A.VIII. Transformation du mouvement à rapport fixe

On peut transformer une rotation en rotation à une vitesse différente, en une translation, et une translation en rotation. La plupart du temps, on utilise la propriété de roulement sans glissement.

Nous nous intéressons ici aux transformations de mouvement présentant un **rapport constant** :

$$\omega_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}V_{e/0}$$

A.VIII.1 Transformation Rotation/Rotation

A.VIII.1.a Introduction

Lorsqu'une pièce, classiquement un arbre, tourne autour d'un axe, il est possible de transmettre ce mouvement de rotation à un autre arbre, dans le même sens ou dans le sens opposé, tout en modifiant la vitesse de rotation. Pour cela, parmi les possibilités existantes, les plus courantes sont :

- Les engrenages
- Les poulies/courroies ou Pignons/Chaînes

A.VIII.1.b Rapport de réduction

La transformation d'une rotation en une autre rotation sera caractérisée par ce que l'on appelle un rapport de réduction (aussi appelé rapport de multiplication s'il augmente la vitesse en sortie).

Lorsque de l'étude d'un réducteur (multiplicateur), on choisit de définir l'entrée et la sortie, soit parce qu'elle est imposée par le mécanisme, soit arbitrairement.

On appelle alors :

- ω_e la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée
- ω_s la vitesse de rotation de l'arbre de sortie

On définit le rapport de réduction par :

$$k = \frac{\omega_s}{\omega_e}$$

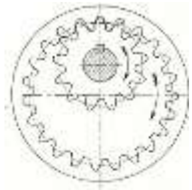
Ce rapport s'appelle toujours rapport de réduction, mais s'il est supérieur à 1, on l'appelle aussi rapport de multiplication car la vitesse en sortie est alors plus grande que la vitesse en entrée.

A.VIII.1.c Solution Engrenages

A.VIII.1.c.i Généralités

La transmission par engrenages, association de deux roues dentées, est de loin la plus utilisée. Elle exploite la propriété de roulement sans glissement entre deux surfaces cylindriques parfaites.

L'engrenage n'est en réalité qu'une solution géométrique (profils en développantes de cercles) qui permet d'assurer un point de contact tel qu'il y ait roulement sans glissement entre deux cylindres parfaits à des diamètres appelés diamètres primitifs des roues dentées utilisées. L'avantage de la présence de dents est qu'il est possible de transmettre les efforts par « obstacle » et non par adhérence, ce qui permet de transmettre des couples bien plus importants que ceux transmissibles par adhérence.



Une couronne est une roue dentée dont les dents sont à l'intérieur :

A.VIII.1.c.ii Module d'un engrenage

Pour qu'un engrenage fonctionne, il faut que la distance entre deux dents sur chaque roue dentée soit égale. Appelons cette distance λ au niveau du diamètre primitif, Z_i le nombre de dents de la roue dentée i et D_i son diamètre, et considérons un engrenage composé des roues 1 et 2 :

$$\lambda = \frac{\pi D_1}{Z_1} = \frac{\pi D_2}{Z_2}$$

On définit alors le module d'un engrenage :

$$\frac{D_1}{Z_1} = \frac{D_2}{Z_2} = m$$

Le nombre de dents noté est proportionnel aux diamètres primitifs des roues dentés :

$$D = mZ$$

A.VIII.1.c.iii Modélisation des engrenages

• **<u>Modélisation des roues dentées</u>**

Cinématiquement parlant, une roue dentée sera modélisée par une pièce cylindrique lisse (sans dents) dont le diamètre est le diamètre primitif de la roue. Ainsi, un engrenage sera modélisé par deux pièces lisses en contacts telles que les diamètres de chaque roue est son diamètre primitif. La relation entrée/sortie cinématique sera alors la même que s'il y avait roulement sans glissement entre les deux roues. Statiquement parlant, par contre, la transmission par obstacles ou par adhérence est différente.

