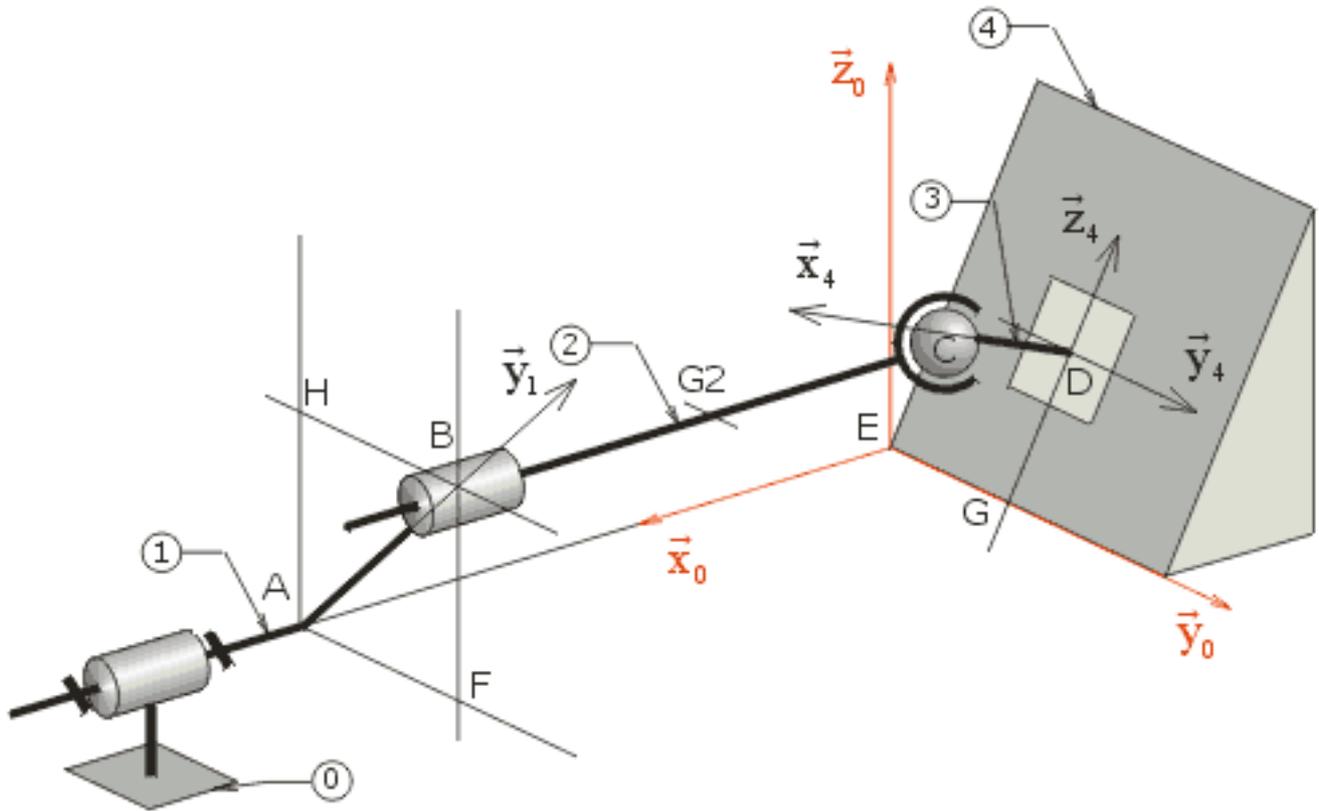


Enoncé

D'après concours commun ENTPE PSI 1997

Considérons le schéma cinématique d'une pompe hydraulique à cylindrée auto-réglable :



Un barillet (1), entraîné en rotation par rapport au bâti (0), possède neuf ensembles pistons-patins 2-3 en liaison pivot glissant avec ce même barillet (1) et en liaison plane de normale \vec{x}_4 avec la plaque de glissement (4). Lors de l'entraînement en rotation du barillet, les patins (3) sont astreints à rester au contact de la plaque (4) et les pistons (2) sont entraînés en rotation autour de l'axe fixe (E, \vec{x}_0) ; ce qui provoque leur translation par rapport au barillet. Ce mouvement est utilisé pour aspirer un fluide dans une lumière d'aspiration et pour ensuite le refouler dans une lumière de refoulement.

