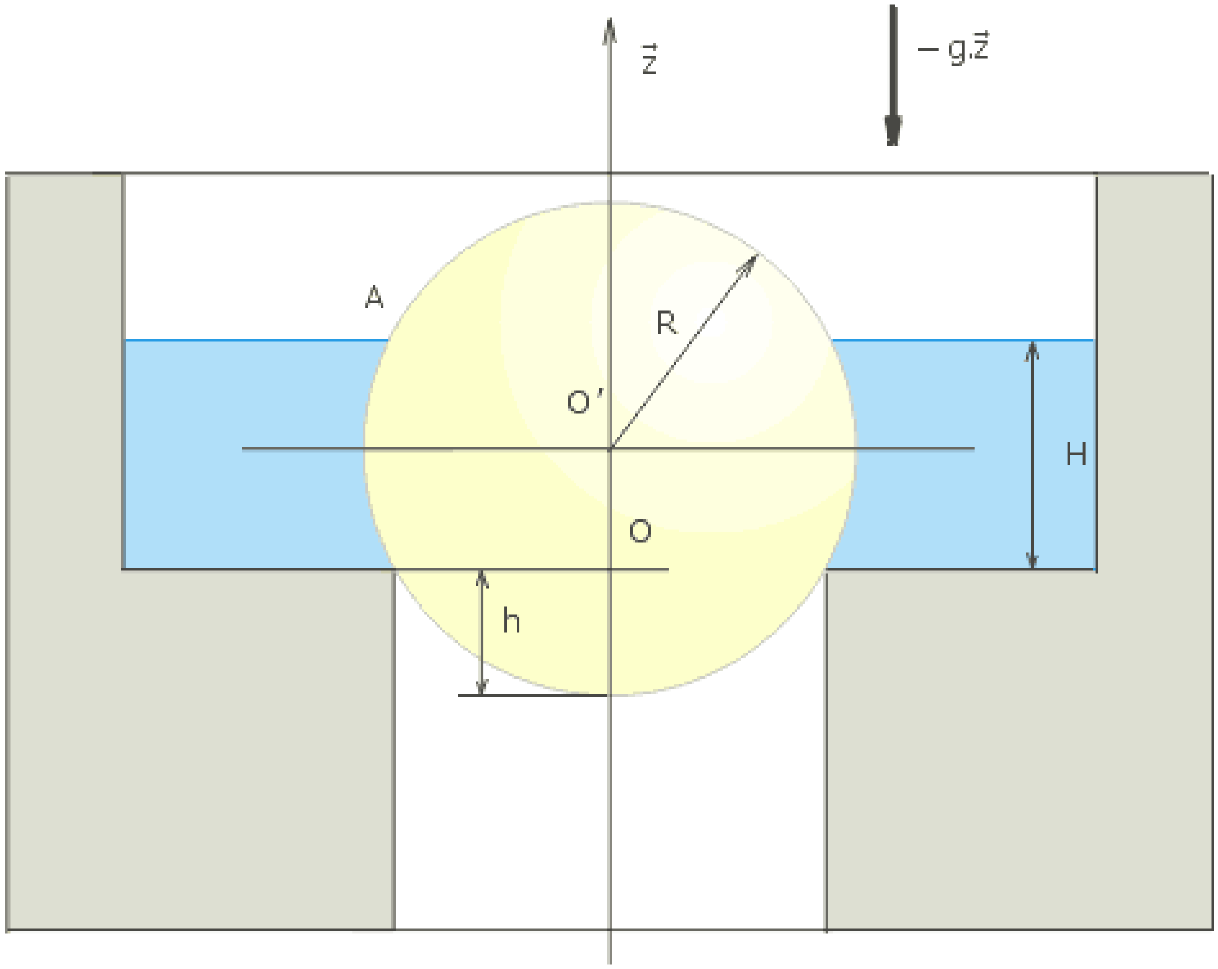
Enoncé

Considérons un flotteur sphérique de rayon R et de masse m , obturant le fond horizontal d'un récipient possédant un orifice circulaire dans lequel le flotteur s'enfonce d'une hauteur h .



