A.V. Identification

L'identification d'un système consiste à déterminer son ordre et les coefficients caractéristiques de sa fonction de transfert à partir de la courbe temporelle de sa réponse à un échelon afin de proposer un son modèle de connaissance. On peut toutefois étudier sa réponse à d'autres sollicitations, en particulier ses réponses harmoniques, que nous verrons plus tard. Il faudra donc toujours passer par une manipulation expérimentale afin d'obtenir cette courbe. Souvent, la courbe obtenue est bruitée et la précision de l'identification s'en trouvera diminuée.

Dans ce cours, nous aborderons l'identification des systèmes du 1° et du 2° ordre à un échelon.

Par ailleurs, nous aborderons un cas particulier d'étude la réponse en oscillations libres d'un système du second ordre pour l'identification de certains de ses coefficients.

A.V.1 Préliminaires

La détermination de l'ordre d'un système à partir de sa réponse à un échelon se fait progressivement et par élimination.

Un premier ordre

- ne peut présenter de dépassement
- a une pente à l'origine non nulle

Si le système présente une pente à l'origine nulle ou s'il présente au moins un dépassement, son ordre sera au minimum 2.

Prouvons que tout système d'ordre n supérieur ou égal à 2 dont le numérateur de la fonction de transfert est un gain statique a une pente à l'origine nulle :

Soit un système d'ordre n de fonction de transfert canonique

$$H(p) = \frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \quad ; \quad S(p) = H(p)E(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + 1} \; (a_0 = 1)$$

$$\lim_{t \to 0^+} s'(t) = \lim_{p \to +\infty} p\mathcal{L}\big(s'(t)\big) = \lim_{p \to +\infty} p^2 S(p)$$

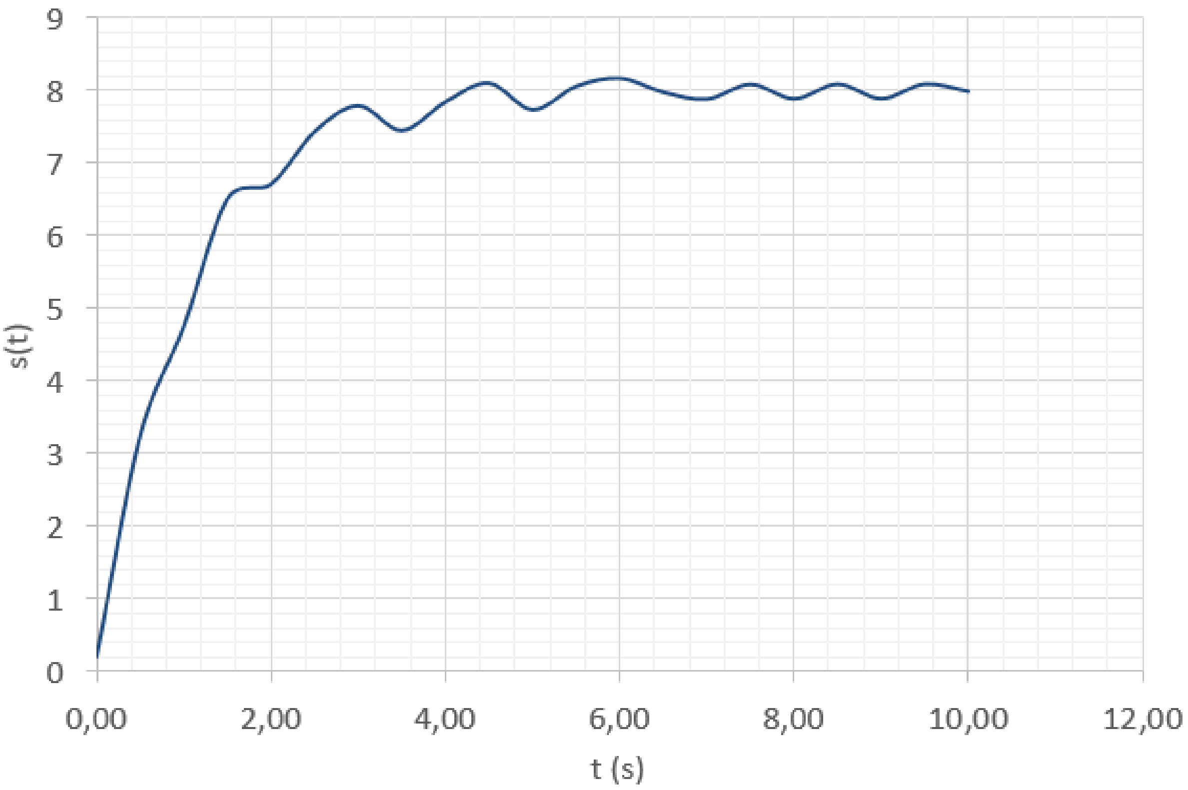
$$p^2 S(p) = pE_0 \frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{KE_0}{a_n}\frac{p}{p^n} = \frac{KE_0}{a_n} p^{1-n}$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{KE_0}{a_n} p^{1-n}\right) = \begin{cases} \frac{KE_0}{a_n} \; si\; n = 1 \\ 0 \; si\; n > 1 \end{cases}$$