L'inclinaison α de la plaque (4) autour de l'axe (E, \vec{y}_0) détermine la cylindrée de la pompe. Une fois le réglage d'inclinaison effectué, la plaque (4) est liée de façon encastree au bâti(0). Le schéma cinématique dans notre cas de figure est réduit à l'étude d'un seul ensemble piston-patin.

On note :

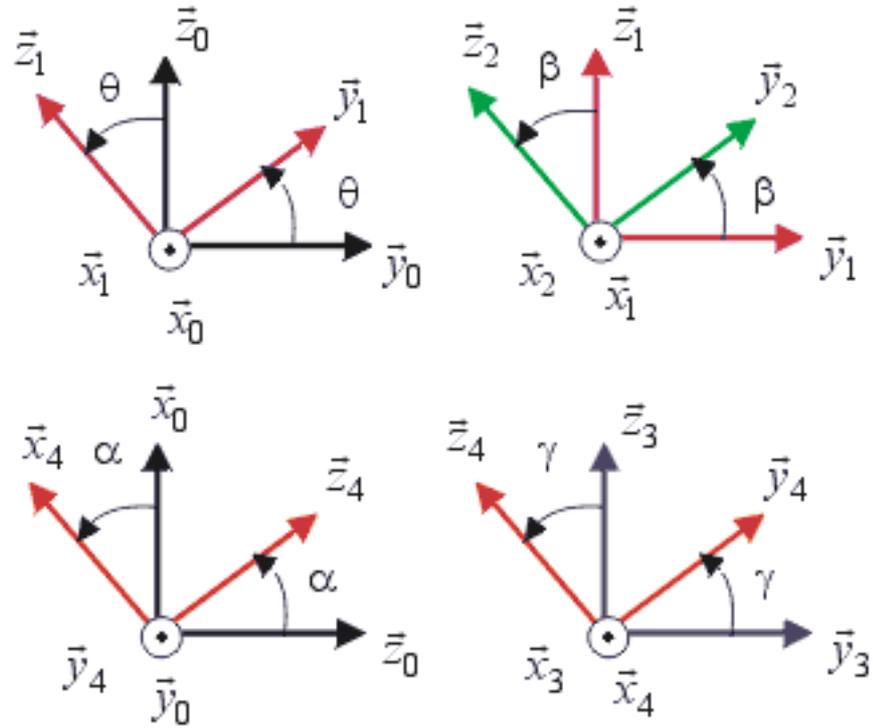
$$\overrightarrow{AB} = R.\vec{y}_1 \quad , \quad \overrightarrow{CB} = \lambda.\vec{x}_1 \quad , \quad \overrightarrow{ED} = v.\vec{y}_0 + w.\vec{z}_4 \quad , \quad \overrightarrow{DC} = h.\vec{x}_3 \quad , \quad \overrightarrow{EA} = d.\vec{x}_0$$

$$\text{Vitesse de rotation de l'arbre/barillet (1) : } N = 1800 \text{ tr. mn}^{-1}$$

Cylindrée maximale : $V_T = 100 \text{ cm}^3 \cdot \text{tr}^{-1}$

Nombre de pistons : $n = 9$

Angle maximal d'inclinaison de l'étrier : $\alpha_{\max} = 15^\circ$



$$B_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \xrightarrow{(\theta, \bar{x}_0)} B_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1) \xrightarrow{(\beta, \bar{x}_1)} B_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$$

$$B_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \xrightarrow{(\alpha, \bar{y}_0)} B_4(\tilde{x}_4, \tilde{y}_4, \tilde{z}_4) \xrightarrow{(-\gamma, \bar{x}_3)} B_3(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3, \tilde{z}_3)$$