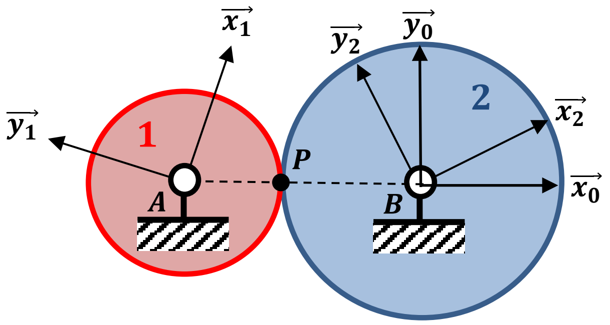
• **<u>Modélisation du contact entre roues dentées</u>**

Un contact entre deux roues dentées se réalise sur un point ou sur une ligne et sera donc modélisé soit par une liaison **ponctuelle**, soit par une liaison **linéaire rectiligne**. Pour les engrenages droits, et si les mouvements sont plans, ponctuelle et linéaire rectiligne en modèle plan seront cinématiquement équivalentes.

A.VIII.1.c.iv Rapport de réduction des engrenages droits

• **Contact extérieur**

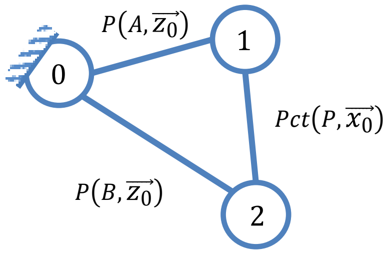
Soit le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \ ; \ \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}}\right)$$

$$\theta_{10} = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}}\right)$$



On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

On a :

$$\vec{V}(P, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_1 \overrightarrow{x_0} \wedge \Omega_{10} \overrightarrow{z_0} = R_1 \Omega_{10} \overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}(P, 2/0) = \vec{V}(B, 2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = R_2 \overrightarrow{x_0} \wedge \Omega_{20} \overrightarrow{z_0} = -R_2 \Omega_{20} \overrightarrow{y_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

$$\vec{V}(P, 2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(P, 2/0) + \vec{V}(P, 0/1) = \vec{V}(P, 2/0) - \vec{V}(P, 1/0) = \vec{0}$$

Soit :

$$R_1 \Omega_{10} \overrightarrow{y_0} + R_2 \Omega_{20} \overrightarrow{y_0} = (R_1 \Omega_{10} + R_2 \Omega_{20}) \overrightarrow{y_0}$$

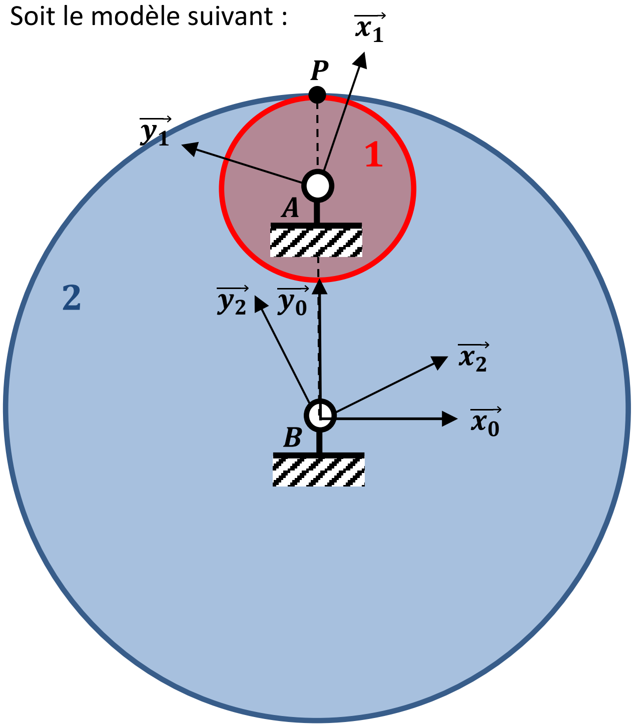
$$R_1 \Omega_{10} + R_2 \Omega_{20} = 0$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}}$$

On remarque qu'il y a inversion du sens de rotation.

