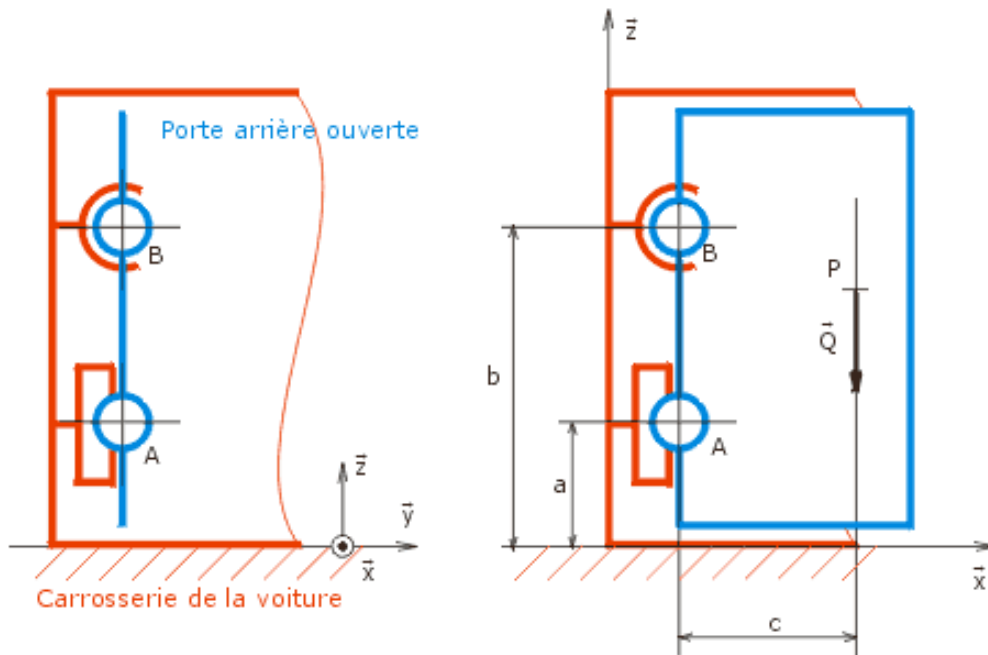


Enoncé

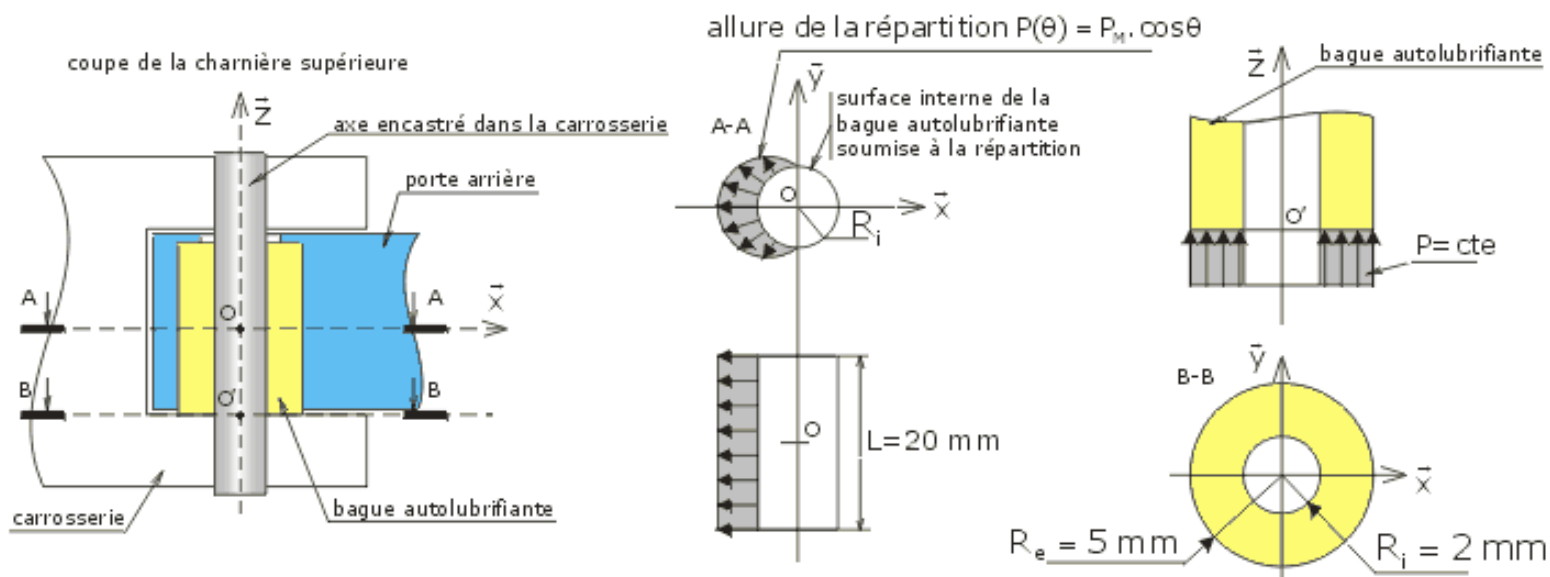
D'après concours banque filière PT Epreuve III 1999