Le torseur cinématique associé à la liaison L_{ij} sera noté :

$${}_M \{ \mathcal{Q}_{i/j} \} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/j} \\ \vec{V}(M \in i / j) \end{array} \right\} = {}_M \left\{ \begin{array}{c|c} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{(-,-,-)}$$

- 1 Déterminer, en fonction des paramètres proposés le torseur cinématique $\{ \mathcal{G}_{4/2} \}_{B_4}$
- 2 Exprimer ν , ω , et λ en fonction des constantes et paramètres : d , R , h , α et θ
- 3 Si S désigne la section d'un piston, quelle est l'expression de la cylindrée totale de la pompe notée V_T en fonction de R , S , n et α ?
- 4 En utilisant la notation torseur imposée, exprimer les éléments de réduction des torseurs cinématiques suivants : $\{ \mathcal{G}_{1/0} \}$, $\{ \mathcal{G}_{2/1} \}$, $\{ \mathcal{G}_{3/2} \}$, $\{ \mathcal{G}_{4/3} \}$. Donner leur expression en fonction de R , α , θ et $\dot{\theta}$. On aura soin de préciser la démarche de résolution utilisée.
- 5 Déterminer le débit instantané d'un piston de cette pompe noté $q_v(\theta)$ en fonction de R , S , α , θ et $\dot{\theta}$
- 6 Pour quelles valeurs de θ le piston étudié est-il en phase de refoulement et en phase d'admission ?
- 7 Déterminer les éléments de réduction au point D, du torseur cinématique $\{ \mathcal{G}_{4/3} \}$ en fonction de R , α , $\dot{\theta}$, θ et $\ddot{\theta}$
- 8 Que représente le vecteur $\vec{V}(D \in 4/3)$? Quelle est la valeur $\vec{V}(D \in 4/3) \cdot \vec{x}_3$?

Solution

- 1 D'après la composition des torseurs cinématiques : ${}_C \{ \mathcal{G}_{4/2} \}_{B_4} = {}_C \{ \mathcal{G}_{4/3} \}_{B_4} + {}_C \{ \mathcal{G}_{3/2} \}_{B_4}$ ce qui

$$\text{entraîne } {}_C \{ \mathcal{G}_{4/2} \} = \left\{ \begin{array}{c|c} P_{43} & 0 \\ \hline 0 & \nu_{43} \\ 0 & \omega_{43} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)} + \left\{ \begin{array}{c|c} P_{32} & 0 \\ \hline q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}. \text{ Le torseur cinématique } {}_C \{ \mathcal{G}_{4/2} \}$$

traduisant les mobilités de (4) par rapport à (2) est donc

$$c\{g_{4/2}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} p_{43} & u_{43} \\ q_{43} & v_{43} \\ r_{43} & w_{43} \end{array} \right\}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)} = \left\{ \begin{array}{c|c} p_{43} + p_{32} & 0 \\ q_{32} & v_{43} \\ r_{32} & w_{43} \end{array} \right\}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

qui est le torseur représentatif

d'une liaison ponctuelle en C de normale \vec{x}_4 .

② Pour déterminer les différentes relations géométriques, projetons la relation vectorielle :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} = R \cdot \vec{y}_1 - \lambda \cdot \vec{x}_1 - h \cdot \vec{x}_3 - v \cdot \vec{y}_0 - w \cdot \vec{z}_4 + d \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$$

/ \vec{x}_1

$$R \cdot \underbrace{\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1}_0 - \lambda \cdot \underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}_1 - h \cdot \underbrace{\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1}_{\cos \alpha} - v \cdot \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1}_0 - w \cdot \underbrace{\vec{z}_4 \cdot \vec{x}_1}_{\sin \alpha} + d \cdot \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1}_1 = -\lambda - h \cdot \cos \alpha - w \cdot \sin \alpha + d = 0$$