1 Discuter en fonction de la hauteur H du liquide dans le récipient, de la masse volumique ρ de ce liquide et de la masse m du flotteur, les possibilités d'obturation de l'orifice.

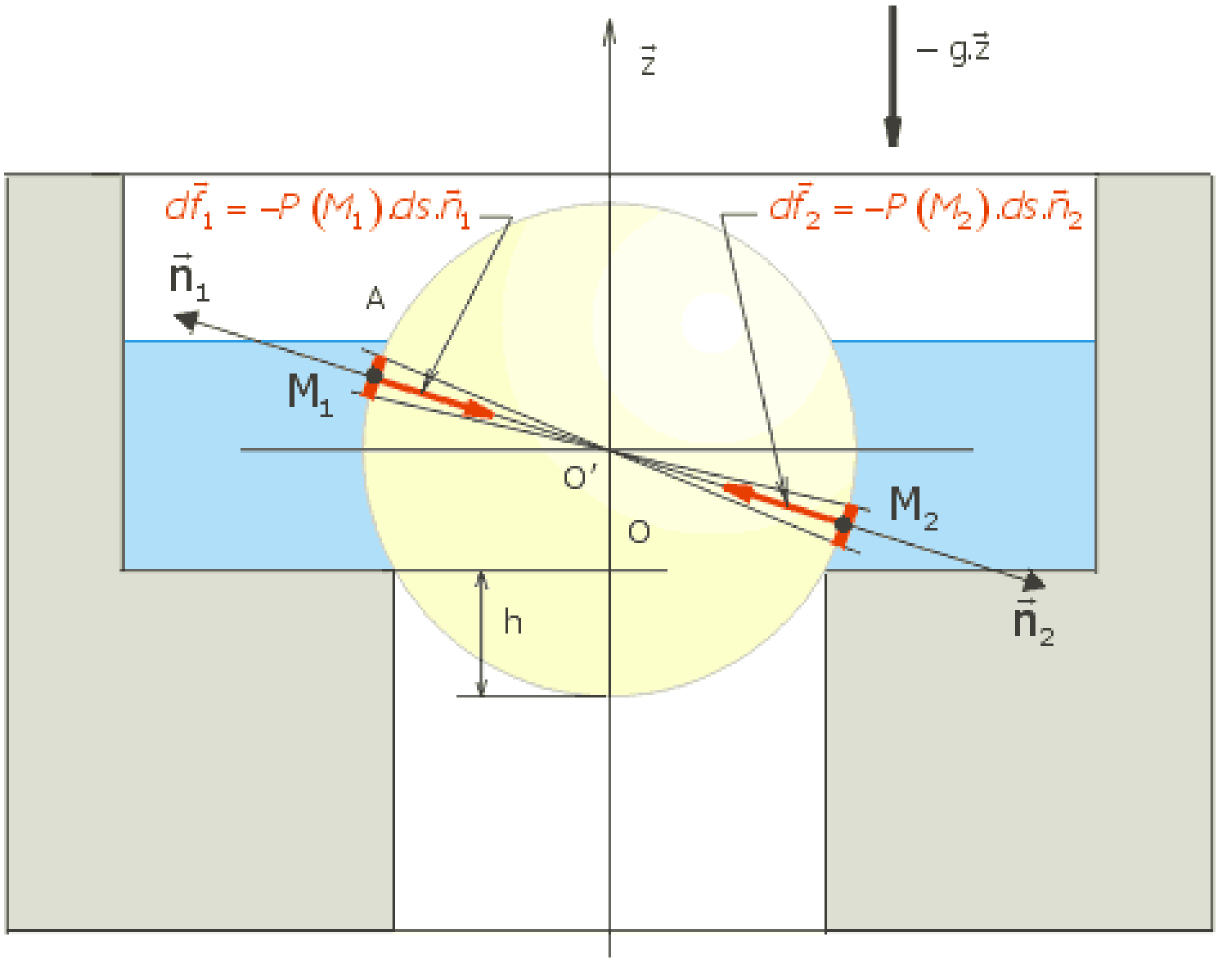
Solution

1 Déterminons le torseur résultant des actions de l'eau sur la surface externe de la sphère . La pression hydrostatique qui s'exerce en tout point de la surface immergée de la sphère crée au centre de gravité de la sphère une action résultante suivant la direction $\vec{z}$. Cette action permet , suivant la hauteur H de liquide et la masse de la sphère, soit de décoller la sphère , soit de la plaquer sur le fond du récipient. Déterminons le torseur résultant des actions de la pression hydrostatique en O' :