A.V.2 Réponse à un échelon d'un 1° ordre

A.V.2.a Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon $e_0 = 10\ V$ en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.2.b Proposition d'un modèle

On observe une pente à l'origine non nulle et une réponse sans dépassement, on propose donc un modèle du premier ordre :

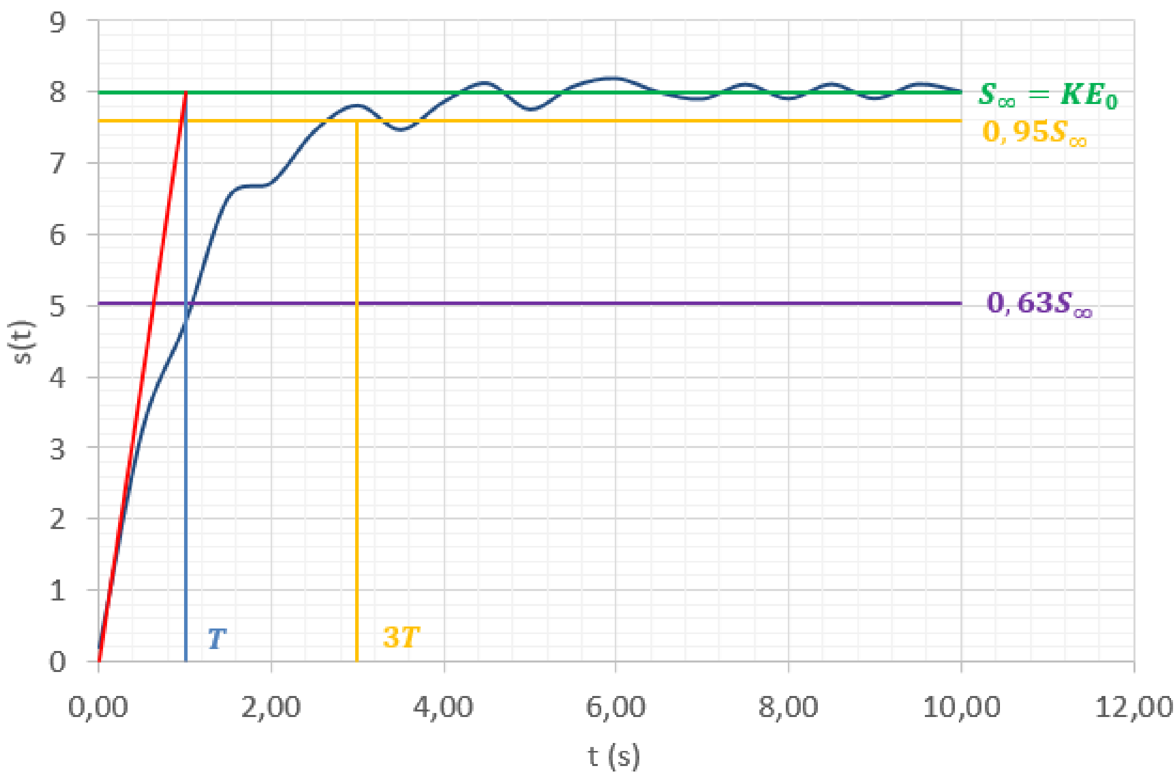
$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

A.V.2.c Identification des paramètres

Il faut identifier K et T.

On sait que :

- s_∞ vaut Ke_0
- La pente à l'origine coupe la valeur s_∞ en $t = T$
- A tout moment, la tangente en un point coupe l'asymptote finale T secondes plus tard
- $s(t)$ vaut $0{,}63s_\infty$ en $t = T$
- $s(t)$ vaut $0{,}95s_\infty$ en $t = 3T$
- … et toute autre valeur de $s(t)$ pour $t = kT$



En fonction du bruit, il peut être plus ou moins aisé de repérer les valeurs $0{,}63s_\infty$, $0{,}95s_\infty$ ainsi que les pentes à tout instant. Dans le cas ci-dessus, ce n'est pas évident.

A.V.2.c.i Détermination classique

On utilise en priorité

- la valeur finale pour déterminer K
- la tangente à l'origine pour déterminer T

s_∞ vaut Ke_0	La pente à l'origine coupe la valeur s_∞ en $t = T$
$s_\infty = 8 = 10K$ $K = 0{,}8$	$T = 1\ s$

A.V.2.c.ii Amélioration de la précision

Il reste à notre disposition la tangente à tout instant ainsi que les deux valeurs caractéristiques $0{,}63s_\infty$ et $0{,}95s_\infty$. En réalité, connaissant la forme de la réponse temporelle d'un premier ordre à un échelon, on a une infinité de valeurs à notre disposition. Ces deux dernières sont les plus utilisées connues classiquement.

