A.III. Actions mécaniques

A.III.1 Définition

Une action mécanique, souvent appelée « force », est un phénomène qui a la capacité de déformer un corps ou de changer sa vitesse ou sa trajectoire dans un référentiel Galiléen.

On distingue trois grands types d'actions :

- Les actions volumiques à distance (gravité, forces électromagnétiques)
- Les actions surfaciques de contact (contact réel entre deux solides ou un solide et un fluide)
- Les actions linéiques et ponctuelles (modèle d'un contact réel entre deux solides)

A.III.2 Actions mécaniques

Une action mécanique est la donnée de deux éléments :

- Une force
- Un moment

Elle s'applique sur un corps, que ce soit sur son volume V, sa surface S, une ligne ou en un point.

A.III.2.a Forces

Une action mécanique est composée d'une force représentée par un vecteur (direction, sens, longueur) exprimée en Newton (N).

On appelle résultante d'une force volumique, surfacique ou linéique la force « totale » générée par l'ensemble des forces sur le volume, la surface ou la ligne considérés.

A.III.2.a.i Force volumique

Une force volumique $d\vec{F}$ est une force par unité de volume et s'exprime en $N.m^{-3}$ issue généralement de l'attraction gravitationnelle ou de forces électromagnétiques. On la note souvent $f(P)$ et elle possède une direction $\vec{u}(P)$ en tout point P de coordonnées (x,y,z) tel que :

$$d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$$

Soit un volume V quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action volumique :

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V f(P)\vec{u}(P)dV$$

Si la direction $\vec{u}$ et la valeur f de l'effort volumique étudié sont constants sur le volume, on a :

$$\vec{F} = fV\vec{u}$$

A.III.2.a.ii Force surfacique

Une force surfacique $d\vec{F}$ est une force par unité de surface et s'exprime en $N.m^{-2}$ ou Pa (Pascal). Elle est associée à un contact entre deux solides ou entre un solide et un fluide. On la note souvent $p(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -p(P)\overrightarrow{dS}$$

$p(P)$ est appelé « pression en P ».

$\overrightarrow{dS}$ est un vecteur de norme dS, élément de surface autour du point P et de direction $\vec{n}(P)$, vecteur normal sortant de la surface du corps étudié :

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}(P)$$

Soit une surface S quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action surfacique :

$$\vec{F} = \int_S \left(-p(P)d\vec{S}\right) = -\int_S p(P)d\vec{S}$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (surface plane) et la valeur p de la pression aussi, on a :

$$\vec{F} = -pS\vec{n}$$

Remarque : $1\ bar = 10^5\ Pa$

A.III.2.a.iii Force linéique

Une force linéique ($k(P)\ en\ N.m^{-1}$) est une force par unité de longueur et s'exprime en $N.m^{-1}$. Elle est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une force surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié

On la note souvent $k(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -k(P)\overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{dl} = dl\vec{n}(P)$, dl étant un élément de longueur autour du point P et $\vec{n}(P)$ la normale sortante en P. La résultante vaut alors :

$$\vec{F} = \int_\Gamma d\vec{F} = -\int_\Gamma k(P)\vec{n}(P)dl$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (droite) et la valeur k de la répartition aussi, on a sur un segment de longueur L:

$$\vec{F} = -kL\vec{n}$$

Remarque : Une force linéique n'existe pas dans la réalité car il n'existe pas de solides indéformables, et tout contact s'établit sur une petite surface par l'intermédiaire d'une pression. Un modèle linéique induit la présence (fausse) d'une pression infinie au contact, mais permet toutefois de rendre compte de l'effet de la force concernée. Si la pression au contact est recherchée, on pourra alors étudier le contact au niveau local (théorie de Hertz) connaissant la force qui transite.

A.III.2.a.iv Force ponctuelle

Une force ponctuelle est une force « simple », qui est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une force linéique, surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié dans lequel on fait apparaître de simples forces plutôt que leur répartition

Remarque : la remarque pour le contact linéique est aussi valable dans le cas de la force ponctuelle qui n'existe pas dans la réalité.