En hydrostatique , le fluide exerce sur la surface immergée une pression telle que $\dfrac{dP(z)}{dz} = -\rho.g$. En positionnant l'origine des coordonnées z sur le fond du récipient et en intégrant cette relation entre deux positions repérées par les points A et M tels qu'en A : $z = H$ et en M : z , on a :

$\underbrace{P(A)}_{P_{atm}} - P(M) = -\rho.g.(H - z)$ et donc $P(M) = \rho.g.(H - z) + P_{atm}$

De plus, en considérant deux points immergés de la surface de la sphère diamétralement opposés :



Sur M_1 agit l'élément d'effort $d\vec{f}_1 = -P(M_1).ds.\vec{n}_1 = -\left(\rho.g.(H-z_1)+P_{atm}\right).ds.\vec{n}_1$

Sur M_2 agit l'élément d'effort $d\vec{f}_2 = -P(M_2).ds.\vec{n}_2 = -\left(\rho.g.(H-z_2)+P_{atm}\right).ds.\vec{n}_2$

Comme $\vec{n}_1+\vec{n}_2=\vec{0}$, en faisant la somme

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 = -\left(\rho.g.(H-z_1)+P_{atm}\right).ds.\vec{n}_1 - \left(\rho.g.(H-z_2)+P_{atm}\right).ds.\vec{n}_2$$

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 = \rho.g.(z_1-z_2)\,ds\,\vec{n}_1$$

On remarque que la pression P_{atm} n'intervient pas dans l'expression de cet effort résultant. On peut faire le même raisonnement pour tout bipoint à points diamétralement opposés. Nous pouvons donc simplifier les calculs en utilisant uniquement la pression relative $P_{rel}(M) = \rho.g.(H-z)$ agissant sur la surface immergée de la sphère.

Le raisonnement précédent peut s'appliquer aussi aux surfaces non immergées de la sphère et l'on constate que l es éléments d'efforts s'annulent deux à deux pour tout bipoint à points diamétralement opposés.

En conclusion, la pression relative s'exerçant sur la partie immergée de la sphère sera la seule pression à considérer pour la détermination des actions de contact .

En considérant maintenant un élément de surface immergé, au point courant M du domaine soumis à la répartition surfacique de charge, nous avons :

- Les angles θ et φ positionnent le point $M \rightarrow \overrightarrow{O'M} = R.\vec{n} = R.\left(\cos\varphi.\vec{z}+\sin\varphi.\vec{u}\right)$.

- $\overrightarrow{OM}.\vec{z} = z = \left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\right).\vec{z} = R-h+R.\underbrace{\vec{n}.\vec{z}}_{\cos\varphi} \rightarrow z = R-h+R.\cos\varphi$

- $P_{rel}(M) = \rho.g.(H-z) \rightarrow P_{rel}(M) = \rho.g.(H-R+h-R.\cos\varphi)$

- L'élément de surface $ds \rightarrow ds = R^2.\sin\varphi d\theta d\varphi$

- Les bornes de variations des angles θ et $\varphi \rightarrow \left| \begin{array}{ll} Pour\ \theta & 0 \le \theta \le 2.\pi \\ & \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ Pour\varphi & Ar\cos\dfrac{H+h-R}{R} \le \varphi \le \pi - Ar\cos\dfrac{R-h}{R} \end{array} \right.$