• **Contact intérieur**

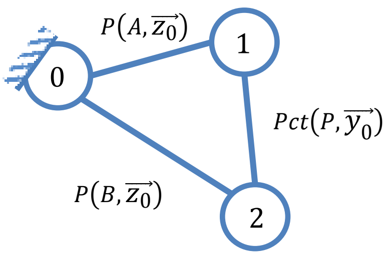
Soit le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \ ; \ \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2})$$

$$\theta_{10} = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$$



On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

On a :

$$\vec{V}(P,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_1\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{10}\overrightarrow{z_0} = -R_1\Omega_{10}\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = -R_2\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{20}\overrightarrow{z_0} = -R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) + \vec{V}(P,0/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0) = \vec{0}$$

Soit :

$$R_1\Omega_{10}\overrightarrow{y_0} - R_2\Omega_{20}\overrightarrow{y_0} = (R_1\Omega_{10} - R_2\Omega_{20})\overrightarrow{y_0}$$

$$R_1\Omega_{10} - R_2\Omega_{20} = 0$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}}$$

On remarque qu'il y a conservation du sens de rotation.

• **Train d'engrenages - Formule de Willis**

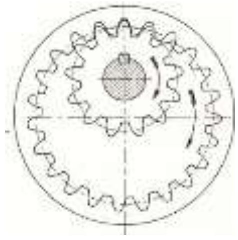
Dans le cas d'un engrenage avec contact extérieur, nous avons montré que : $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$

Dans le cas d'un engrenage avec contact intérieur, nous avons montré que : $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_2}$

$k_{2/1}$ est appelé rapport de réduction $\left(k_{2/1} < 1\right)$, et/ou de multiplication $\left(k_{2/1} > 1\right)$ bien que le nom « rapport de réduction » puisse être utilisé dans tous les cas.

Considérons maintenant un ensemble de p engrenages en série dont les axes sont fixes dans le repère 0:

Contact extérieur



Contact intérieur

Engrenage 1 : roues 1 et 2 – rapport $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}}$

Engrenage 2 : roues 2 et 3 – rapport $k_{3/2} = \frac{\Omega_{3/0}}{\Omega_{2/0}}$

…

Engrenage p : roues p et $p+1$ – rapport $k_{p+1/p} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}}$

Supposons que cet ensemble comporte n contacts extérieurs.

Le rapport de réduction global vaut :

$$k_{p+1/1} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{10}} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}} \frac{\Omega_{p/0}}{\Omega_{p-1/0}} \dots \frac{\Omega_{30}}{\Omega_{20}} \frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = k_{p+1/p} k_{p/p-1} \dots k_{3/2} k_{2/1} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i}$$

$$k_{p+1/1} = (-1)^n \frac{Z_p}{Z_{p+1}} \frac{Z_{p-1}}{Z_p} \dots \frac{Z_2}{Z_3} \frac{Z_1}{Z_2} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$

Comme chaque roue dentée de chaque engrenage possède le même module, la relation reste vraie avec les diamètres, d'où la formule de Willis sous différentes formes suivante :

$$\boxed{k_{p+1/1} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{D_{menantes}}{D_{menées}}}$$

FORMULE DE WILLIS

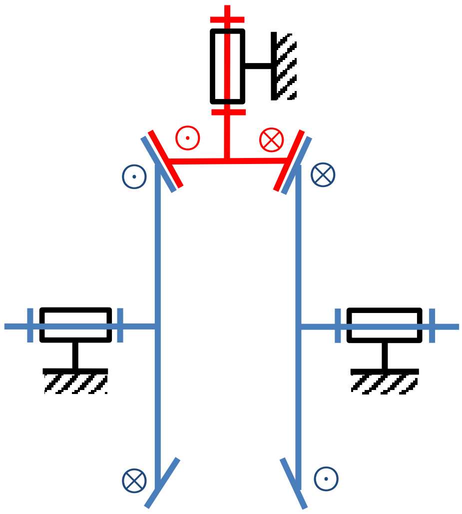
Cf exemple TD

• **Remarques**

Les roues menantes sont les roues qui « partent » de l'entrée, les roues menées sont celles qui « partent » de la sortie – Autrement dit, dans chaque engrenage (ensemble de 2 roues dentées), la roue entraînée par une roue provenant de l'entrée est menante, la roue liée à une roue allant vers la sortie est menée – Une roue peut à la fois être menée par les roues provenant de l'entrée, et menante pour les roues allant vers la sortie, auquel cas son nombre de dents n'entre pas en compte dans la réduction.