Si la tangente à l'origine est difficile à déterminer, où pour avoir de nouvelles valeurs de T afin d'être plus précis, on peut prendre d'autres tangentes le long de $s(t)$ et déterminer T lorsque la tangente au point $\left(t, s(t)\right)$ coupe l'asymptote finale.

Lorsque plusieurs valeurs de T ou K sont déterminées, on fait la moyenne des valeurs trouvées afin de déterminer les coefficients définitifs.

Les autres valeurs particulières peuvent être utilisées de deux manières différentes selon la fiabilité avec laquelle on a déterminé K ou T au préalable :

- Si K est fiable (cas présent), c'est-à-dire qu'on voit bien l'asymptote horizontale, on peut utiliser les valeurs particulières pour déterminer d'autres valeurs de T. On part de $s_\infty = 8$
  - $0{,}63 s_\infty = 0.63 * 8 = 5{,}04$ – On trace cette droite et on détermine $T \approx 1$
  - $0{,}95 s_\infty = 0.95 * 8 = 7{,}6$ – On trace cette droite et on détermine $3T \approx 3$

  Au final : $T = \frac{1+1+1}{3} = 1$
- Si T est fiable, c'est-à-dire qu'on a bien la pente à l'origine, on peut utiliser les valeurs particulières pour déterminer d'autres valeurs de K. On part de $T = 1$
  - A $t = T$, $s(T) \approx 5 = 0{,}63 s_\infty = 0{,}63 * 10 * K$ – On en déduit $K \approx \frac{5}{6{,}3} = 0{,}79$
  - A $t = 3T$, $s(3T) \approx 7{,}6 = 0{,}95 s_\infty = 0{,}95 * 10 * K$ – On en déduit $K \approx \frac{7{,}6}{9{,}5} = 0{,}8$

  Au final : $K = \frac{0{,}8+0{,}79+0{,}8}{3} \approx 0{,}796$

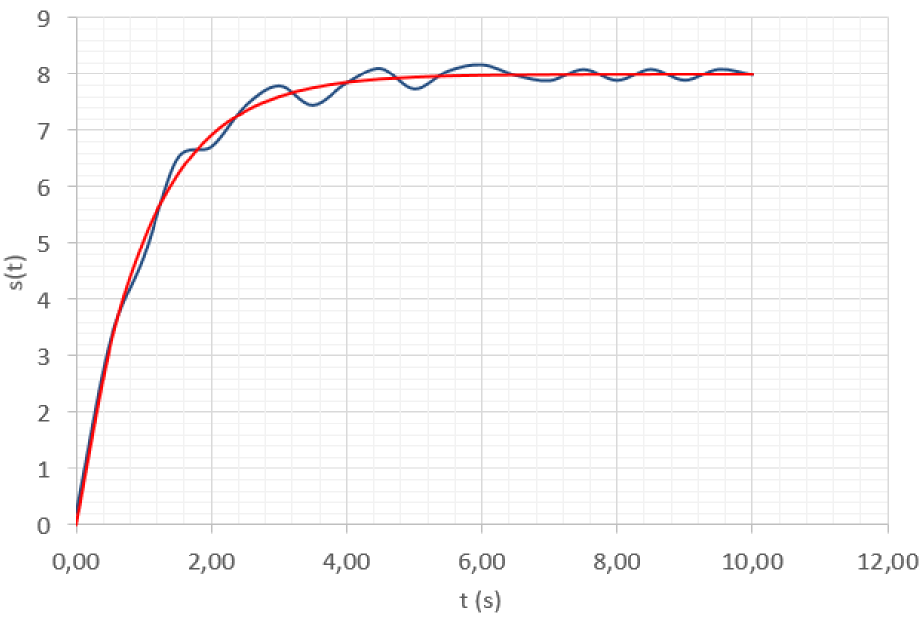
A.V.2.d Modèle proposé

Finalement, on a donc :

$$H(p) = \frac{0{,}8}{1+p}$$

A.V.2.e Vérification

Superposons la courbe expérimentale et la courbe du système ayant la fonction de transfert trouvée :



L'identification a été correctement menée.