La figure ci-dessous représente une vue simplifiée de l'anneau de rigidification arrière d'un véhicule Citroën Berlingo sur lequel sont fixées les charnières de deux portes battantes arrière. Les charnières sont situées aux cotes $z = 600 \text{ mm}$ (charnières inférieures) et $z = 1000 \text{ mm}$ (charnières supérieures). On s'intéresse dans cette étude à la statique d'une seule porte.



Le contact au niveau de la charnière supérieure est obtenu par contact entre un axe encastré dans la carrosserie et une bague autolubrifiante logée dans la porte arrière. Les pressions de contact admissibles pour les pièces en contact sont :

- $P_{Axe} = 150 \text{ MPa}$
- $P_{Bague} = 25 \text{ MPa}$
- $P_{Carrosserie} = 80 \text{ MPa}$



Le cahier des charges des charnières prévoit qu'elles doivent résister à l'équivalent d'un effort " \vec{Q} " appliqué à la distance " c " de l'axe de rotation de la porte.

Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$a = 400 \text{ mm} ; b = 800 \text{ mm} ; c = 500 \text{ mm} ; |Q| = 1200 \text{ N}$$

① Déterminer aux points A et B les torseurs d'actions mécaniques encaissés par chacune des charnières. Les actions de gravitation sur la porte sont négligées.

② Déterminer pour la charnière supérieure :

*La pression maximale de contact radiale P_M entre les surfaces cylindriques en contact. L'allure de la répartition de pression de contact entre les deux surfaces est donnée sur la coupe A-A .

*La pression de contact axiale P (suivant \vec{z}) au niveau de la charnière supérieure entre un plan d'appui de la bague autolubrifiante et un plan d'appui de la carrosserie, en utilisant l'allure de la répartition donnée sur la coupe B-B.

Solution

① Le problème proposé est un problème de statique plane car il existe un plan de symétrie matérielle du système : le plan (A, \vec{x}, \vec{z}) et les actions extérieures appliquées sont dans le plan (A, \vec{x}, \vec{z}) (Action en P : \vec{Q}). On néglige donc dans ce cas les composantes d'efforts suivant la direction \vec{y} et les composantes de moments suivant les directions \vec{x} et \vec{z} .