L'élément de torseur d'action de pression au point M est alors :

$${}_M\left\{dT_{Eau\rightarrow Sphère}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c} -P_{rel}(M).ds.\vec{n} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

$$= \underset{M}{} \begin{Bmatrix} -\left(\rho.g.\left(H - R + h - R.\cos\varphi\right)\right).R^2.\sin\varphi.d\theta.d\varphi.\left(\cos\varphi.\vec{z} + \sin\varphi.\vec{u}\right) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_{O}\left\{dT_{Eau\to Sphère}\right\} = \underset{O}{} \begin{Bmatrix} -P_{rel}\left(M\right).ds.\vec{n} \\ \underbrace{\overrightarrow{O'M}}_{R.\vec{n}} \wedge -P_{rel}\left(M\right).ds.\vec{n} \end{Bmatrix} = \underset{O}{} \begin{Bmatrix} -P_{rel}\left(M\right).ds.\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_{O}\left\{T_{Eau\to Sphère}\right\} = \underset{O'}{} \begin{Bmatrix} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{0}^{2.\pi} -P_{rel}\left(M\right).ds.\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_{O}\left\{T_{Eau\to Sphère}\right\} = \underset{O}{} \begin{Bmatrix} \vec{R}_{Eau\to Sphère} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{O}{} \begin{Bmatrix} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{0}^{2\pi} -\rho.g.\left(H - R + h - R\cos\varphi\right).R^2.\sin\varphi.\left(\cos\varphi.\vec{z} + \sin\varphi.\vec{u}\right)d\theta.d\varphi \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Il suffit alors de déterminer $\vec{R}_{Eau\to Sphère}$:

$$\vec{R}_{Eau\to Sphère} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{0}^{2\pi} -\rho.g.\left(H - R + h - R.\cos\varphi\right).R^2.\sin\varphi.\left(\cos\varphi.\vec{z} + \sin\varphi.\vec{u}\right)d\theta.d\varphi$$

$$\vec{R}_{Eau\to Sphère} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -\rho.g.\left(H - R + h - R\cos\varphi\right).R^2.\sin\varphi.\left(\cos\varphi.\int_{0}^{2.\pi} d\theta.\vec{z} + \sin\varphi.\underbrace{\int_{0}^{2.\pi} \vec{u}.d\theta}_{\vec{0}}\right).d\varphi$$

$$\vec{R}_{Eau\to Sphère} = \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -2\pi.\rho.g.R^2.\left(\left(H - R + h\right).\sin\varphi.\cos\varphi - R.\cos^2\varphi.\sin\varphi\right).d\varphi\right).\vec{z}$$

$$\vec{R}_{Eau\to Sphère} = -2.\pi.\rho.g.R^2.\left(\left(H - R + h\right).\left[-\frac{\cos^2\varphi}{2}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + R.\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right).\vec{z}$$

En utilisant à présent les valeurs de φ_1 et de φ_2 nous obtenons :

$\vec{R}_{Eau\to Sphère} =$

$$-2\pi.\rho.g.R^2.\left(-\frac{(H+h-R)}{2}.\left(\left(\frac{R-h}{R}\right)^2-\left(\frac{H+h-R}{R}\right)^2\right)+\frac{R}{3}\left(-\left(\frac{R-h}{R}\right)^3-\left(\frac{H+h-R}{R}\right)^3\right)\right).\vec{z}$$

Et l'on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{R}_{Eau\rightarrow Sphère}=\pi.\rho.g.H^2.\left(R-\frac{H}{3}-h\right).\vec{z}}$$

Pour déterminer les possibilités d'obturation, il convient d'isoler le flotteur et d'appliquer le principe fondamental de la statique , théorème de la résultante statique en projection sur la direction $\vec{z}$:

$$\left(\vec{R}_{Eau\rightarrow Sphère}+\vec{F}_{Récipient\rightarrow Sphère}+m.\vec{g}\right).\vec{z}=0$$

Pour que le flotteur soit au contact du récipient (obturation), il faut que : $\vec{F}_{Récipient\rightarrow Sphère}.\vec{z}>0$

La condition d'obturation devient donc :

$$-\left(\vec{R}_{Eau\rightarrow Sphère}+m.\vec{g}\right).\vec{z}>0$$

il vient : $\boxed{\pi.\rho.g.H^2.\left(\frac{H}{3}+h-R\right)-m.g>0}$