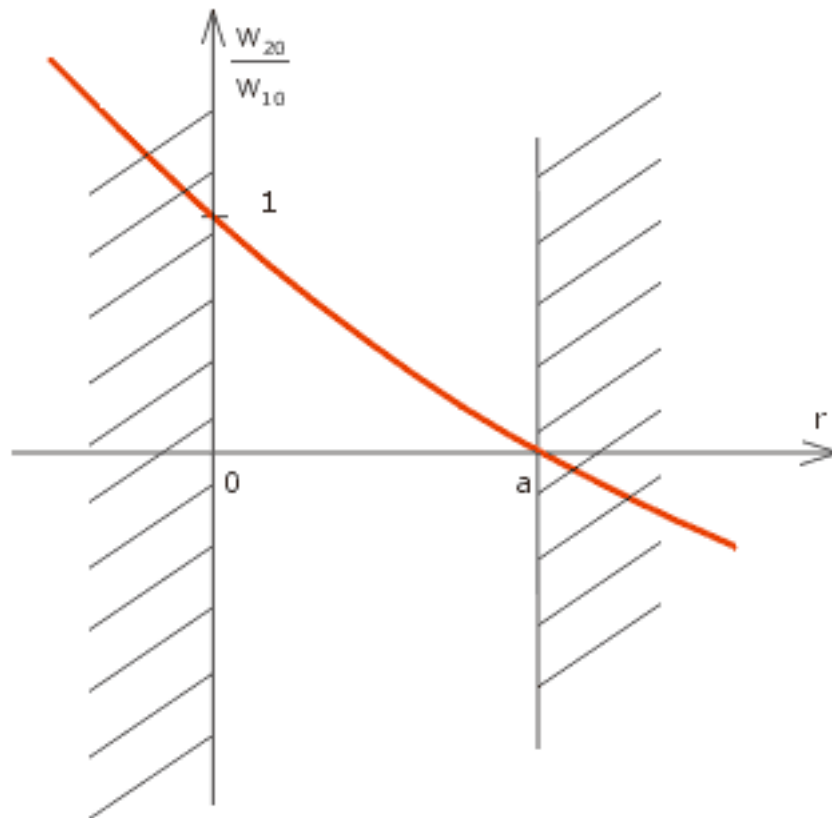
En combinant (1) et (2) on déduit le rapport de vitesse
$$\boxed{\frac{w_{20}}{w_{10}} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{a-r}{a+r}}$$

2.3 A partir de la relation précédente (2) et du fait que $\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_3$, on déduit :

$$\boxed{\dot{\theta}_3 = \frac{2 \cdot (a+r)}{b \cdot \sin \alpha} \cdot \dot{\theta}_2 = \frac{(a+r) \cdot \sqrt{b^2 + 4 \cdot a^2}}{a \cdot b} \cdot \dot{\theta}_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\Omega}_{3/0} = \frac{(a+r) \cdot \sqrt{b^2 + 4 \cdot a^2}}{a \cdot b} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_3}$$

avec $\sin \alpha = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{b^2 + 4 \cdot a^2}}$

2.4 Pour r variant sur (Q, \vec{y}_0) la courbe de variation du rapport $\frac{w_{20}}{w_{10}}$ est la suivante :



Remarques : Pour la plage de variation considérée le mécanisme a un rapport de variation de vitesse sortie/entrée inférieur à 1. C'est donc un réducteur. De plus, les arbres d'entrée et de sortie ont même sens de rotation.

3.1 Déterminons les différents vecteurs vitesses :

$$* \vec{V}(P \in 1/0) = \vec{V}(M \in 1/0) + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Omega}_{10} = -(a-r) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 + \lambda_p \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(P \in 1/0) = (-a+r-\lambda_p) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0}$$

$$* \vec{V}(P \in 3/0) = \vec{V}(M \in 3/0) + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Omega}_{30} = -\left(\frac{b}{2} \cdot \sin \alpha\right) \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0 + \lambda_p \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(P \in 3/0) = -\left(\underbrace{\frac{b}{2} \cdot \sin \alpha + \lambda_p \cdot \cos \alpha}_{a \cdot \cos \alpha}\right) \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_0}$$

De même

$$* \vec{V}(P' \in 2/0) = (a + r + \lambda_{P'}) \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

$$* \vec{V}(P' \in 3/0) = \left(\frac{b}{2} \sin \alpha + \lambda_{P'} \cos \alpha \right) \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

3.2 Les vitesses de glissement sont déterminées à partir de :

* $\vec{V}(P \in 3/1) = \vec{V}(P \in 3/0) - \vec{V}(P \in 1/0)$. Ces dernières vitesses viennent d'être déterminées et

l'on trouve donc :

$$\vec{V}(P \in 3/1) = \left((a + \lambda_P) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha) - r \dot{\theta}_1 \right) \vec{z}_0$$

* De même on a $\vec{V}(P' \in 3/2) = \vec{V}(P' \in 3/0) - \vec{V}(P' \in 2/0)$ et l'on trouve donc :

$$\vec{V}(P' \in 3/2) = \left((a + \lambda_{P'}) (-\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \cos \alpha) - r \dot{\theta}_2 \right) \vec{z}_0$$

4.1 Dans le cas où $r = 0$, il existe un point G1 tel qu'en G1 on a $\vec{V}(G1 \in 3/1) = \vec{0}$. Or d'après

l'expression de $\vec{V}(P \in 3/1) = \left((a + \lambda_P) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha) - r \dot{\theta}_1 \right) \vec{z}_0$ exprimée précédemment on

peut déduire que $\vec{V}(G1 \in 3/1) = \left((a + \lambda_{G1}) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha) - \underbrace{r}_{0} \dot{\theta}_1 \right) \vec{z}_0 = \vec{0}$. Cette relation

vectorielle est vérifiée pour $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha = 0$ car $a + \lambda_{G1} > 0$. On peut donc conclure que pour

tout point P de contact entre le galet (3) et le plateau (P_1), il y a roulement sans glissement car s'il

existe un point G1 à vitesse de glissement nulle on a alors $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha = 0$ et donc tout point P de

contact a une vitesse de glissement nulle. On peut faire le même raisonnement en G2 avec

$a + \lambda_{P'} > 0$ et $r \dot{\theta}_2 = 0$. Tout point de contact entre le galet et le plateau (P_2) a une vitesse de

glissement nulle.

4.2 Dans le cas où $r \neq 0$, si l'on étudie le contact entre (3) et (P_1), on a en G1

$\vec{V}(G1 \in 3/1) = \left((a + \lambda_{G1}) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha) - r \dot{\theta}_1 \right) \vec{z}_0 = \vec{0}$ ce qui implique donc que

$(a + \lambda_{G1}) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \cos \alpha) = r \dot{\theta}_1$. On aura en tout point P de la ligne de contact une vitesse de

glissement : $\vec{V}(P \in 3/1) = \left((a + \lambda_P) \cdot \frac{r}{(a + \lambda_{G1})} - r \right) \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{r \cdot (\lambda_P - \lambda_{G1})}{(a + \lambda_{G1})} \right) \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$. Cette

vitesse s'annule pour $\lambda_P = \lambda_{G1}$. Elle sera maximale pour λ_{G1} et λ_P opposés ainsi que pour λ_P maximal ($|\lambda_P| = \ell_1$). La répartition de vitesse est la suivante :