La formule de Willis n'est applicable que lorsque les axes de rotation des roues dentées sont fixes dans le repère 0. On parle de **trains simples** dans ce cas.

Attention, le signe de la formule de Willis est juste uniquement si les axes des roues dentées sont parallèles (engrenages droits). Dans le cas d'engrenages coniques, il faut traiter en visuel au cas par cas !!!



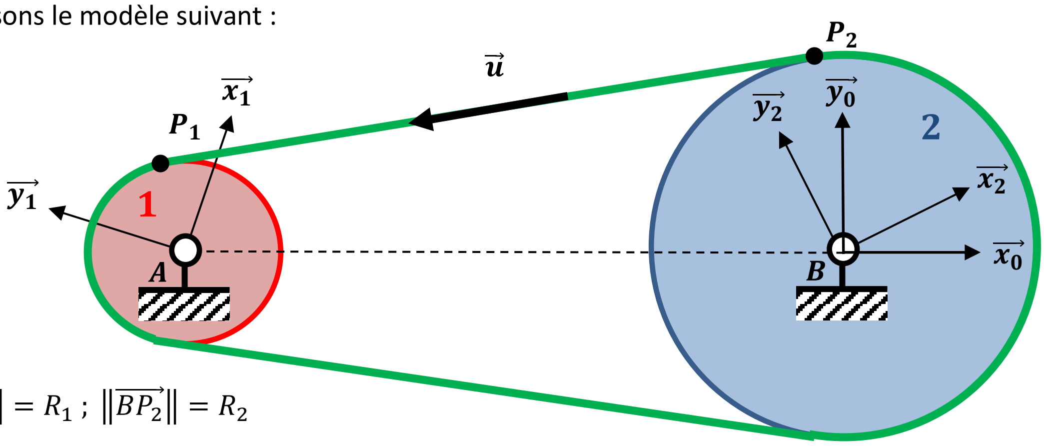
On peut croire que le rapport $k_{p+1/1}$ se simplifie toujours en $(-1)^n \frac{Z_{p+1}}{Z_1}$. Attention, cela n'est vrai que si chaque roue dentée est à la fois menante et menée. Il arrive qu'un même arbre de transmission soit composé de deux roues dentées liées par encastrement, que l'une soit menée, l'autre menante, et qu'elles aient un nombre de dents différents qui empêchera cette simplification

A.VIII.1.d Solution Poulie/Courroie ou Pignon/Chaîne

Voici ci-dessous un ensemble Poulie/Courroie modifiant la vitesse de rotation.

La courroie peut être lisse ou crantée selon les couples à transmettre et la nécessité éventuelle de permettre le glissement en cas de blocage.

Proposons le modèle suivant :



$\|\overrightarrow{AP_1}\| = R_1$; $\|\overrightarrow{BP_2}\| = R_2$

$\theta_{20} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_2}})$

$\theta_{10} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_1}})$

Supposons que la courroie ne se déforme pas entre P_1 et P_2 lors de l'utilisation (vrai en régime stationnaire, à vitesse constante et sans variation de l'effort dans celle-ci).

$$\vec{V}(P_1, 1/0) = R_1 \Omega_{10} \vec{u} \quad ; \quad \vec{V}(P_2, 2/0) = R_2 \Omega_{20} \vec{u}$$

Si la courroie ne se déforme pas, c'est-à-dire que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{cst}$:

$$\vec{V}(P_1, 1/0) = \vec{V}(P_2, 2/0) \Leftrightarrow R_1 \Omega_{10} \vec{u} = R_2 \Omega_{20} \vec{u}$$

Soit :

$$R_1 \Omega_{10} = R_2 \Omega_{20}$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Remarque : selon l'agencement des courroies et la présence de galets, il est possible d'inverser les sens de rotation (courroies croisées) et de changer les axes de rotation.

