# A. Statique

## A.I. Introduction

L'objet de ce chapitre traitant de la statique des solides indéformables est de déterminer les actions mécaniques (efforts, moments) transitant dans les liaisons d'un mécanisme en vue de le dimensionner. Nous nous limiterons à la seule détermination de ces actions pour des problèmes isostatiques (solvables).

Nous supposerons toujours que les systèmes que nous étudions sont immobiles, d'où le terme « Statique ». En 2° année, nous traiterons de la « Dynamique » des solides, ce qui conduira à aller un peu plus loin que ce que nous verrons ici.

## A.II. Outils mathématiques pour la statique

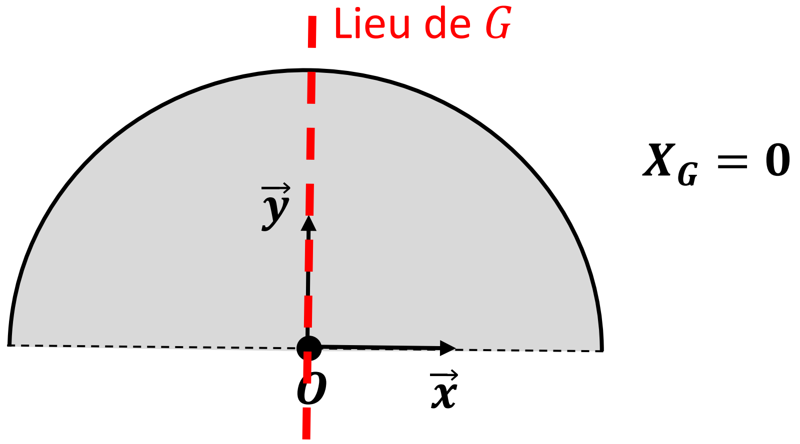
En statique, nous allons devoir déterminer la position de centres géométriques de lignes, surfaces et volumes. Par ailleurs, nous allons manipuler des intégrales de produits vectoriels. Nous allons donc ici donner quelques outils mathématiques utiles pour la suite.

### A.II.1 Centres géométriques

#### A.II.1.a Préliminaires

Lorsqu'il existe un élément de symétrie sur une géométrie, le centre géométrique appartient forcément à cet élément de symétrie.

Par exemple, le centre d'un demi disque est obligatoirement sur l'axe de symétrie $(O,\vec{y})$




De même, le centre d'un cône appartient forcément à son axe de révolution.

### A.II.1.b Segments

#### *A.II.1.b.i Un segment*

Soit un segment $[AB]$


On appelle centre du segment $[AB]$ le point $G$ tel que :

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{GP}\, dl = \vec{0}$$

où $P$ est un point courant de $[AB]$.

Soit un  repère $(O, \vec{x})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a $\overrightarrow{OP} = x\vec{x}$

La coordonné $X_G$ suivant $\vec{x}$ du centre du segment $[AB]$ de longueur $L$ telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x}$ vaut

$$\boxed{X_G = \frac{1}{L}\int_{[AB]} x\, dx}$$

Démonstration :

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OP}\, dl = \int_{[AB]} \overrightarrow{OG}\, dl + \int_{[AB]} \overrightarrow{GP}\, dl = \int_{[AB]} \overrightarrow{OG}\, dl$$

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}\int_{[AB]} dl = L\overrightarrow{OG} = LX_G\vec{x}$$

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OP}\, dl = \int_{[AB]} x\vec{x}\, dx = \int_{[AB]} x\, dx\vec{x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} = \frac{1}{L}\int_{[AB]} x\, dx\vec{x}$$

Remarque : cette formule ne se limite pas à un unique segment, $L$ représentant alors la longueur totale des segments intégrés.

#### A.II.1.b.ii Un ensemble de segments

Soient $n$ segments $[S_i]$ **alignés** suivant la droite $\Delta$, de longueurs respectives $L_i$ et de centres $G_i$ de coordonnées $X_i$ dans un repère $(O,\vec{x})$ quelconque de $\Delta$.

