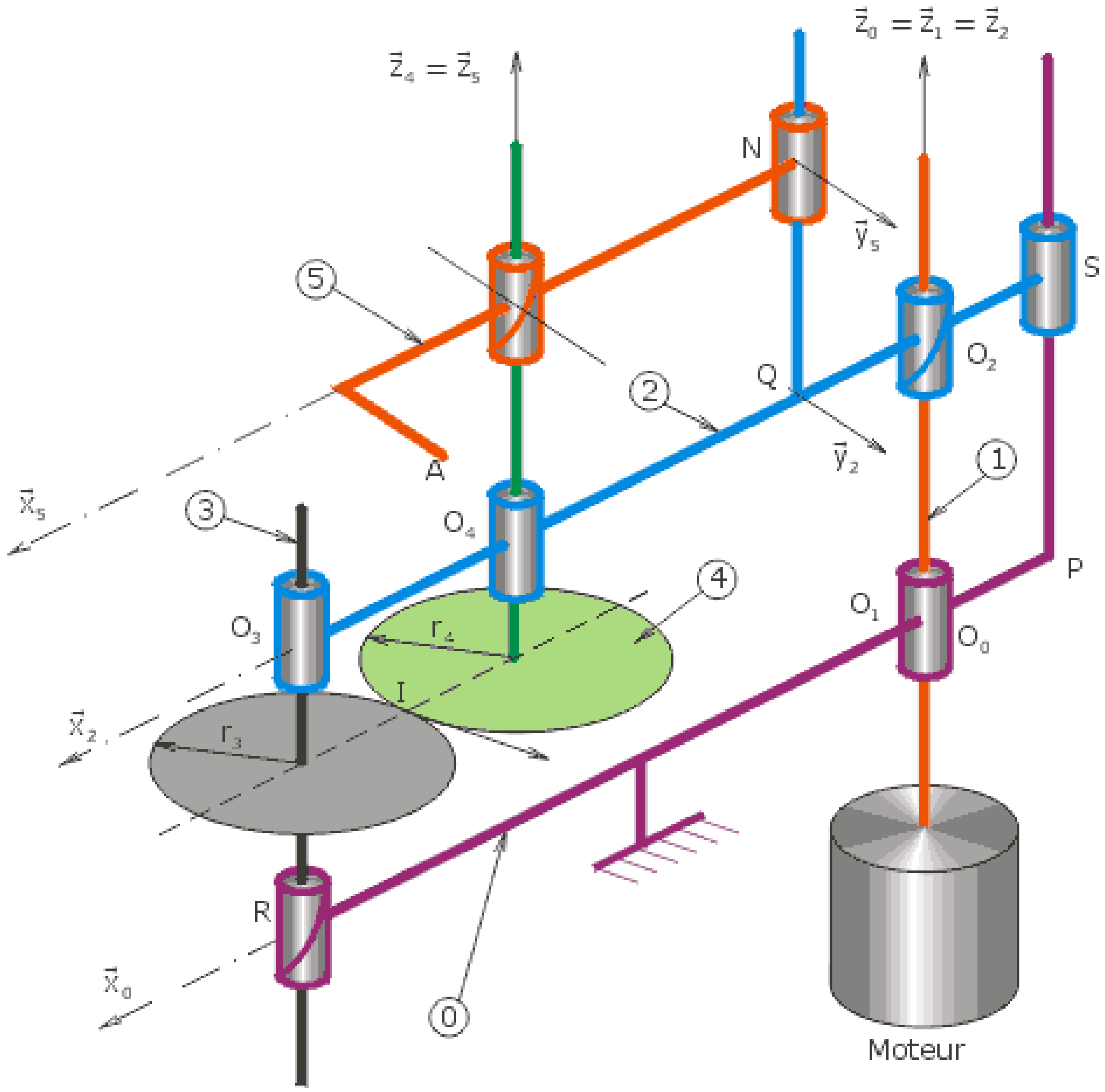
Enoncé

D'après ENS Cachan 1990

L'étude porte sur un mécanisme élévateur s'insérant dans une chaîne de production automobile. Ce dispositif permet le transfert d'un sous ensemble de voiture au niveau d'un poste d'assemblage. Le schéma ci-dessous, est un schéma cinématique décrivant le fonctionnement de ce dispositif de transfert.



