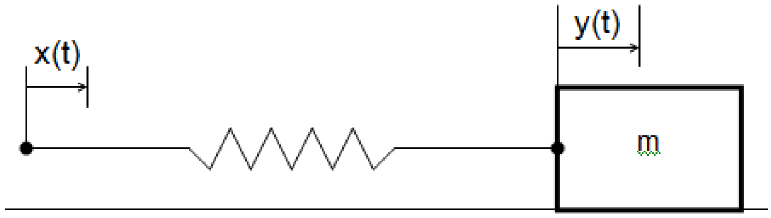
Corrigé du TD Etude des SLCI

Exercice 1.

Etude d'un système masse ressort



Cas sans frottement

Equation de comportement du système : $m.\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = k.(x(t) - y(t))$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m.p^2.Y(p) = k.(X(p) - Y(p)) \qquad H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{m.p^2 + k}$$

Entrée impulsion : $x(t) = \delta(t)$ ⇨ $X(p) = 1$

Sortie : $Y(p) = H(p).X(p) = \dfrac{k}{m.p^2 + k}$

On utilise le tableau des transformée usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$Y(p) = \frac{\frac{k}{m}}{p^2 + \frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}.\sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2 + \frac{k}{m}} \quad ⇨ \quad y(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}.\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right).u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie.

Entrée échelon unitaire : $x(t) = u(t)$ ⇨ $X(p) = \dfrac{1}{p}$

Sortie : $Y(p) = H(p).X(p) = \dfrac{k}{p.(m.p^2 + k)}$

On décompose en éléments simples : $Y(p)\dfrac{k}{p.(m.p^2 + k)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b.p}{m.p^2 + k}$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

$$Y(p) = \frac{k}{p.(m.p^2 + k)} = \frac{1}{p} + \frac{-m.p}{m.p^2 + k}$$

On utilise le tableau des transformée usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad y(t)=\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right)\right).u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie décalée.

Cas avec frottements faibles

Equation de comportement du système : $m.\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=k.(x(t)-y(t))-\lambda.\dfrac{dy(t)}{dt}$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m.p^2.Y(p)=k.(X(p)-Y(p))-\lambda.p.Y(p)$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{m.p^2+\lambda.p+k}$$

On fait l'application numérique : $H(p)=\dfrac{5}{p^2+2.p+5}$

Entrée impulsion : $x(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(p)=1$

Sortie : $Y(p)=H(p).X(p)=\dfrac{5}{p^2+2.p+5}$

Les racines du dénominateur sont imaginaires, on va mettre $Y(p)$ sous la forme

$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ afin de passer dans le domaine temporel.

On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement

Domaine temporel	*Domaine de Laplace*	*Domaine temporel*	*Domaine de Laplace*
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

$$Y(p)=\frac{\frac{5}{2}*2}{(p+1)^2+2^2} \quad \Rightarrow \quad y(t)=\frac{5}{2}e^{-t}.\sin(2t).u(t)$$

Courbe : Fonction sinusoïdale amortie

Cas avec frottements importants

On fait l'application numérique : $H(p)=\dfrac{6}{p^2+5.p+6}$

Entrée impulsion : $x(t)=\delta(t)$ ⇨ $X(p)=1$

Sortie : $Y(p)=H(p).X(p)=\dfrac{6}{p^2+5.p+6}$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$Y(p)=\frac{6}{(p+2).(p+3)}=\frac{a}{p+2}+\frac{b}{p+3}$$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

$$Y(p)=\frac{a}{p+2}+\frac{b}{p+3}=\frac{a.(p+3)+b.(p+2)}{(p+2).(p+3)}=\frac{3.a+2.b+(a+b).p}{(p+2).(p+3)}$$

On trouve $a=6$ et $b=-6$ $Y(p)=\dfrac{6}{p+2}-\dfrac{6}{p+3}$

On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement pour repasser dans le domaine temporel

$$y(t)=6.(e^{-2.t}-e^{-3.t}).u(t)$$ Courbe : …

Exercice 2.