Soit $L_t$ la longueur totale d'intégration : $L_t = \sum_{i=1}^{n} L_i$. Le centre $G$ de plusieurs segments alignés est un point d'abscisse $X_G$ tel que :

$$X_G = \frac{1}{L_t} \int_{U[S_i]} x\,dx \quad ; \quad U[S_i]\ est\ l'union\ des\ segments\ S_i$$

Si l'on connaît la position des centres $G_i$ des $n$ segments $S_i$, on a :

$$\boxed{X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}}$$

Démonstration :

$$X_G = \frac{1}{L_t} \int_{U[S_i]} x\,dx = \frac{1}{L_t} \sum_{i=1}^{n} \int_{[S_i]} x\,dx = \frac{1}{L_t} \sum_{i=1}^{n} L_i X_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$$

$$avec\ X_i = \frac{1}{L_i} \int_{[S_i]} x\,dx \Rightarrow \int_{[S_i]} x\,dx = L_i X_i$$

Remarques :

- Dans le cas de segments, ce calcul est très rarement appliqué
- Il est possible d'utiliser des longueurs négatives pour « enlever » une partie de segment

### A.II.1.c Surfaces planes

#### *A.II.1.c.i Une surface*

Soit une surface plane $S$.

On appelle centre de la surface plane $S$ le point $G$ tel que :

$$\int_S \overrightarrow{GP}\, dS = \vec{0}$$

où $P$ est un point courant de $S$.

Soit un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a : $\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y}$

Les coordonnés $X_G$ suivant $\vec{x}$ et $Y_G$ suivant $\vec{y}$ du centre de la surface plane $S$ telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} + Y_G\vec{y}$ valent :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S x\, dS \\ Y_G = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S y\, dS \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

#### *A.II.1.c.ii Un ensemble de surfaces*

Soient $n$ surfaces $S_i$ **coplanaires** dans le plan $P$, de surfaces respectives $S_i$ et de centres $G_i$ de coordonnées $(X_i, Y_i)$ dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ quelconque de $P$.

Soit $S_t$ la surface totale d'intégration : $S_t = \sum_{i=1}^{n} S_i$. Le centre $G$ de plusieurs surfaces coplanaires est un point de coordonnées $(X_G, Y_G)$ tel que :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{S_t}\displaystyle\int_{US_i} x\, dS \\ Y_G = \dfrac{1}{S_t}\displaystyle\int_{US_i} y\, dS \end{cases} \quad ; \quad US_i\ est\ l'union\ des\ surfaces\ S_i$$

Si l'on connaît la position des centres $G_i$ des $n$ surfaces $S_i$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

Remarque : Il est possible d'utiliser des surfaces négatives pour « enlever » une partie de surface.

### A.II.1.d Volumes

#### A.II.1.d.i Un volume

Soit un volume $V$.

On appelle centre du volume $V$ le point $G$ tel que :

$$\int_V \overrightarrow{GP}\, dV = \vec{0}$$

où $P$ est un point courant de $S$.

Soit un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a : $\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

Les coordonnés $X_G$ suivant $\vec{x}$, $Y_G$ suivant $\vec{y}$ et $Z_G$ suivant $\vec{z}$ du centre du volume $V$ telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} + Y_G\vec{y} + Z_G\vec{z}$ valent :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x\, dV \\ Y_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y\, dV \\ Z_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V z\, dV \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

#### A.II.1.d.ii Un ensemble de volumes

Soient $n$ volumes $V_i$, de volumes respectifs $V_i$ et de centres $G_i$ de coordonnées $(X_i, Y_i, Z_i)$ dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque de l'espace.

Soit $V_t$ le volume total d'intégration : $V_t = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Le centre $G$ de plusieurs volumes est un point de coordonnées $(X_G, Y_G, Z_G)$ tel que :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} x\, dV \\ Y_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} y\, dV \\ Z_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} z\, dV \end{cases} \quad ; \quad UV_i \text{ est l'union des volumes } V_i$$

Si l'on connaît la position des centres $G_i$ des $n$ volumes $V_i$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \\ Z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

Remarque : Il est possible d'utiliser des volumes négatifs pour « enlever » une partie de volume.