*Isolons la porte

*Caractérisons les actions externes par des torseurs (les composantes étant notées en valeur algébrique) :

$$\text{Action de type rotule plane en B : } \{T_B\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_B & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, -)}$$

$$\text{Action de type linéique annulaire en A : } \{T_A\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_A & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_A & 0 \\ \hline 0 & -(b-a) \cdot X_A \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{Action externe en P : } \{T_Q\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ Q & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -c \cdot Q \\ Q & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

* Appliquons le Principe fondamental de la statique à la porte en B :

$$\sum_B \left\{ T \xrightarrow{\text{porte}} \text{porte} \right\} = \{ \vec{0} \}$$

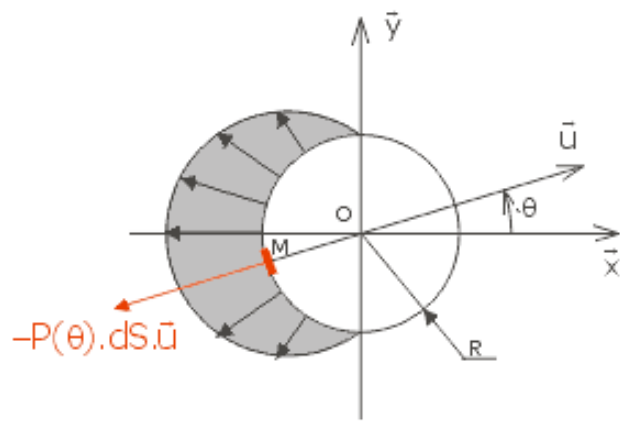
$${}_B \left\{ \begin{array}{c|c} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + {}_B \left\{ \begin{array}{c|c} X_A & 0 \\ 0 & -(b-a) \cdot X_A \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + {}_B \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -c \cdot Q \\ Q & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = {}_B \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} / \vec{x} & X_B + X_A = 0 \\ / \vec{z} & Z_B + Q = 0 \\ / \vec{y} & -(b-a) \cdot X_A - c \cdot Q = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\begin{array}{l} X_B = -\frac{c \cdot Q}{(a-b)} \\ Z_B = -Q \\ X_A = \frac{c \cdot Q}{(a-b)} \end{array}} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{\begin{array}{l} X_B = -1500 \text{ N} \\ Z_B = 1200 \text{ N} \\ X_A = 1500 \text{ N} \end{array}}$$

② Pour déterminer les pressions de contact radiale et axiale maximales sur la charnière supérieure, utilisons les répartitions surfaciques de charge proposées au niveau de la charnière :

*Pour la répartition radiale, nous pouvons noter que la répartition de pression proposée est indépendante du paramètre z . Nous pouvons alors travailler dans un plan perpendiculaire à la direction \vec{z} et situé à égale distance des extrémités de la surface soumise à la répartition. Notons (O, \vec{x}, \vec{y}) ce plan. Soit O le centre du cercle, intersection du plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et du cylindre de rayon R_i soumis à la répartition. Considérons un point M de ce cercle tel que $\overrightarrow{OM} = R_i \vec{u}$.



En M nous pouvons écrire :

$${}_M \left\{ \begin{array}{c} dT_{Axe \rightarrow Bague} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P(\theta) \cdot dS \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

$${}_O \left\{ \begin{array}{c} dT_{Axe \rightarrow Bague} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P(\theta) \cdot dS \cdot \vec{u} \\ \frac{\overrightarrow{OM}}{R_i} \wedge (-P(\theta) \cdot dS \cdot \vec{u}) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -P(\theta) \cdot dS \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -P_M \cdot \cos \theta \cdot L \cdot R_i \cdot d\theta \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

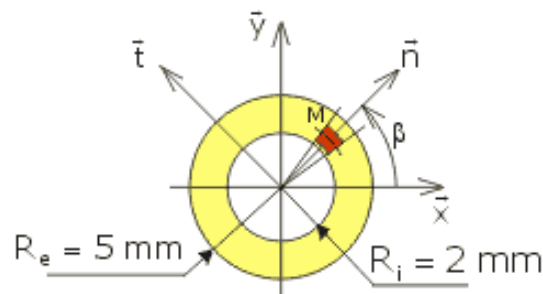
Comme $\vec{u} = \cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}$