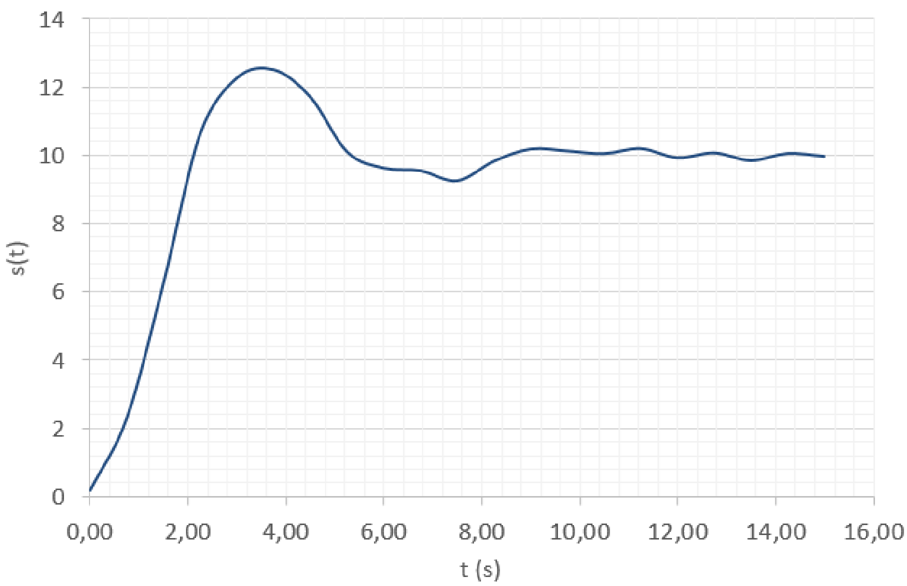
A.V.3 Réponse à un échelon d'un 2° ordre

A.V.3.a Cas $z < 1$

Ce cas ne pose pas de difficultés particulières, contrairement au cas $z > 1$ traité ensuite.

A.V.3.a.i Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon $e_0 = 10\ V$ en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.3.a.ii Proposition d'un modèle

On ne peut pas dire grand-chose sur la pente à l'origine vue la précision. Il semble qu'elle soit nulle. La présence d'un dépassement permet de dire que le système n'est pas du premier ordre. L'allure de la réponse laisse penser à un second ordre avec un coefficient d'amortissement inférieur à 1.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

A.V.3.a.iii Identification des paramètres

On sait que :

- s_∞ vaut Ke_0
- La pseudo T_n période vaut

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

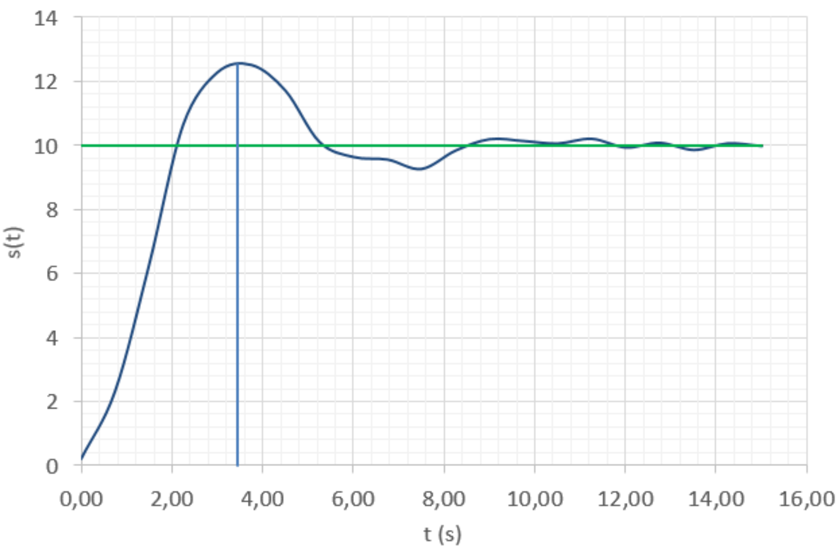
- Le premier dépassement en % vaut :

$$D_{1\%} = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \ln D_{1\%} = -\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\ln D_{1\%}\right)^2 = \frac{\pi^2 z^2}{1-z^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\ln D_{1\%}\right)^2 - \left(\ln D_{1\%}\right)^2 z^2 = \pi^2 z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2\right] = \left(\ln D_{1\%}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{\left(\ln D_{1\%}\right)^2}{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{\left|\ln D_{1\%}\right|}{\sqrt{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}} \quad car\ z > 0$$

- Il est atteint en t_1

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}}$$



• **Détermination classique**

On utilise en priorité

- la valeur finale pour déterminer K
- le premier dépassement pour déterminer z et ω_0

$s_\infty = K e_0$	$z = \frac{\left\|\ln D_{1\%}\right\|}{\sqrt{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}}$	$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}}$
$10 = 10K$ $K = 1$	$D_{1\%} = \frac{2,5}{10} = 0,25$ $z = \frac{\left\|\ln 0,25\right\|}{\sqrt{(\ln 0,25)^2 + \pi^2}}$ $z = 0,4$	$t_1 = 3,5$ $\omega_0 = \frac{\pi}{3,5\sqrt{1-0,4^2}}$ $\omega_0 \approx 1$

• **Amélioration de la précision**

Il est possible d'utiliser d'autres dépassements et plus généralement extremums et leurs temps associés lorsqu'ils sont bien visibles afin d'être plus précis.