* On associe à chaque solide (i) un repère $R_i\left(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i\right)$

* Les liaisons sont les suivantes :

– *liaison pivot entre* 1 *et* 0 *d'axe* $\left(O_1,\vec{z}_0\right)$ *avec* $\overrightarrow{O_0O_1}=\vec{0}$

$- \; liaison \; pivot \; glissant \; entre \; 2 \; et \; 0 \; d'axe \left(P, \vec{z}_0\right) \; avec \; \overrightarrow{O_0P} = a_2.\vec{x}_0$

$- \; liaison \; glissière \; hélicoidale \; entre \; 2 \; et \; 1 \; d'axe \left(O_2, \vec{z}_1\right) \; de \; pas : p_1 \quad avec \; \overrightarrow{O_1O_2} = \mu.\vec{z}_1$

$- \; liaison \; glissière \; hélicoidale \; entre \; 3 \; et \; 0 \; d'axe \left(R, \vec{z}_0\right) \; de \; pas : p_0 \quad avec \; \overrightarrow{O_0R} = a_3.\vec{x}_0$

$- \; liaison \; pivot \; entre \; 4 \; et \; 2 \; d'axe \left(O_4, \vec{z}_2\right) \quad avec \; \overrightarrow{O_2O_4} = a_4.\vec{x}_2$

$- \; liaison \; pivot \; glissant \; entre \; 5 \; et \; 2 \; d'axe \left(Q, \vec{z}_2\right) \; avec \; \overrightarrow{O_4Q} = a_5.\vec{x}_2$

$- \; liaison \; ponctuelle \; en \; I \; type \; engrenage \; entre \; 4 \; et \; 3 \quad de \; rayons \; primitifs \; r_3 \; et \; r_4$

$- \; liaison \; glissière \; hélicoidale \; entre \; 5 \; et \; 4 \; d'axe \left(O_5, \vec{z}_4\right) \; de \; pas : p_4 \quad avec \; \overrightarrow{O_4O_5} = \lambda.\vec{z}_4$

$- \; liaison \; pivot \; entre \; 3 \; et \; 2 \; d'axe \left(O_3, \vec{z}_2\right) \quad avec \; \overrightarrow{O_2O_3} = a_3.\vec{x}_2$

* Le torseur cinématique du mouvement du solide (i) par rapport au solide (j) sera noté :

$$_M\left\{\mathcal{V}_{i/j}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c|c} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array}\right\}_{(-,-,-)} = {}_M\left\{\begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/j} \\ \vec{V}_{M\in i/j} \end{array}\right\}$$

1 Exprimer le torseur $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$ dans le repère R_2 et préciser la relation liant r_{21} et w_{21} en précisant les unités des différents paramètres.

2 Préciser les torseurs cinématiques associés aux liaisons.

3 En considérant les chaînes fermées de solides : $\{0,1,2,0\}$, $\{0,2,3,0\}$, $\{2,3,4,2\}$ et $\{2,4,5,2\}$, écrire les relations liant les paramètres cinématiques.

4 Exprimer tous les paramètres cinématiques en fonction du paramètre d'entrée r_{10} et de P_0 , P_1 , P_4 *et des rayons* r_3 , r_4 .

5 Déterminer en fonction des paramètres r_{10} , P_0 , P_1 , P_4 *et des rayons* r_3 , r_4 le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}_{5/0}\right\}$.

A quelles conditions a-t-on $w_{20} = w_{52}$?

Solution

1 Le torseur cinématique de la liaison glissière hélicoïdale s'écrit :

$$\forall M \in (O_0,\vec{z}_0)\left\{\vartheta_{2/1}\right\} = \underset{\forall M \in (O_0,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)} \quad \text{avec } w_{21} = \frac{p_1}{2.\pi}.r_{21}$$