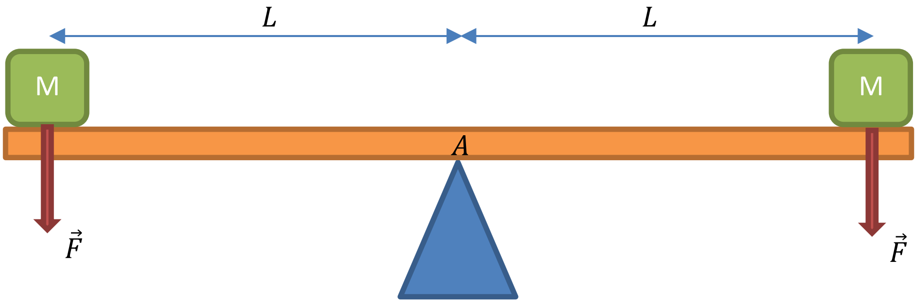
A.III.2.b Moments

A.III.2.b.i Introduction

Lorsqu'une force s'applique sur un solide, le point d'application de cette force induit un effet différent sur la pièce sollicitée, un effet qui est proportionnel à une distance, qui tend à « faire tourner » la pièce sollicitée et qui dépend du lieu où s'applique cette force et de sa direction. On parle souvent d'« effet levier ». La grandeur qui caractérise cet effet est le « moment ».

Un moment est une grandeur exprimée en $N.m$. C'est le produit d'une force par une distance.

Prenons l'exemple d'une pièce en équilibre sous l'action de deux masses égales à une même distance du centre A :

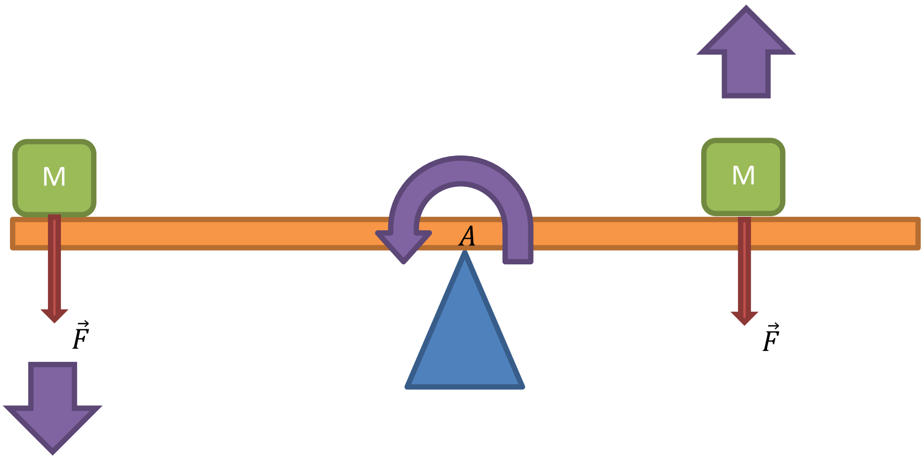


La force qui s'applique sur chaque masse vaut $\vec{F} = -Mg\vec{z}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

On devine aisément que l'action au contact en A est opposée aux poids des deux masses et vaut :

$$\overrightarrow{F_A} = 2Mg\vec{z}$$

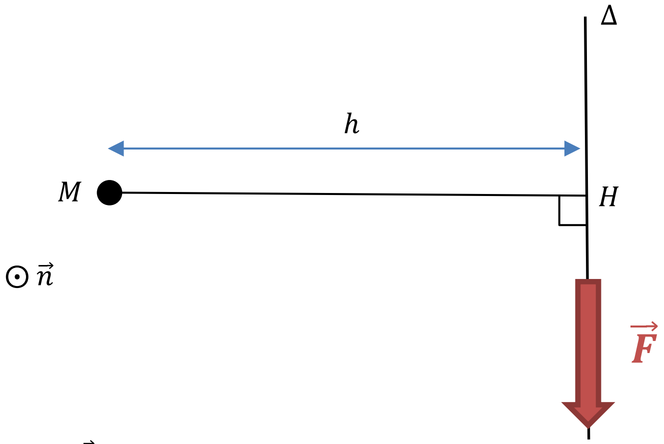
Les deux masses étant identiques, et les distances (bras de levier) aussi, la situation d'équilibre existe. Si l'on rapproche l'une des masses de A, l'équilibre va être perdu :



L'origine du basculement est une différence de moment des deux forces F. L'action en A s'oppose toujours au poids des deux forces et ne change pas de valeur $\left(\overrightarrow{F_A} = 2Mg\vec{z}\right)$, mais il existe une « force en rotation », appelée moment, qui tend à faire basculer l'ensemble vers la gauche.

