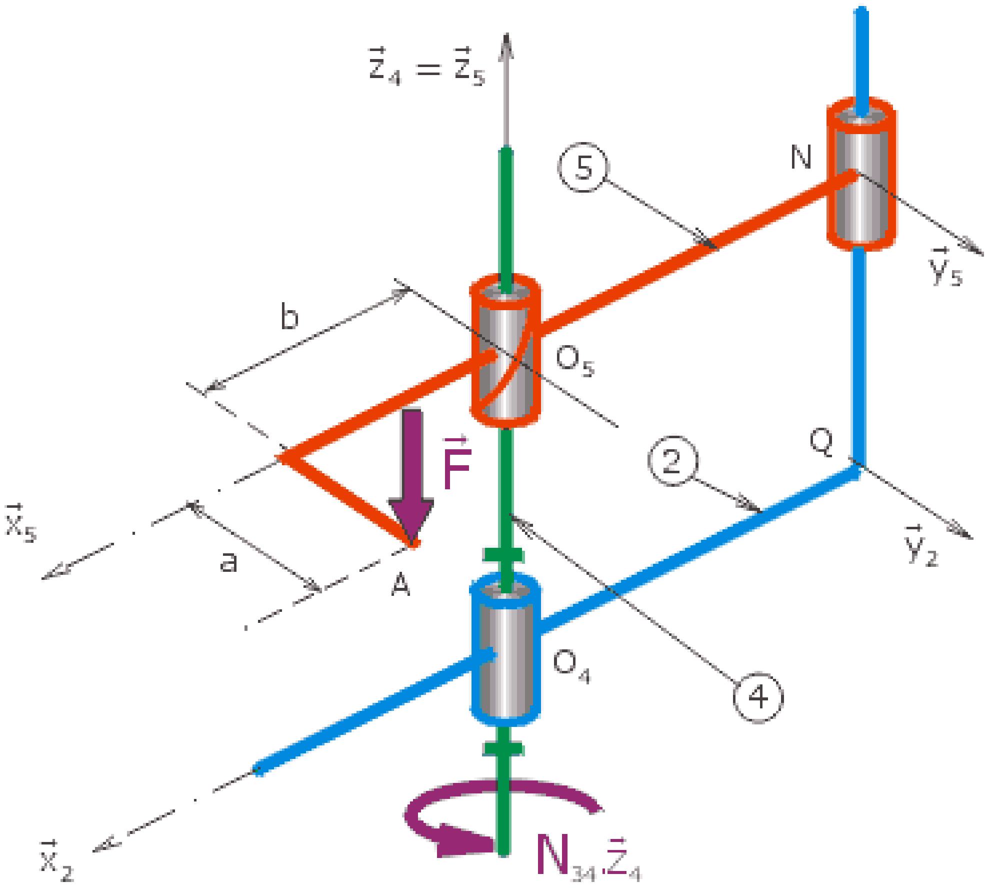
Enoncé

D'après un sujet ENS Cachan 1990

L'étude porte sur un mécanisme élévateur s'insérant dans une chaîne de production automobile. Le schéma simplifié d'une partie de ce mécanisme est représenté ci-dessous :



Le solide 5 est soumis à l'action d'une charge modélisée par un glisseur :

$$_A\left\{T_{extérieur \to 5}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} -F.\vec{z}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On suppose que la vis (4) est soumise au torseur couple :

$$_A\left\{T_{3 \to 4}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ N_{34}.\vec{z}_4 \end{Bmatrix}$$

On suppose que les liaisons sont parfaites et le poids des pièces est négligeable. Le pas de la liaison glissière hélicoïdale entre les pièces (4) et (5) est P_4 . Les axes des trois liaisons considérées sont parallèles.

On donne : $\overrightarrow{O_4Q} = a_5 . \vec{x}_2 \quad , \quad \overrightarrow{O_4O_5} = \lambda . \vec{z}_4 \quad , \quad \overrightarrow{O_5A} = b . \vec{x}_5 + c . \vec{y}_5$

Le torseur d'action de la pièce (i) sur la pièce (j) sera noté :

$$\left\{ T_{i \to j} \right\} = {}_{M}\left\{ \begin{array}{c|c} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{(-,-,-)}$$

La pièce (2) est soumise à d'autres actions externes non représentées. Le mécanisme est à l'équilibre.