2 Les torseurs cinématiques des liaisons sont les suivants :

$$\left\{\vartheta_{1/0}\right\} = \underset{\forall M \in (O_0,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{2/0}\right\} = \underset{\forall M \in (S,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{20} & w_{20} \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{3/0}\right\} = \underset{\forall M \in (R,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{30} & w_{30} \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)} \quad \text{avec } w_{30} = \frac{p_0}{2.\pi}.r_{30}$$

$$_I\left\{\vartheta_{3/4}\right\} = \underset{I}{\left\{\begin{array}{c|c} p_{34} & 0 \\ q_{34} & v_{34} \\ r_{34} & w_{34} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)} \quad \text{avec } \vec{V}(I \in 3/4) = \vec{0}$$

$$\left\{\vartheta_{2/1}\right\} = \underset{\forall M \in (O_0,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)} \quad \text{avec } w_{21} = \frac{p_1}{2.\pi}.r_{21}$$

$$\left\{\vartheta_{2/3}\right\} = \underset{\forall M \in (O_3,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{23} & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{4/2}\right\} = \underset{\forall M \in (O_4,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{42} & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{5/4}\right\} = \underset{\forall M \in (O_5, \vec{z}_0)}{} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{54} & w_{54} \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$ avec $w_{54} = \dfrac{p_4}{2.\pi}.r_{54}$

$$\left\{\vartheta_{5/2}\right\} = \underset{\forall M \in (Q, \vec{z}_0)}{} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{52} & w_{52} \end{Bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

3 Cherchons les différentes relations liant les paramètres cinématiques :

* Sur la chaîne $\{0,1,2,0\}$

On a par composition des torseurs cinématiques écrits au même point : O_2 et dans la même base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\left\{\vartheta_{0/0}\right\} = \left\{\vartheta_{0/1}\right\} + \left\{\vartheta_{1/2}\right\} + \left\{\vartheta_{2/0}\right\} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$-_{O_2}\left\{\vartheta_{1/0}\right\} - _{O_2}\left\{\vartheta_{2/1}\right\} + _{O_2}\left\{\vartheta_{2/0}\right\} = \left\{\vec{0}\right\}$$

$$_{O_2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -r_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + {}_{O_2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -r_{21} & -w_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + {}_{O_2}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2.r_{20} \\ r_{20} & w_{20} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient les équations suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} -r_{10} - r_{21} + r_{20} = 0 & 1) \\ -w_{21} + w_{20} = 0 & 2) \\ a_2.r_{20} = 0 & 3) \\ w_{21} = \dfrac{p_1}{2.\pi}.r_{21} & 4) \end{array}\right.$$

*Sur la chaîne $\{0,2,3,0\}$

On a par composition des torseurs cinématiques écrits au même point : O_3 et dans la même base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\{\vartheta_{0/0}\} = \{\vartheta_{0/2}\} + \{\vartheta_{2/3}\} + \{\vartheta_{3/0}\} = \{\vec{0}\}$$

$$-\ {}_{O_3}\{\vartheta_{2/0}\} + {}_{O_3}\{\vartheta_{2/3}\} + {}_{O_3}\{\vartheta_{3/0}\} = \{\vec{0}\}$$

$${}_{O_3}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -r_{20} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ -(a_3+a_2).r_{20} \\ -w_{20} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + {}_{O_3}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ r_{23} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + {}_{O_3}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ r_{30} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ w_{30} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

On obtient les équations suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} -r_{20}+r_{23}+r_{30}=0 & 5) \\ -(a_2+a_3).r_{20}=0 & 6) \\ -w_{20}+w_{30}=0 & 7) \\ w_{30}=\dfrac{p_0}{2.\pi}.r_{30} & 8) \end{array}\right.$$

*Sur la chaîne $\{2,3,4,2\}$

On a par composition des torseurs cinématiques écrits au même point : O_3 et dans la même base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\{\vartheta_{2/2}\} = \{\vartheta_{2/3}\} + \{\vartheta_{3/4}\} + \{\vartheta_{4/2}\} = \{\vec{0}\}$$

$${}_{O_3}\{\vartheta_{2/3}\} + {}_{O_3}\{\vartheta_{3/4}\} + {}_{O_3}\{\vartheta_{4/2}\} = \{\vec{0}\}$$

$${}_{O_3}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ r_{23} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + {}_{O_3}\left\{\begin{matrix} p_{34} \\ q_{34} \\ r_{34} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} a_6.q_{34} \\ v_{34}+r_3\,r_{34}-a_6.p_{34} \\ w_{34}-r_3.q_{34} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$+\ {}_{O_3}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ r_{42} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ (r_3+r_4).r_{42} \\ 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