$$\begin{aligned}
{}_O \left\{ dT_{Axe \rightarrow Bague} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} -P_M \cdot \cos \theta \cdot L \cdot R_i \cdot (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \cdot d\theta \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
{}_O \left\{ T_{Axe \rightarrow Bague} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_M \cdot \cos \theta \cdot L \cdot R_i \cdot (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \cdot d\theta \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} -P_M \cdot L \cdot R_i \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta \vec{x} + \cos \theta \cdot \sin \theta \vec{y}) \cdot d\theta \\ \vec{0} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{{}_O \left\{ T_{Axe \rightarrow Bague} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P_M \cdot L \cdot R_i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Le second torseur d'action répartie est un torseur d'action surfacique entre un plan lié à la bague autolubrifiante et un plan de la carrosserie. Soit O' le centre géométrique de la surface plane (O', \vec{x}, \vec{y}) soumise à la répartition constante P .

Considérons un point de contact M tel que $\overrightarrow{O'M} = \rho \cdot \vec{n}$.



En ce point nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
{}_M \left\{ dT_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} -P \cdot dS \cdot (-\vec{z}) \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
{}_O \left\{ dT_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} P \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{z} \\ \frac{\overrightarrow{O'M}}{\rho \cdot \vec{n}} \wedge P \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{z} \\ -P \cdot \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{t} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$${}_O \left\{ T_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} P \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{z} \\ - \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} P \cdot \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\beta \cdot \vec{i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \cdot \pi \cdot P \int_{R_i}^{R_e} \rho \cdot d\rho \cdot \vec{z} \\ - \int_{R_i}^{R_e} P \cdot \rho^2 \cdot \left(\int_0^{2\pi} \vec{i} \cdot d\beta \right) \cdot d\rho \end{array} \right\}$$

$$\boxed{{}_O \left\{ T_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \pi \cdot P \cdot (R_e^2 - R_i^2) \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Nous remarquons que ce dernier torseur est un glisseur d'axe central (O, \vec{z}) . On peut donc écrire en O :

$${}_O \left\{ T_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \pi \cdot P \cdot (R_e^2 - R_i^2) \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Le torseur résultant des actions réparties, axiales et radiales, sera donc :

$$\begin{aligned} {}_O \left\{ T_{Actions \text{ réparties} \rightarrow bague} \right\} &= {}_O \left\{ T_{Axe \rightarrow Bague} \right\} + {}_O \left\{ T_{Carrosserie \rightarrow Bague} \right\} \\ {}_O \left\{ T_{Actions \text{ réparties} \rightarrow bague} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} -P_M \cdot L \cdot R_i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \pi \cdot P \cdot (R_e^2 - R_i^2) \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

A partir de la question 1 où nous avons déterminé les résultantes des actions de répartition au niveau des contacts surfaciques des liaisons rotules et linéaires annulaires, nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_B = -P_M \cdot L \cdot R_i \cdot \frac{\pi}{2} \\ Z_B = \pi \cdot P \cdot (R_e^2 - R_i^2) \end{array} \right\} \text{ et donc } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{c \cdot Q}{(a-b)} = -P_M \cdot L \cdot R_i \cdot \frac{\pi}{2} \\ -Q = \pi \cdot P \cdot (R_e^2 - R_i^2) \end{array} \right.$$

$$\text{On obtient : } \boxed{\begin{array}{l} P_M = -\frac{2 \cdot c \cdot Q}{L \cdot R_i \cdot \pi \cdot (b-a)} \\ P = -\frac{Q}{\pi \cdot (R_e^2 - R_i^2)} \end{array}} \text{ A.N } \left\{ \begin{array}{l} P_M = 23,9 \text{ N/mm}^2 = 23,9 \text{ MPa} \\ P = 18,2 \text{ N/mm}^2 = 18,2 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Les valeurs de ces pressions sont inférieures aux pressions admissibles de contact pour chacune des pièces en contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} P < P_M < P_{Bague} \text{ avec } P_{Bague} = 25 \text{ N/mm}^2 \\ P < P_M < P_{Axe} \text{ avec } P_{Axe} = 150 \text{ N/mm}^2 \\ P < P_M < P_{Carrosserie} \text{ avec } P_{Carrosserie} = 80 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, les surfaces de contact résisteront aux pressions de contact.