A.III.2.b.ii Moment d'une force

Soit une force $\vec{F}$ de support la droite Δ et un point M quelconque de l'espace :



Le bras de levier de la force $\vec{F}$ au point M est la distance de M à la droite Δ, c'est-à-dire la distance $MH = h$ où H est la projection orthogonale de M sur Δ.

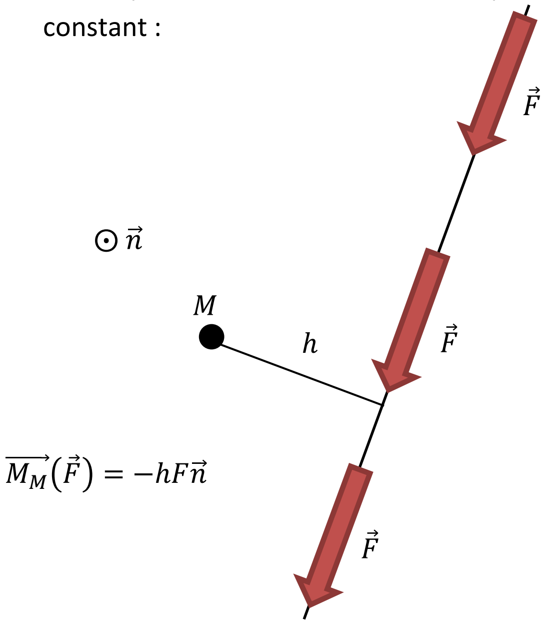
Soit $\vec{n}$ le vecteur orthogonal au plan contenant Δ passant par M et orienté comme présenté sur la figure ci-dessus.

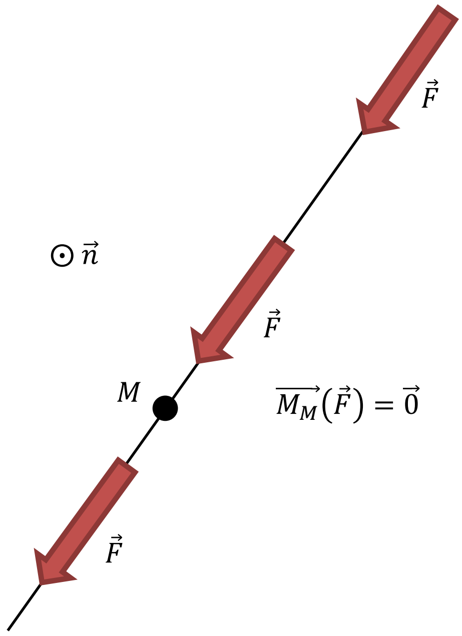
Le moment de $\vec{F}$ en M est un vecteur noté $\overrightarrow{M_M}(\vec{F})$ tel que :

- sa norme est égale à la norme de la force F multipliée par le bras de levier h de cette force au point considéré
- sa direction est orthogonale au plan contenant la direction de la force et le point M
- son sens suivant $\vec{n}$ est
    - positif si la force « tend à faire tourner » dans le sens direct autour de $\vec{n}$
    - négatif si la force « tend à faire tourner » dans le sens indirect autour de $\vec{n}$

$$\overrightarrow{M_M}(\vec{F}) = \pm hF\vec{n}$$

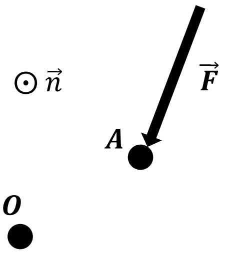
Remarque : Le moment en un même point de toutes forces égales appliquées sur la même droite est constant :





A.III.2.b.iii Calcul d'un moment

Soit un point O, une force $\vec{F}$ s'appliquant en A et un vecteur $\vec{n}$ orienté orthogonal au plan contenant $\vec{F}$ et O.