On peut aussi utiliser la valeur de la pseudo période si elle est bien visible.

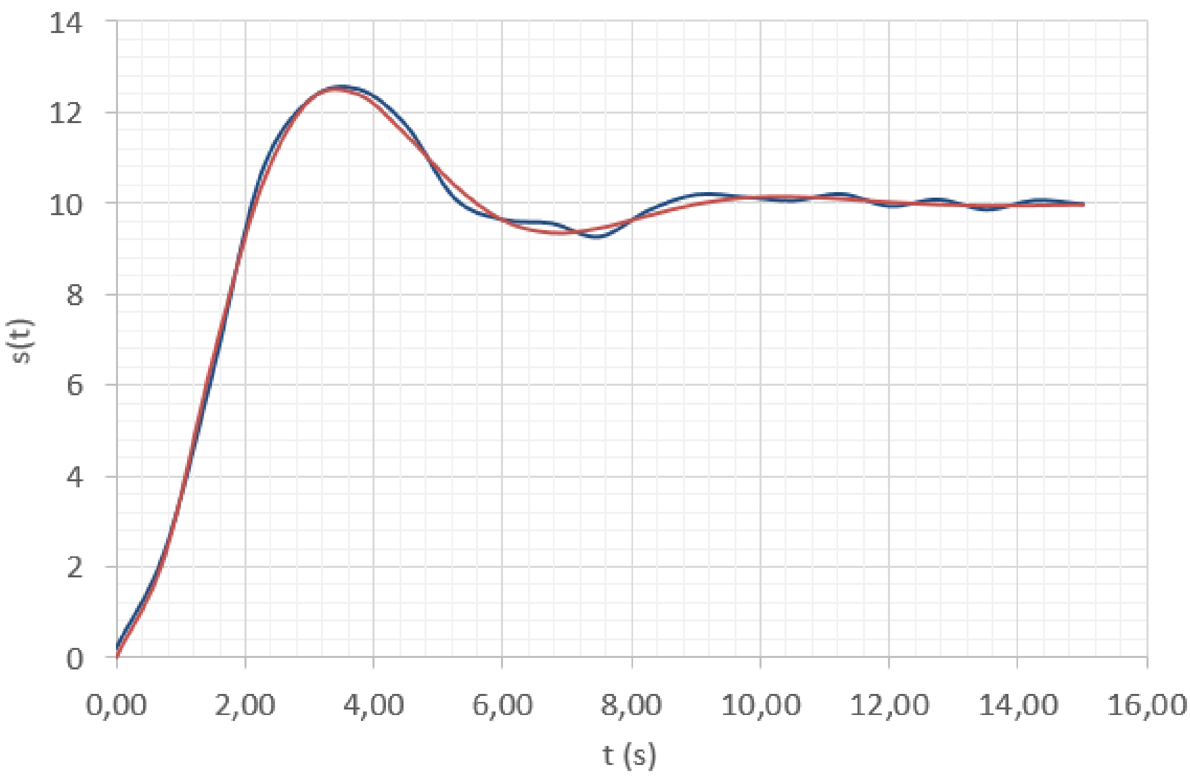
A.V.3.a.iv Modèle proposé

Finalement, on a donc :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 * 0{,}4}{1} p + \frac{1}{1^2} p^2} = \frac{1}{1 + 0{,}8p + p^2}$$

A.V.3.a.v Vérification

Superposons la courbe expérimentale et la courbe du système ayant la fonction de transfert trouvée :



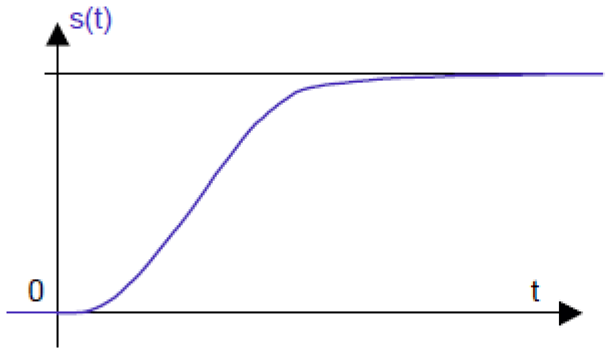
L'identification a été correctement menée.

A.V.3.b Cas $z > 1$

L'identification d'un système du second ordre dans le cas d'un amortissement supérieur à 1 n'est pas simple à mener.