#### A.II.1.e Présence de symétries

Lorsqu'un segment, une surface ou un volume présentent un axe ou un plan de symétrie, le centre géométrique de l'entité étudiée appartient à l'élément de symétrie.

### A.II.2 Produit vectoriel et intégration

Soit $\vec{a}$ un vecteur constant, $V$ un volume, $S$ une surface, $\Gamma$ une portion de courbe et $\vec{u}(P)$ un vecteur en un point $P$ de $V$, $S$ ou $\Gamma$.

D'après la distributivité du produit vectoriel et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_V \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dV = \int_V \vec{u}(P)\, dV \wedge \vec{a}$$

$$\int_S \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dS = \int_S \vec{u}(P)\, dS \wedge \vec{a}$$

$$\int_\Gamma \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dl = \int_\Gamma \vec{u}(P)\, dl \wedge \vec{a}$$

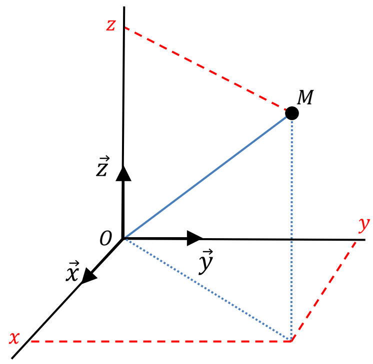
# A.II.3 Intégrales sur une ligne, une surface ou un volume

Nous allons avoir besoin de calculer des intégrales sur des lignes, surfaces et volumes. Voyons donc ici les outils dont nous allons avoir besoin.

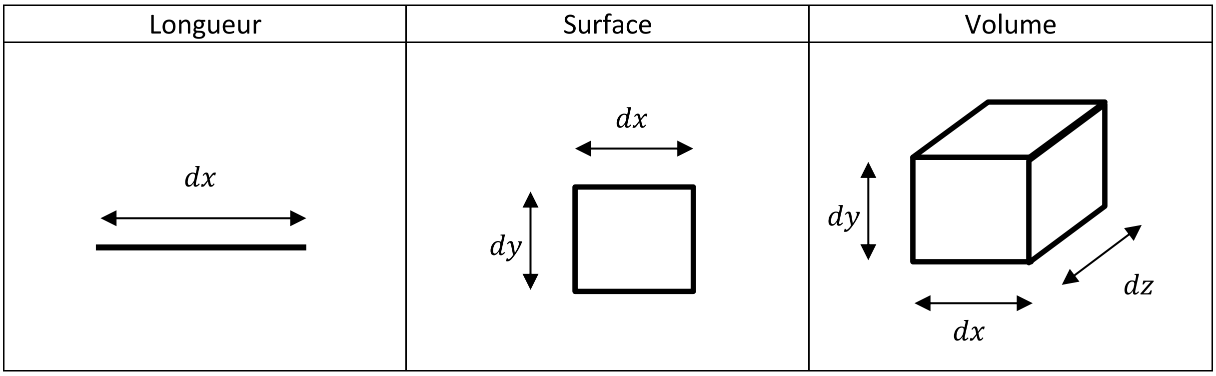
## A.II.3.a Préliminaires

J'invite tout lecteur à se reporter au cours spécifique sur les intégrales constituées de quelques règles et d'exemples. Ce cours se limitera aux rappels importants des intégrales cartésiennes, cylindriques et sphériques.