1 Déterminer le torseur associé aux actions mécaniques transmissibles par chaque liaison représentée sur la figure .

2 Ecrire les équations permettant le calcul des composantes de ces torseurs.

3 Etablir la relation entre F et N_{34} .

Degré d'hyperstatisme du mécanisme ? Quelles seraient les modifications à apporter pour rendre le système isostatique ?

Solution

1 A partir de la schématisation proposée, nous pouvons écrire les torseurs associés à chaque liaison :

$$\left\{ T_{2 \to 4} \right\} = {}_{\forall M \in (O_4, \vec{z}_0)}\left\{ \begin{array}{c|c} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{ T_{4 \to 5} \right\} = {}_{\forall M \in (O_4, \vec{z}_0)}\left\{ \begin{array}{c|c} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{array} \right\}_{(-,-,\vec{z}_0)} \quad avec \quad N_{45} = -\frac{P_4}{2.\pi} . Z_{45}$$

$$\left\{T_{2\rightarrow 5}\right\} = \underset{\forall M \in (Q,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{l|l} X_{25} & L_{25} \\ Y_{25} & M_{25} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)}$$

De plus , nous pouvons caractériser les actions externes au mécanisme par deux torseurs :

$$\left\{T_{Extérieur\rightarrow 5}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{3\rightarrow 4}\right\} = \underset{\forall M}{\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{34} \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)}$$

2 Le nombre d'inconnues des torseurs statiques est 14 . En isolant successivement les solides : (4) et (5) nous pouvons déduire 12 équations .

* Isolons la pièce (4)
* Caractérisons les actions externes par des torseurs :

$$\left\{T_{3\rightarrow 4}\right\} = \underset{\forall M \in (O_4,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{34} \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{2\rightarrow 4}\right\} = \underset{\forall M \in (O_4,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{l|l} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{5\rightarrow 4}\right\} = -\left\{T_{4\rightarrow 5}\right\} = \underset{\forall M \in (O_4,\vec{z}_0)}{\left\{\begin{array}{l|l} -X_{45} & -L_{45} \\ -Y_{45} & -M_{45} \\ -Z_{45} & -N_{45} \end{array}\right\}}_{(-,-,\,\vec{z}_0)} \quad avec \quad N_{45} = -\frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45}$$

En choisissant le point de réduction O_5 et la base d'expression $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$, nous avons :

$$\left\{T_{3\to 4}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{34} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{2\to 4}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{5\to 4}\right\} = -\left\{T_{4\to 5}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} -X_{45} & -L_{45} \\ -Y_{45} & -M_{45} \\ -Z_{45} & -N_{45} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)} \quad \text{avec } N_{45} = -\frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45}$$

Si nous appliquons le principe fondamental de la statique à (4) en O_5 , nous obtenons en projection sur la base $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$ six relations scalaires :

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}.\vec{x}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{24} - X_{45} = 0 \quad 1)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}.\vec{y}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{24} - Y_{45} = 0 \quad 2)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}.\vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{24} - Z_{45} = 0 \quad 3)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\ \bar{4}\to 4}.\vec{x}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{24} - L_{45} = 0 \quad 4)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\ \bar{4}\to 4}.\vec{y}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{24} - M_{45} = 0 \quad 5)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\ \bar{4}\to 4}.\vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{34} + \frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45} = 0 \quad 6)$$

* Isolons à présent la pièce (5) :
* Caractérisons les actions externes :

$$\left\{T_{4\to 5}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)} \quad avec \quad N_{45} = -\frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45}$$

Nota : Le choix du point de réduction et de la base de décomposition de ce torseur ayant été déjà réalisé pour l'équilibre de la pièce (4), nous sommes obligés de conserver ces mêmes particularités pour la suite du problème.

$$\left\{T_{2\to 5}\right\} = \underset{\forall M \in (Q,\vec{z}_0)}{\begin{Bmatrix} X_{25} & L_{25} \\ Y_{25} & M_{25} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{Extérieur\to 5}\right\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{Bmatrix}}_{(-,-,\vec{z}_0)}$$

En choisissant le point de réduction O_5 et la base d'expression $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$, nous avons :

$$\left\{T_{4\to 5}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)} \quad avec \quad N_{45} = -\frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45}$$

$$\left\{T_{2\to 5}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} X_{25} & L_{25} \\ Y_{25} & M_{25} \\ 0 & -a_5.Y_{25} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$$

$$\left\{T_{Extérieur\to 5}\right\} = \underset{O_5}{\begin{Bmatrix} 0 & -c.F \\ 0 & b.F \\ -F & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$$