A.VIII.2 Transformation Rotation/Translation

Les deux solutions généralement utilisées pour transformer une rotation en translation, et inversement, sont :

- L'ensemble Pignon/Crémaillère
- L'ensemble Poulie/Courroie

A.VIII.2.a Pignon/Crémaillère

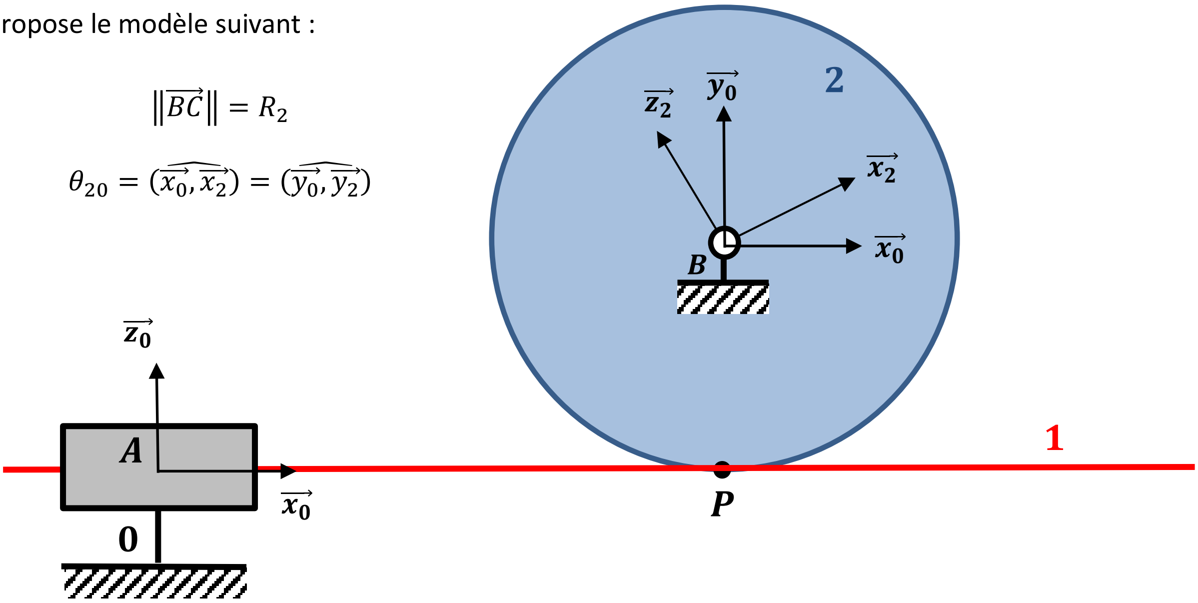
Un ensemble pignon crémaillère correspond à un engrenage dans lequel l'une des roues dentées est « déroulée ».

Ici aussi, la géométrie des dents assure un roulement sans glissement entre le cercle de diamètre primitif de la roue dentée et une ligne primitive de la crémaillère, les dents permettant de transmettre des efforts bien plus importants que par adhérence.

On propose le modèle suivant :

$$\|\overrightarrow{BC}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}})$$



$$\vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = R_2\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{20}\overrightarrow{z_0} = R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{V}(P,1/0) = V_{10}\overrightarrow{x_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) + \vec{V}(P,0/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0) = \vec{0}$$