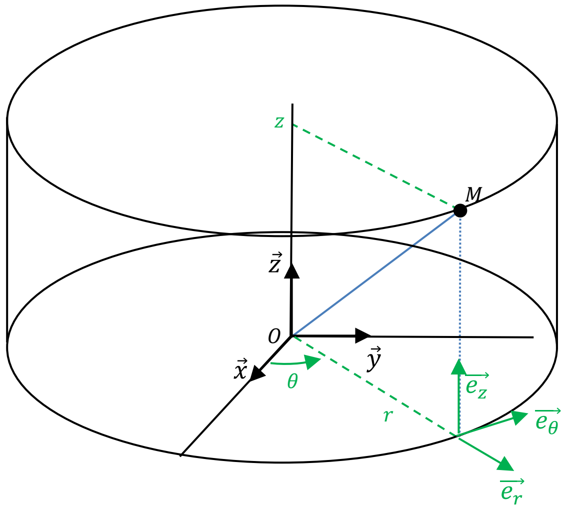
## A.II.3.b Coordonnées cartésiennes



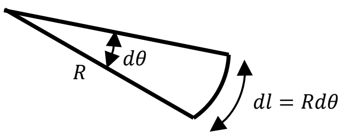
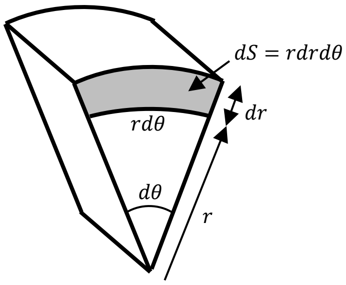
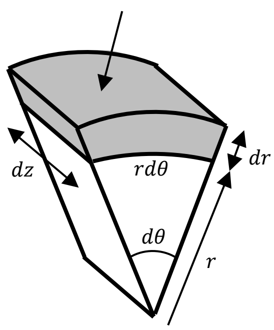
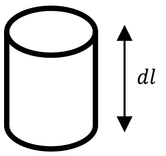
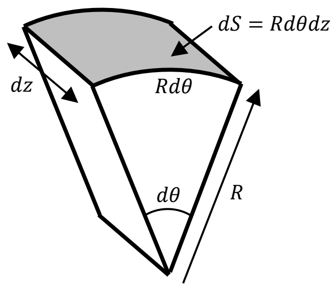

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$



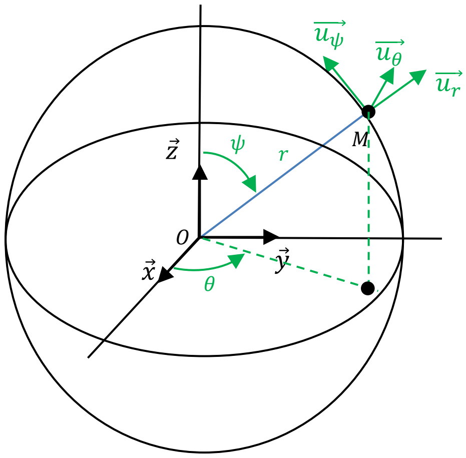
### A.II.3.c Coordonnées cylindriques



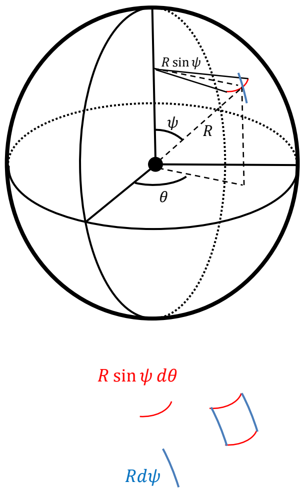
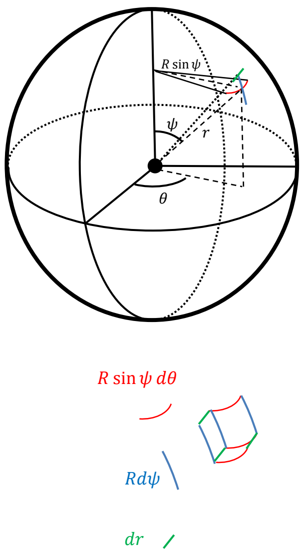

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

<table>
<tr><th>Longueur</th><th>Surface</th><th>Volume</th></tr>
<tr><td>Circonférence cylindre<br><br></td><td>Tranche de cylindre<br><br></td><td rowspan="2"><br></td></tr>
<tr><td>Arrête cylindre<br>$dl = dz$<br><br></td><td>Surface extérieure cylindre<br><br></td></tr>
</table>

### A.II.3.d Coordonnées sphériques




$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

| Longueur | Surface | Volume |
| --- | --- | --- |
| Peu utilisé, revient à faire du cartésien (ligne) ou cylindrique (cercles) | $dS = R^2 \sin\psi \, d\theta d\psi$  | $dV = r^2 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$  |

Attention : $dS$ et $dV$ sont positifs, $\psi \in [0, \pi]$ uniquement