A.V.3.b.i Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.3.b.ii Proposition d'un modèle

La pente à l'origine étant nulle, on sait que ce n'est pas un système du premier ordre. Proposons un modèle du second ordre avec un coefficient d'amortissement $z > 1$.

$$H(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

A.V.3.b.iii Identification des paramètres

N'ayant pas de dépassement, la résolution ne sera pas aussi simple et précise que précédemment. On va montrer qu'il est possible de déterminer ses deux constantes de temps T_1 et T_2 à l'aide d'une méthode un peu particulière. La réponse temporelle d'un tel système est connue

$$s(t) = Ke_0\left[1+\frac{1}{T_2-T_1}\left[T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$$

Il faut déterminer K, T_1 et T_2

• **Démarche**

Introduisons la fonction $z(t)$ suivante :

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

Choisissons T, t_1, t_2 des temps quelconques tels que l'on connaisse la courbe de réponse en t_1, t_2, $T - t_1$ et $T - t_2$.

Calculer les valeurs suivantes :

$x_1 = \frac{z(t_1 - T)}{z(t_1)}$	$x_2 = \frac{z(t_2 - T)}{z(t_2)}$
$y_1 = \frac{z(t_1 - 2T)}{z(t_1)}$	$y_2 = \frac{z(t_2 - 2T)}{z(t_2)}$

En déduire les coefficients suivants :

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = y_2 - a_1 x_2$$

Déterminer les racines X_1 et X_2 du polynôme suivant :

$$X^2 + a_1 X + a_2 = 0$$

On a alors

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{T}{\ln X_1} \\ T_2 = \dfrac{T}{\ln X_2} \end{cases}$$

• **Démonstration**

$$s(t) = Ke_0 \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right]$$

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

$$= Ke_0 - Ke_0 \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right]$$

$$= Ke_0 \left[-\frac{1}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right]$$

Soit T un temps quelconque.

$$z(t - 2T) + a_1 z(t - T) + a_2 z(t) = 0$$

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Démonstration :

$$z(t-2T) = -\frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}}\right]$$

$$a_1 z(t-T) = \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right)\left[T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}}\right]$$

$$a_2 z(t) = -\frac{Ke_0}{T_2 - T_1} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$$

$$z(t-2T) + a_1 z(t-T) + a_2 z(t)$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\Bigg[-\left[T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}}\right] + \left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right)\left[T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}}\right] - e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\Bigg]$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\Bigg[-T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} + T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} + T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\Bigg]$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\Bigg[-T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} + T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} + T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} + T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}} e^{\frac{T}{T_1}}\Bigg]$$

$$= 0$$

On a donc :

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

$$z(t-2T) + a_1 z(t-T) + a_2 z(t) = 0$$

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Soit :

$$\frac{z(t-2T)}{z(t)} + a_1 \frac{z(t-T)}{z(t)} + a_2 = 0$$

$$\frac{z(t-2T)}{z(t)} = -a_1 \frac{z(t-T)}{z(t)} + a_2$$

Ceci correspond à l'équation d'une droite de pente $-a_1$ et d'ordonnée à l'origine a_2

Choisissons T, t_1, t_2 des temps quelconques tels que l'on connaisse la courbe de réponse en t_1, t_2, $T - t_1$ et $T - t_2$.

On calcule les valeurs suivantes :

$x_1 = \frac{z(t_1 - T)}{z(t_1)}$	$x_2 = \frac{z(t_2 - T)}{z(t_2)}$
$y_1 = \frac{z(t_1 - 2T)}{z(t_1)}$	$y_2 = \frac{z(t_2 - 2T)}{z(t_2)}$

On en déduit :

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = y_2 - a_1 x_2$$

Enfin, connaissant a_1 et a_2, on a :

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Rappel : x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Soit le polynôme suivant :

$$X^2 + a_1 X + a_2 = 0$$

Les racines X_1 et X_2 de ce polynôme sont telles que :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = -a_1 = e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}} \\ X_1 X_2 = a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} \end{cases}$$

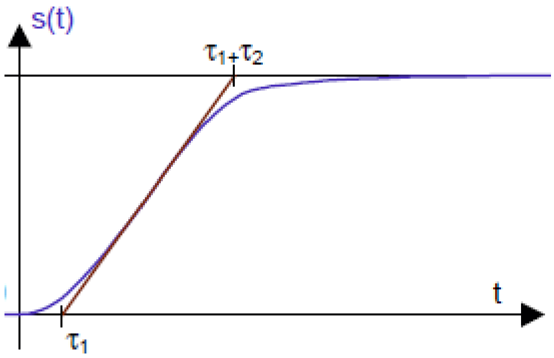
C'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1 = e^{\frac{T}{T_1}} \\ X_2 = e^{\frac{T}{T_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{T}{\ln X_1} \\ T_2 = \frac{T}{\ln X_2} \end{cases}$$

Il faut donc déterminer les racines du polynôme $X^2 + a_1 X + a_2 = 0$ afin de déduire T_1 et T_2

- **Cas particulier**

Cette méthode est difficile à mettre en place. Lorsqu'une constante de temps est très petite devant l'autre, exemple $T_1 \ll T_2$, on peut utiliser une méthode approchée. On trace la tangente au point d'inflexion et les intersections de cette tangente avec l'axe des abscisses et l'asymptote horizontale donnent T_1 et T_2



Il est alors nécessaire de tracer la réponse théorique pour vérifier qu'elle modélise correctement la réponse expérimentale.