On obtient les équations suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll}
p_{34}=0 & 9)\\
q_{34}=0 & 10)\\
r_{23}+r_{34}+r_{42}=0 & 11)\\
a_6.q_{34}=0 & 12)\\
v_{34}+r_3.r_{34}-a_6.p_{34}+\left(r_3+r_4\right).r_{42}=0 & 13)\\
w_{34}-r_3.q_{34}=0 & 14)\\
\vec{V}\left(I\in 3/4\right)=\vec{0}\ \Rightarrow\left|\begin{array}{ll}/\vec{y}_0 & v_{34}=0\\ /\vec{z}_0 & w_{34}=0\end{array}\right. & \begin{array}{l}15)\\16)\end{array}
\end{array}\right.$$

*Sur la chaîne $\{2,4,5,2\}$

On a par composition des torseurs cinématiques écrits au même point : O_4 et dans la même base $B_0\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$:

$$\left\{\mathcal{V}_{2/2}\right\}=\left\{\mathcal{V}_{2/4}\right\}+\left\{\mathcal{V}_{4/5}\right\}+\left\{\mathcal{V}_{5/2}\right\}=\left\{\vec{0}\right\}$$

$$_{O_4}\left\{\mathcal{V}_{2/4}\right\}+{}_{O_4}\left\{\mathcal{V}_{4/5}\right\}+{}_{O_4}\left\{\mathcal{V}_{5/2}\right\}=\left\{\vec{0}\right\}$$

$$_{O_4}\left\{\begin{array}{c|c}0&0\\0&0\\-r_{42}&0\end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}+{}_{O_4}\left\{\begin{array}{c|c}0&0\\0&0\\-r_{54}&-w_{54}\end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}+{}_{O_4}\left\{\begin{array}{c|c}0&0\\0&a_2.r_{52}\\r_{52}&w_{52}\end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}=\left\{\begin{array}{c|c}0&0\\0&0\\0&0\end{array}\right\}$$

Nous obtenons les relations :

$$\left|\begin{array}{ll}
-r_{42}-r_{54}+r_{52}=0 & 17)\\
a_5.r_{52}=0 & 18)\\
-w_{54}+w_{52}=0 & 19)\\
w_{54}=\dfrac{p_4}{2.\pi}.r_{54} & 20)
\end{array}\right.$$

4 Reprenons les 20 équations précédentes :

1) $-r_{10} - r_{21} + r_{20} = 0$

2) $-w_{21} + w_{20} = 0$

3) $a_2 . r_{20} = 0$

4) $w_{21} = \frac{p_1}{2.\pi} . r_{21}$

5) $-r_{20} + r_{23} + r_{30} = 0$

6) $-\left(a_2 + a_3\right) . r_{20} = 0$

7) $-w_{20} + w_{30} = 0$

8) $w_{30} = \frac{p_0}{2.\pi} . r_{30}$

9) $p_{34} = 0$

10) $q_{34} = 0$

11) $r_{23} + r_{34} + r_{42} = 0$

12) $a_6 . q_{34} = 0$

13) $v_{34} + r_3 . r_{34} - a_6 . p_{34} + \left(r_3 + r_4\right) . r_{42} = 0$

14) $w_{34} - r_3 . q_{34} = 0$

15) $v_{34} = 0$

16) $w_{34} = 0$

17) $-r_{42} - r_{54} + r_{52} = 0$

18) $a_5 . r_{52} = 0$

19) $-w_{54} + w_{52} = 0$

20) $w_{54} = \frac{p_4}{2.\pi} . r_{54}$

Les composantes des torseurs sont donc :

.

$$\left\{\vartheta_{1/0}\right\} = \underset{O_2}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array}\right\}}_{\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)}$$

$$\left\{\vartheta_{2/0}\right\} = {}_{O_2}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{20} = 0 & w_{20} = -\dfrac{p_1}{2.\pi} r_{10} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{3/0}\right\} = {}_{O_3}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{30} = -\dfrac{p_1}{p_0} \cdot r_{10} & w_{30} = -\dfrac{p_1}{2.\pi} \cdot r_{10} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$ avec $w_{30} = \dfrac{p_0}{2.\pi} . r_{30}$

$${}_I\left\{\vartheta_{3/4}\right\} = {}_{I}\left\{\begin{array}{c|c} p_{34} = 0 & 0 \\ q_{34} = 0 & v_{34} = 0 \\ r_{34} = -\dfrac{p_1}{p_0} \cdot r_{10} \cdot \dfrac{(r_3 + r_4)}{r_4} & w_{34} = 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, -, -)}$$ avec $\vec{V}(I \in 3/4) = \vec{0}$