$$/ \vec{y}_0 \quad R \cdot \underbrace{\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0}_{\cos \theta} - \lambda \cdot \underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0}_0 - h \cdot \underbrace{\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_0}_0 - v \cdot \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0}_1 - w \cdot \underbrace{\vec{z}_4 \cdot \vec{y}_0}_0 + d \cdot \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0}_0 = R \cdot \cos \theta - V = 0$$

$$/ \vec{z}_4 \quad R \cdot \underbrace{\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_4}_{\sin \theta \cdot \cos \alpha} - \lambda \cdot \underbrace{\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_4}_{\sin \alpha} - h \cdot \underbrace{\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_4}_0 - v \cdot \underbrace{\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_4}_0 - w \cdot \underbrace{\vec{z}_4 \cdot \vec{z}_4}_1 + d \cdot \underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_4}_{\sin \alpha} = 0$$

$$R \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha - w + (d - \lambda) \cdot \sin \alpha = 0$$

on obtient par combinaison des relations précédentes les expressions scalaires suivantes :

$$\lambda = d + \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (h - R \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha)$$

$$V = R \cdot \cos \theta$$

$$w = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (R \sin \theta - h \cdot \sin \alpha)$$

③ Pour déterminer la cylindrée, déterminons la course C d'un piston sur un tour de barillet. La

course sera $C = \underbrace{\lambda_{\max}}_{\theta - \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\lambda_{\min}}_{\theta + \frac{\pi}{2}}$

$$= \left(d + \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (h + R \cdot \sin \alpha) \right) - \left(d + \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (h - R \cdot \sin \alpha) \right) = 2 \cdot R \cdot \tan \alpha$$

La cylindrée sera le volume de fluide aspiré et refoulé sur un tour :

$$\boxed{V_T = 2 \cdot n \cdot S \cdot R \cdot \tan \alpha = 18 \cdot S \cdot R \cdot \tan \alpha}$$

4 Cherchons les différents torseurs cinématiques

$$\forall M \in (A, \vec{x}_0) \{ \mathcal{G}_{1/0} \} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} p_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \forall M \in (A, \vec{x}_0) \end{array} (\vec{x}_0, -, -)$$

$$\forall M \in (B, \vec{x}_0) \{ \mathcal{G}_{2/1} \} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \forall M \in (B, \vec{x}_0) \end{array} (\vec{x}_0, -, -)$$

$$C \{ \mathcal{G}_{3/2} \} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right] \\ C \end{array} (-, -, -)$$

$$\forall M \{ \mathcal{G}_{4/3} \} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} p_{43} & 0 \\ 0 & v_{43} \\ 0 & w_{43} \end{array} \right] \\ \forall M \end{array} (\vec{x}_4, -, -)$$

En utilisant la composition des torseurs cinématiques :

$$M \{ \mathcal{G}_{4/0} \} = M \{ \mathcal{G}_{4/3} \} + M \{ \mathcal{G}_{3/2} \} + M \{ \mathcal{G}_{2/1} \} + M \{ \mathcal{G}_{1/0} \} = \{ \vec{0} \}. \text{ On choisit comme point de}$$

réduction le point C et la base de décomposition $B_0 (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$C \left[\begin{array}{c|c} p_{43} \cdot \cos \alpha & w_{43} \cdot \sin \alpha \\ 0 & v_{43} \\ -p_{43} \cdot \sin \alpha & w_{43} \cdot \cos \alpha \end{array} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} + C \left[\begin{array}{c|c} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} + C \left[\begin{array}{c|c} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} +$$

$$c \left\{ \begin{array}{l|l} \dot{\theta} & 0 \\ 0 & -\dot{\theta} R \sin \theta \\ 0 & -\dot{\theta} R \cos \theta \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} = c \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