A.V.4 Oscillations libres d'un 2° ordre

Il arrive que l'on identifie certains coefficients des systèmes du 2° ordre à partir de leur réponse en oscillations libres. Cela consiste à imposer un déplacement initial au système et à le relâcher. Cette démarche est souvent appliquée à des ressorts. C'est une identification partielle du système, connaissant l'équation différentielle le caractérisant du second ordre. On s'intéresse dans ce cas à la détermination de sa pulsation propre non amortie ω_0 et de son coefficient d'amortissement z.

Cette identification ne peut fonctionner qu'à partir du moment où il existe plusieurs oscillations bien visibles. Cela correspond à des valeurs d'amortissement z faibles. Il faut retenir l'ordre de grandeur suivant : si l'on voit plus de 5 périodes d'oscillations, $z \leq 0,1$ et cette démarche est applicable.

Ainsi, il est possible de déterminer z et ω_0

A.V.4.a Modèle étudié et équation différentielle associée

Soit un système du 2° ordre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}\mathrm{p} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\mathrm{p}^2}$$

Ce modèle correspond à l'équation différentielle suivante :

$$s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = e$$

Dans le cas d'oscillations libres, on a l'équation différentielle et les conditions initiales suivantes :

$$\boxed{s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0 \quad ; \quad s(0) = S_0 \quad ; \quad s'(0) = 0}$$

A.V.4.b Forme de la réponse temporelle

$$s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0$$

L'identification de z et ω_0 ne nécessite pas de mener toute la résolution ci-dessous, il faut toutefois connaître dans ce cas le résultat suivant :

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t} A\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

Elle ne nécessite pas non plus de connaître la valeur du déplacement initial imposé X_0.

Démonstration :

$$s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0$$

Polynôme caractéristique :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}r^2 + \frac{2z}{\omega_0}r + 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{4z^2}{{\omega_0}^2} - \frac{4}{{\omega_0}^2} = \frac{4}{{\omega_0}^2}(z^2 - 1)$$

On est dans le cas d'oscillations : $z < 1$

$$r = \frac{-\frac{2z}{\omega_0} \pm i\sqrt{\frac{4}{{\omega_0}^2}(1 - z^2)}}{2\frac{1}{{\omega_0}^2}}$$

$$r = -z\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - z^2} = -z\omega_0 \pm i\omega_n$$

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t}(A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t))$$

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t}\sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos(\omega_n t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin(\omega_n t)\right]$$

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t}C[\cos(\varphi)\cos(\omega_n t) + \sin(\varphi)\sin(\omega_n t)]$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad ; \quad \tan(\varphi) = \frac{B}{A}$$

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t}C[\cos(\varphi)\cos(\omega_n t) + \sin(\varphi)\sin(\omega_n t)]$$

$$\boxed{s(t) = e^{-z\omega_0 t}C\cos(\omega_n t - \varphi)}$$

A.V.4.c Détermination des constantes si nécessaire

Les conditions initiales permettent de déterminer C et φ si nécessaire :

$$s'(t) = -\omega_n e^{-z\omega_0 t}C\sin(\omega_n t + \varphi) - z\omega_0 e^{-z\omega_0 t}C\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$s(0) = S_0 = C\cos(\varphi)$$

$$\boldsymbol{C = \frac{S_0}{\cos(\varphi)}}$$

$$s'(0) = 0 = -\omega_n C \sin(\varphi) - z\omega_0 C \cos(\varphi)$$

$$0 = \omega_n \sin(\varphi) + z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$0 = \omega_0\sqrt{1-z^2}\sin(\varphi) + z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$\omega_0\sqrt{1-z^2}\sin(\varphi) = -z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}\sin(\varphi) = -\cos(\varphi)$$

$$\boldsymbol{\tan(\varphi) = -\sqrt{\frac{z^2}{1-z^2}}}$$

A.V.4.d Identification

A.V.4.d.i Identification de z

On utilise le décrément logarithmique afin de déterminer la valeur de z.