Si nous appliquons le principe fondamental de la statique à (5) en O_5 , nous obtenons en projection sur la base $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$ six relations scalaires :

$$\sum \vec{F}_{\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{x}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{45} + X_{25} = 0 \quad 7)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{y}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{45} + Y_{25} = 0 \quad 8)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -F + Z_{45} = 0 \quad 9)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\,\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{x}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -c.F + L_{25} + L_{45} = 0 \quad 10)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\,\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{y}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad b.F + M_{25} + M_{45} = 0 \quad 11)$$

$$\sum \vec{M}_{O_5\,\bar{5}\rightarrow 5} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -a_5.Y_{25} - \frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45} = 0 \quad 12)$$

3 Pour obtenir la relation liant F et N_{34} , utilisons deux des équations déduites précédemment :

6) $\Rightarrow \quad N_{34} + \frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45} = 0$

9) $\Rightarrow \quad -F + Z_{45} = 0$

En combinant ces deux relations nous déduisons la relation entrée/sortie : $\boxed{N_{34} = -\frac{P_4}{2.\pi}.F}$

Le degré d'hyperstatisme est 3 car :
Nous disposons semble-t-il de 12 équations pour 14 inconnues . En isolant le sous système d'équations liant les composantes d'entrée et de sortie :

2) $\Rightarrow \quad Y_{24} - Y_{45} = 0$

3) $\Rightarrow \quad Z_{24} - Z_{45} = 0$

6) $\Rightarrow \quad N_{34} + \frac{P_4}{2.\pi}.Z_{45} = 0$

8) $\Rightarrow \quad Y_{45} + Y_{25} = 0$

9) $\Rightarrow \quad -F + Z_{45} = 0$

12) $\Rightarrow \quad -a_5.Y_{25} - \dfrac{P_4}{2.\pi}.Z_{45} = 0$

Les cinq inconnues de liaison $Y_{24}, Y_{45}, Y_{25}, Z_{24}, Z_{45}$ apparaissant dans ce sous système de six équations , n'apparaissent pas dans le reste des autres équations. Ce sous système d'équations permet de définir chacune des inconnues $Y_{24}, Y_{45}, Y_{25}, Z_{24}, Z_{45}$, et permet de déterminer la relation liant l'entrée et la sortie : $N_{34} = -\dfrac{P_4}{2.\pi}.F$

Il nous reste donc six équations de disponibles pour neuf inconnues de liaison :
X_{24} , X_{25} , X_{45} ,Y_{24} , L_{24} , L_{25}, L_{45}, M_{24} , M_{25} , M_{45} . Le système est donc hyperstatique d'ordre 3.

1) $\Rightarrow \quad X_{24} - X_{45} = 0$

4) $\Rightarrow \quad L_{24} - L_{45} = 0$

5) $\Rightarrow \quad M_{24} - M_{45} = 0$

7) $\Rightarrow \quad X_{45} + X_{25} = 0$

10) $\Rightarrow \quad -c.F + L_{25} + L_{45} = 0$

11) $\Rightarrow \quad b.F + M_{25} + M_{45} = 0$

Pour pouvoir résoudre ce sous-système, il faut supprimer trois inconnues. Les possibilités sont nombreuses. En modifiant uniquement une seule liaison, on peut penser agir sur la liaison entre (2) et (5) dont le rôle est de supprimer la rotation de (5) par rapport à (2) de façon à transformer le mouvement de rotation d'entrée sur la pièce (4) en mouvement de translation de (5).
En posant $X_{25} = 0$, $L_{25} = 0$, $M_{25} = 0$, le système d'équations précédent devient :

1) $\Rightarrow \quad X_{24} - X_{45} = 0$

4) $\Rightarrow \quad L_{24} - L_{45} = 0$

5) $\Rightarrow \quad M_{24} - M_{45} = 0$

7) $\Rightarrow \quad X_{45} = 0$

10) $\Rightarrow \quad -c.F + L_{45} = 0$

11) $\Rightarrow \quad b.F + M_{45} = 0$

On peut le résoudre. Le mécanisme est alors isostatique. La nouvelle liaison entre les pièces (2) et (5) est une liaison ponctuelle en N de normale $\vec{y}_5$. Le torseur de cette liaison est :

$$\boxed{\left\{T_{2\to 5}\right\} = {}_{N}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{25} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-,\vec{y}_5,-)}}$$