On peut calculer simplement le moment d'une force en un point quelconque de l'espace à l'aide d'un produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}}$$

Etudions cette formule dans le cas représenté ci-dessus : Soit H la projection orthogonale de O sur la drite d'action de $\vec{F}$ et h le bras de levier de la force $\vec{F}$ en O :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} = -hF\vec{n}$$

A.III.2.b.iv Formule de Varignon

Soit une résultante $\vec{R}$ appliquée en un point M et deux points quelconques A et B.

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$$

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Le moyen mnémotechnique souvent utilisé pour retenir cette formule est :

$$BABAR$$

A.III.2.b.v Equiprojectivité du moment

Comme nous l'avons vu en cinématique, l'obéissance à la formule de Varignon conduit à la notion d'équiprojectivité du moment :

$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B}(\vec{R}).\overrightarrow{AB}}$$

Preuve :

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB}$$

Cette formule est très utile en statique graphique.

A.III.2.b.vi Moment d'une répartition d'effort

• <u>Répartition volumique d'effort</u>

Calcul

Soit une répartition volumique d'effort $f(P)$. On a $d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$.

Appelons $\overrightarrow{dM}$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition volumique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_V \overrightarrow{dM} = \int_V \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = \int_V \overrightarrow{OP} \wedge f(P)\vec{u}(P)dV$$

Cas particulier

Considérons une répartition volumique d'effort constante en norme et direction : $d\vec{F} = f\vec{u}dV$

Soit G le centre géométrique du volume V :

$$\overrightarrow{M_G} = \int_V \overrightarrow{GP} \wedge f\vec{u}dV = f\left(\int_V \boldsymbol{\overrightarrow{GP}dV}\right) \wedge \vec{u}$$

Or, G étant le centre géométrique de V, on a :

$$\int_V \overrightarrow{GP}dV = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition volumique d'effort constante sur un volume est nul au centre géométrique du volume étudié et sa résultante vaut $fV\vec{u}$

• **Répartition surfacique d'effort**

Calcul

Soit une répartition surfacique d'effort $p(P)$. On a $d\vec{F} = p(P)\vec{n}(P)dS$.

Appelons $\overrightarrow{dM}$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition surfacique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_S \overrightarrow{dM} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = -\int_S \overrightarrow{OP} \wedge p(P)\vec{n}(P)dS$$

Cas particulier

Considérons une répartition surfacique d'effort constante en norme et direction (surface plane) :

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS$$

Soit G le centre géométrique de la surface S.

$$\overrightarrow{M_G} = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (-p\vec{n}dS) = -p\left(\int_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{\overrightarrow{GP}dS}\right) \wedge \vec{n}$$

Or, G étant le centre géométrique de S, on a :

$$\int_S \overrightarrow{GP}dS = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition surfacique d'effort constante (norme et direction – soit sur une surface plane) est nul au centre géométrique de la surface étudiée et sa résultante vaut $-pS\vec{n}$

• Répartition linéique d'effort

Calcul

Soit une répartition linéique d'effort $k(P)$. On a $d\vec{F} = -k(P)\vec{n}(P)dl$.

Appelons $\overrightarrow{dM}$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition linéique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_\Gamma \overrightarrow{dM} = \int_\Gamma \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = -\int_\Gamma \overrightarrow{OP} \wedge k(P)\vec{n}(P)dl$$

Cas particulier

Considérons une répartition linéique d'effort constante en norme et direction sur un segment de longueur L :

$$d\vec{F} = -k\vec{n}dl$$

Soit G le centre géométrique de du segment où s'applique l'effort.

$$\overrightarrow{M_G} = \int_\Gamma \overrightarrow{GP} \wedge (-k\vec{n}dl) = -k\left(\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{\overrightarrow{GP}dl}\right) \wedge \vec{n}$$

Or, G étant le centre géométrique du segment étudié, on a :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{GP}dl = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition linéique d'effort constante sur un segment est nul au centre géométrique du segment étudié et sa résultante vaut $-kL\vec{n}$

A.III.3 Torseurs des actions mécaniques

A partir de maintenant, décrivons l'action d'une pièce j sur une pièce i à l'aide de la résultante $\overrightarrow{R_{ji}}$ et du moment $\overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}})$.