$$\left\{\vartheta_{2/1}\right\} = {}_{O_2}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} = -r_{10} & w_{21} = -\dfrac{p_1}{2.\pi} \cdot r_{10} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$ avec $w_{21} = \dfrac{p_1}{2.\pi} . r_{21}$

$$\left\{\vartheta_{2/3}\right\} = {}_{O_3}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{23} = \dfrac{p_1}{p_0} \cdot r_{10} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{4/2}\right\} = {}_{O_4}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{42} = \dfrac{p_1}{p_0} \cdot r_{10} \cdot \dfrac{r_3}{r_4} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\left\{\vartheta_{5/4}\right\} = \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{54} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10}\cdot\dfrac{r_3}{r_4} & w_{54} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot\dfrac{p_4}{2.\pi}\cdot r_{10}\cdot\dfrac{r_3}{r_4} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad \text{avec } w_{54} = \frac{p_1}{2.\pi}.r_{54}$$

$$\left\{\vartheta_{5/2}\right\} = \underset{Q}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{52} = 0 & w_{52} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot\dfrac{p_4}{2.\pi}\cdot r_{10}\cdot\dfrac{r_3}{r_4} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

5 En utilisant les torseurs définis précédemment, nous avons :

$$\left\{\vartheta_{5/0}\right\} = \left\{\vartheta_{5/4}\right\} + \left\{\vartheta_{4/3}\right\} + \left\{\vartheta_{3/0}\right\}$$

En exprimant ces différents torseurs au point O_4 , et dans la base $B_0\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$ il vient :

$$_{O_4}\left\{\vartheta_{5/0}\right\} = \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{54} & w_{54} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & r_4\cdot r_{34} \\ -r_{34} & 0 \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} + \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -\left(r_3+r_4\right)\cdot r_{30} \\ r_{30} & w_{30} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

$$_{O_4}\left\{\vartheta_{5/0}\right\} = \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} p_{50} & u_{50} \\ q_{50} & v_{50} \\ r_{50} & w_{50} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \underset{O_4}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & r_4\cdot r_{34} - \left(r_3+r_4\right)\cdot r_{30} \\ r_{54} - r_{34} + r_{30} & w_{54} + w_{30} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

Avec :
$$\left|\begin{array}{l} r_{50} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10}\cdot\dfrac{r_3}{r_4} + \dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10}\cdot\dfrac{\left(r_3+r_4\right)}{r_4} - \dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10} = 0 \\ v_{50} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10}\cdot\left(r_3+r_4\right) + \dfrac{p_1}{p_0}\cdot r_{10}\cdot\left(r_3+r_4\right) = 0 \\ w_{50} = -\dfrac{p_1}{p_0}\cdot\dfrac{p_4}{2.\pi}.r_{10}\cdot\dfrac{r_3}{r_4} - \dfrac{p_1}{2.\pi}.r_{10} = -\dfrac{p_1}{2.\pi}\cdot r_{10}\cdot\left(1+\dfrac{p_4}{p_0}\cdot\dfrac{r_3}{r_4}\right) \end{array}\right.$$

On trouve donc :

$$
{}_{O_4}\{\mathcal{V}_{5/0}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_1}{2.\pi}.r_{10}.\left(1+\dfrac{p_4}{p_0}.\dfrac{r_3}{r_4}\right) \end{array} \right\}_{O_4\,(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}
$$

Pour avoir $w_{20} = w_{52}$, à partir des expressions des composantes des torseurs en fonction de r_{10} , nous avons déduire que :

Comme $w_{20} = -\dfrac{p_1}{2.\pi}.r_{10}$ et $w_{52} = -\dfrac{p_1}{p_0}.\dfrac{p_4}{2.\pi}.r_{10}.\dfrac{r_3}{r_4}$, nous devons avoir $-\dfrac{p_1}{2.\pi}.r_{10} = -\dfrac{p_1}{p_0}.\dfrac{p_4}{2.\pi}.r_{10}.\dfrac{r_3}{r_4}$

; ce qui entraîne $\boxed{1 = \dfrac{p_4}{p_0}.\dfrac{r_3}{r_4}}$