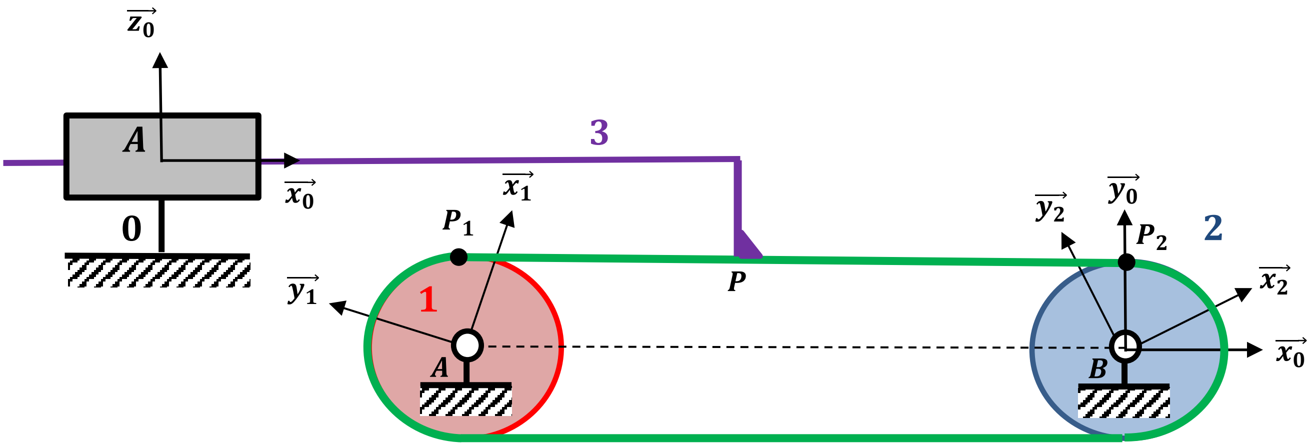
$$R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0} - V_{10}\overrightarrow{x_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{V_{10} = R_2\Omega_{20}}$$

Remarque : pour inverser le sens du mouvement, il suffit de placer la crémaillère à l'opposé de la roue dentée

A.VIII.2.b Poulie/Courroie

En général, on utilise deux poulies de mêmes diamètres afin de transformer une rotation en translation et inversement.

On propose le modèle suivant :



Si la courroie est indéformable :

$$\vec{V}(P,3/0) = \vec{V}(P_1,1/0) = \vec{V}(P_2,2/0)$$

$$V_{30} = -R_1\Omega_{10} = -R_2\Omega_{20}$$

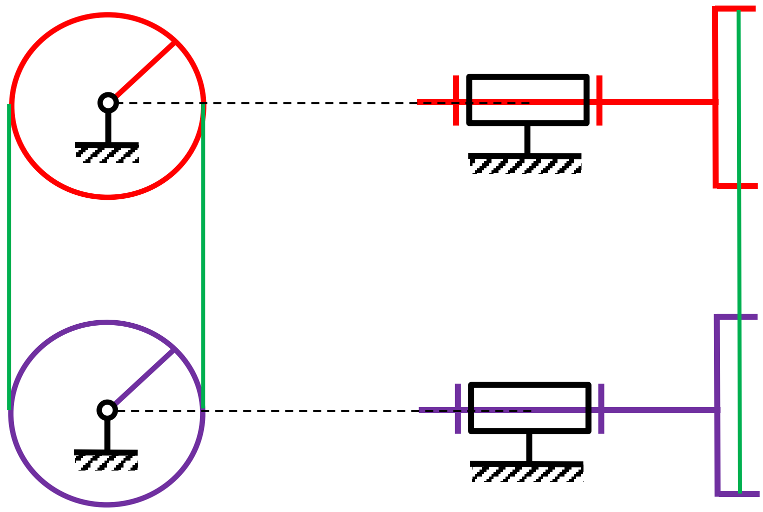
Remarque : pour inverser le sens du mouvement, il suffit de raccorder la pièce 3 sur la partie inférieure de la courroie.

A.VIII.3 Modèles cinématiques

Nous avons jusque-là représenté les roues dentées et les courroies par des disques colorés. Voyons comment les représenter proprement sur un schéma cinématique.

A.VIII.3.a Modèle poulies

Une poulie se représente comme suit :



A.VIII.3.b Modèle Roues dentées et couronnes