A.III.3.a Notation sous forme de torseur

Soit une résultante $\overrightarrow{R_{ji}}$ et un point M quelconque de l'espace. La résultante est constante, quel que soit le point où on étudie son influence. Par contre, son moment évolue et représente un champ équiprojectif.

Toute action mécanique est représentée par une résultante et le moment associé qui dépend du point où elle est exprimée. On introduit donc la notation sous forme de torseurs :

$$\{T_{j\to i}\} = \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_N}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{R_{ji}} \end{Bmatrix}_N$$

Une action mécanique est la donnée de sa résultante et de son moment en un point.

A.III.3.b Torseur d'actions mécaniques

A.III.3.b.i Action quelconque

Ponctuelle en A	Linéique	Surfacique	Volumique
$\vec{F}$	$d\vec{F} = -k(P)\vec{n}(P)dl$	$d\vec{F} = -p(P)\vec{n}(P)dS$	$d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$
$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} \end{Bmatrix}_O$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \int_{V/S/\Gamma} d\vec{F} \\ \int_{V/S/\Gamma} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} \end{Bmatrix}_O$		

A.III.3.b.ii Action constante

Soit G le centre géométrique du volume, de la surface ou du segment sur lequel s'applique respectivement une action volumique, surfacique ou linéique de norme et direction constante, nous avons montré précédemment que l'on a :

Linéique	Surfacique	Volumique
$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} -kL\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} -pS\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} fV\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

On pourra donc simplement représenter, par exemple, l'action mécanique de la gravité par une simple force au centre de gravité du solide concerné si sa masse volumique est constante.

A.III.3.c Torseurs particuliers

Nous avons lors de l'étude cinématique des mécanismes introduit les torseurs glisseur et couple. Voyons enfin ce a quoi ils correspondent vraiment (noms associés à la statique).

A.III.3.c.i Torseur glisseur

Un torseur glisseur est un torseur dont le moment est nul en au moins un point de l'espace :

$$\exists M / \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

Toute action mécanique de type glisseur possède un axe central, c'est-à-dire une droite de l'espace le long de laquelle le moment de l'action étudiée est nul. La détermination de cet axe pour des répartitions linéiques, surfaciques et volumiques est très utile pour remplacer l'action en question par une unique résultante et un moment nul en un point de son axe central. Trouver l'axe central consiste à trouver le (les) point(s) où le moment de l'action concernée est nul : $M / \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{ji}}\right) = \vec{0}$

L'axe central est alors la droite passant par M et de vecteur directeur : $\vec{u} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$

A.III.3.c.ii Torseur couple

Un torseur couple est un torseur qui en tout point de l'espace possède une résultante nulle :

$$\forall M / \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_M}(\vec{R}) \end{Bmatrix}_M$$

Dans ce cas, le moment est le même en tout point de l'espace car :

$$\forall M', \overrightarrow{M_{M'}}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_M}(\vec{R}) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_M}(\vec{R}) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{0} = \overrightarrow{M_M}(\vec{R})$$

Un torseur couple est toujours obtenu par la somme d'au moins deux actions mécaniques ponctuelles, ou par l'intégration d'une action répartie particulière. Dans le cas de deux actions ponctuelles, celles-ci sont opposées de manière à annuler la résultante, et sur des axes différents afin de créer un moment.

On fait très (trop) souvent la confusion entre un couple et un moment. Un moment existe, qu'il soit nul ou non, pour toute action mécanique. Le couple est le moment particulier tel que l'action mécanique qu'il représente possède une résultante nulle.

A.III.4 Somme d'actions mécaniques

Soient n actions mécaniques sur un solide S dont les torseurs respectifs sont notés $\{T_{iS}\}, i = 1..n$. On peut remplacer les n actions mécaniques par une seule action $\{T_{ext \to S}\}$ tel que :

$$\{T_{ext \to S}\} = \sum_{i=1}^{n} \{T_{iS}\}$$