On obtient les relations scalaires suivantes :

$$p_{43} \cos \alpha + p_{32} + p_{21} + \dot{\theta} = 0$$

$$q_{32} = 0$$

$$-p_{43} \sin \alpha + r_{32} = 0$$

$$w_{43} \sin \alpha + u_{21} = 0$$

$$v_{43} - \dot{\theta} R \sin \theta = 0$$

$$w_{43} \cos \alpha - \dot{\theta} R \cos \theta = 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$p_{43} \cos \alpha + p_{32} + p_{21} + \dot{\theta} = 0$$

$$q_{32} = 0$$

$$-p_{43} \sin \alpha + r_{32} = 0$$

$$u_{21} = -\dot{\theta} R \cos \theta \tan \alpha$$

$$v_{43} = \dot{\theta} R \sin \theta$$

$$w_{43} = \frac{\dot{\theta} R \cos \theta}{\cos \alpha}$$

on peut résoudre le système d'équations en rajoutant deux relations $p_{32} = \dot{\gamma} = 0$, $p_{21} = \dot{\beta} = 0$ qui sont les paramètres cinématiques traduisant deux mobilités internes du mécanisme et qui ne participent pas à la chaîne cinématique principale. Dans ce cas le système précédent donne :

$$\begin{aligned}
 p_{43} &= -\frac{\dot{\theta}}{\cos \alpha} \\
 q_{32} &= 0 \\
 r_{32} &= -\dot{\theta} \cdot \tan \alpha \\
 u_{21} &= -\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta \cdot \tan \alpha \\
 v_{43} &= \dot{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \\
 w_{43} &= \frac{\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta}{\cos \alpha}
 \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de $\dot{\lambda} = u_{21}$ trouvée à la question 2.

⑤ Pour déterminer le débit instantané $q_v(\theta)$, utilisons le résultat de la question précédente donnant la vitesse de déplacement d'un piston par rapport au barillet (1) : $u_{21} = -\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta \cdot \tan \alpha$ et donc $\vec{V}(C \in 2/1) = u_{21} \cdot \vec{x}_0$. Le débit aura pour expression :

$$q_v(\theta) = \|\vec{V}(C \in 2/1)\| \cdot S = |u_{21}| \cdot S \text{ et donc } \boxed{q_v(\theta) = \dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta \cdot \tan \alpha \cdot S}$$

⑥ Le piston sera en refoulement si $u_{21} > 0$; ce qui sera vérifié pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Le piston sera en aspiration si $u_{21} < 0$; ce qui sera vérifié pour $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

⑦ Pour étudier le torseur glissement de (4) par rapport à (3), $\{\mathcal{G}_{4/3}\}$, cherchons :

*le vecteur $\vec{\Omega}_{4/3}$:

$$\text{On a d'après les modélisations précédentes, } \vec{\Omega}_{4/3} = -\frac{\dot{\theta}}{\cos \alpha} \cdot \vec{x}_4 = \dot{\gamma} \cdot \vec{x}_4$$

*Dans un second temps, cherchons $\vec{V}(D \in 4/3)$:

Nous avons toujours d'après la modélisation précédente,

$$\vec{V}(C \in 4/3) = v_{43} \cdot \vec{y}_4 + w_{43} \cdot \vec{z}_4 = \dot{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \cdot \vec{y}_4 + \frac{\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta}{\cos \alpha} \cdot \vec{z}_4. \text{ D'après la relation liant les}$$

vitesse de deux points d'un même solide $\vec{V}(D \in 4/3) = \vec{V}(C \in 4/3) + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{\Omega}_{4/3} =$

$$\dot{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \vec{y}_4 + \frac{\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta}{\cos \alpha} \vec{z}_4 - \underbrace{h \cdot \vec{x}_3 \wedge \frac{\dot{\theta}}{\cos \alpha} \cdot \vec{x}_4}_{\dot{\gamma} \cdot \vec{x}_4} . \text{ Le torseur est donc le suivant :}$$

$$\boxed{{}_D \{ \mathcal{G}_{4/3} \} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/3} \\ \vec{V}(D \in 4/3) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\gamma} \cdot \vec{x}_4 \\ \dot{\theta} \cdot R \cdot \sin \theta \cdot \vec{y}_4 + \frac{\dot{\theta} \cdot R \cdot \cos \theta}{\cos \alpha} \vec{z}_4 \end{array} \right\}}$$