Rappelons que l'on a :

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t} C \cos(\omega_n t + \varphi)$$

Soient T_1 et T_2 deux temps écartés de N périodes (plus on prend de périodes, plus le calcul sera précis).

$$s(T_1) = e^{-z\omega_0 T_1} C \cos(\omega_n T_1 + \varphi)$$

$$s(T_2) = e^{-z\omega_0 T_2} C \cos(\omega_n T_2 + \varphi)$$

Or :

$$\cos(\omega_n T_2 + \varphi) = \cos(\omega_n T_1 + \varphi)$$

$$\frac{s(T_1)}{s(T_2)} = \frac{e^{-z\omega_0 T_1}}{e^{-z\omega_0 T_2}} = e^{-z\omega_0 (T_1 - T_2)}$$

A partir de la courbe, on obtient $\frac{s(T_1)}{s(T_2)}$.

$$-z\omega_0 (T_1 - T_2) = \ln\frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

$$z = \frac{1}{\omega_0 (T_2 - T_1)}\ln\frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

Remarque : ce coefficient dépend de ω_0

A.V.4.d.ii Identification de ω_0

Le système présente une pulsation ω_n qui est reliée à ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Remarque : ce coefficient dépend de z

A.V.4.d.iii Solution retenue

On remarque que l'on ne peut déterminer ω_0 sans z ni z sans ω_0.

Si on suppose $z \ll 1$, ce qui est le cas si on voit assez d'oscillations, on a

$$\omega_0 \approx \omega_n$$

On vérifie alors que la valeur de z recalculée est petite pour conclure que la démarche réalisée est bonne.

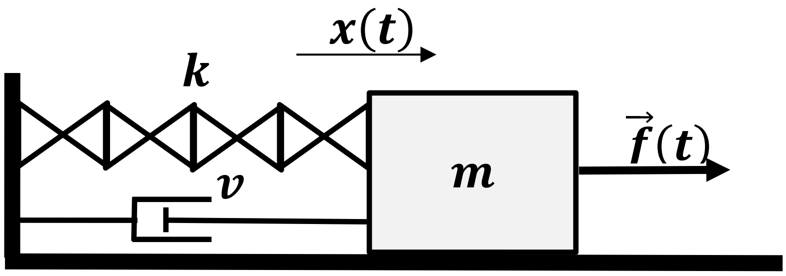
$$z = \frac{1}{\omega_0 (T_2 - T_1)} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

$$T_2 - T_1 = NT = N \frac{2\pi}{\omega_n} \approx N \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$z = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

A.V.4.e Application à un système masse/ressort-amortisseur

Soit le système masse ressort amortisseur suivant :



On s'intéresse au mouvement $x(t)$ de la masse au cours du temps. On souhaite déterminer k, m et v à partir de la réponse du système sachant que l'on peut faire varier la masse m.

A.V.4.e.i Equation différentielle et conditions initiales

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = 0 \quad ; \quad x(0) = X_0 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Remarque : si la gravité intervient : $m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = mg$, on peut :

- Résoudre le problème avec la solution particulière qui va définir la position non nulle autour de laquelle la masse va osciller : $x_p = \frac{mg}{k}$
- Faire un changement d'abscisse initiale autour de la position d'équilibre sous l'action de la pesanteur telle que : $kx = mg$ soit $x = \frac{mg}{k}$, d'où $x = \frac{mg}{k} + U$: $m\ddot{u} + v\dot{u} + ku = 0$

A.V.4.e.ii Modèle et coefficients caractéristiques

Pour mettre en place le modèle, supposons un effort appliqué au système $\mathrm{f}(t)$:

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = \mathrm{f}(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{v}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\mathrm{f}(t)}{m}$$

$$\frac{m}{k}\ddot{x} + \frac{mv}{k}\dot{x} + x = \frac{\mathrm{f}(t)}{k}$$

$$\frac{X(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{mv}{k}\mathrm{p} + \frac{m}{k}\mathrm{p}^2} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{2z}{\omega_0}\mathrm{p} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\mathrm{p}^2}$$

$$K = \frac{1}{k} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \frac{2z}{\omega_0} = \frac{v}{k} \Leftrightarrow z = \frac{v}{2\sqrt{km}}$$

A.V.4.e.iii Détermination des coefficients par identification

Le principe consiste à déterminer expérimentalement les valeurs de $\omega_0 \approx \omega_n$ pour différentes masses m_i ajoutées à la masse mobile du système : $m + m_i$ et de tracer la droite :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2} = \frac{m}{k} + \frac{1}{k} m_i = a m_i + b$$

Alors :

$$\begin{cases} k = \dfrac{1}{a} \\ m = kb \end{cases}$$

Pour la valeur de ω_0 associée à la masse m, on calcule le décrément logarithmique afin d'obtenir z

$$z = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

On en déduit :

$$v = 2z\sqrt{km}$$

Par ailleurs, on a alors :

$$K = \frac{1}{k}$$

Remarque : en théorie, il faudrait vérifier que z reste faible pour chaque masse ajoutée, afin de pouvoir affirmer que chaque pulsation mesurée est bien proche de la pulsation propre non amortie du système