1. On applique la TL à l'équation $\dfrac{d^2s(t)}{dt^2}+7.\dfrac{ds(t)}{dt}+12.s(t)=4.e(t)$ (CI = 0)

On trouve la fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{4}{p^2+7.p+12}$

L'entrée est un échelon unitaire : $E(p)=\dfrac{1}{p}$

Sortie : $S(p)=H(p).E(p)=\dfrac{4}{p.(p^2+7.p+12)}$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$S(p)=\frac{4}{p.(p+4).(p+3)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p+4}+\frac{c}{p+3}$$

On trouve a, b et c en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur…

Puis on repasse dans le domaine temporel : $s(t)=\frac{1}{3}\left(1+3.e^{-4.t}-4.e^{-3.t}\right).u(t)$

2. *Soit le système défini par la fonction de transfert* $H(p)=\dfrac{p+5}{p^2+6.p+13}$ *, déterminer la réponse temporelle de ce système à une impulsion.*

$$S(p)=H(p).E(p)=\frac{p+5}{p^2+6.p+13}.1=\frac{p+3+2}{(p+3)^2+4}$$

$$s(t)=\left(e^{-3.t}.\cos(2.t)+e^{-3.t}.\sin(2.t)\right).u(t)$$

3. *Soit la fonction* $S(p)=\dfrac{2.p+3}{p^2+6.p+2}$ *, déterminer s(0), s(∞) et s'(0) en utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales.*

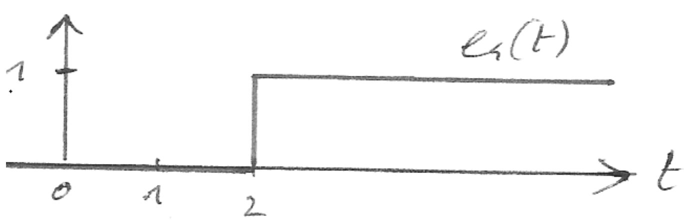
$$p.S(p)=\frac{p.(2.p+3)}{p^2+6.p+2}$$ $s(0+)=2$ $s(\infty)=0$

$$s'(0)=\lim_{t\to 0}s'(t)=\lim_{p\to\infty}p.[p.S(p)-s(0+)]$$

$$p.[p.S(p)-s(0+)]=p.[\frac{p.(2p+3)}{p^2+6.p+2}-2]=\frac{-p.(9.p+4)}{p^2+6.p+2}$$ $s'(0)=-9$

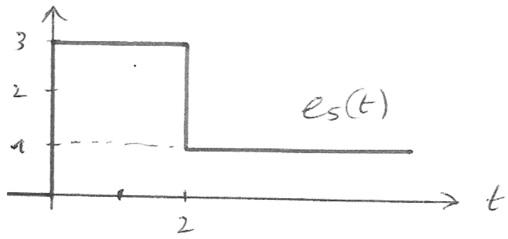
Exercice 3.

$e_4(t) = u(t-2)$



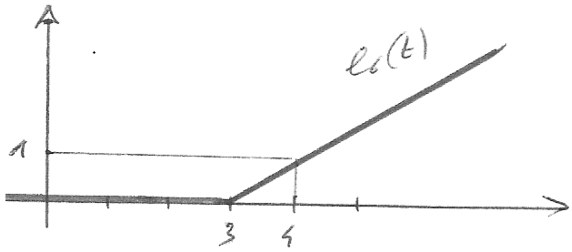
$$E_4(p)=\frac{e^{-2.p}}{p}$$

$e_5(t) = 3.u(t) - 2.u(t-2)$

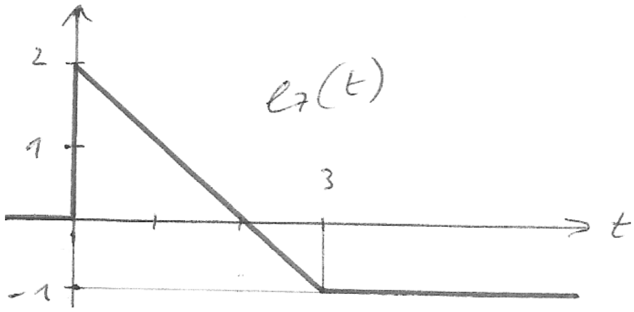


$$E_5(p) = \frac{3 - 2.e^{-2.p}}{p}$$

$e_6(t) = (t-3).u(t-3)$



$$E_6(p) = \frac{e^{-3.p}}{p^2}$$



$e_7(t) = 2.u(t) - t.u(t) + (t-3).u(t-3)$

$$E_7(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-3.p}}{p^2}$$