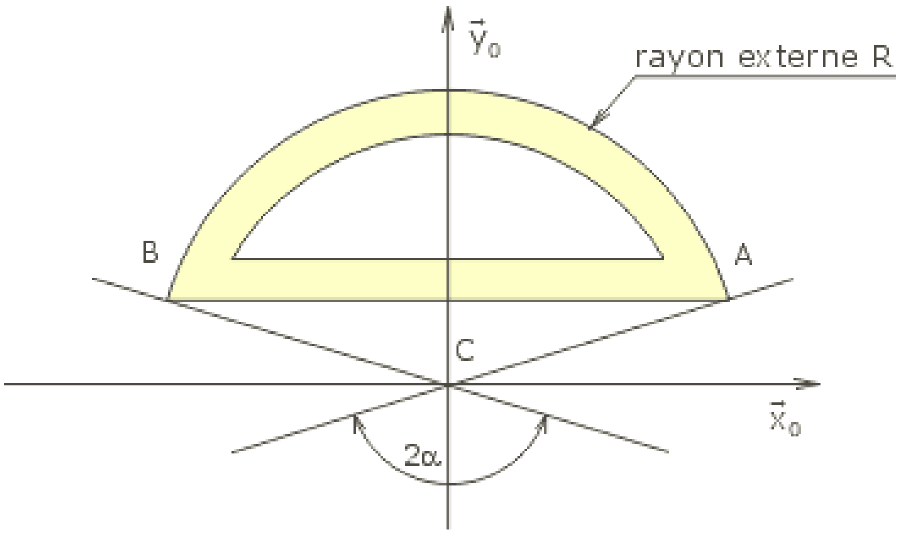
Enoncé

Considérons une porte cylindrique en tôle constituée d'une partie cylindrique de révolution d'axe $(C, \vec{z}_0)$, de rayon externe R, d'épaisseur e et de hauteur L (suivant la direction $\vec{z}_0$), liée à une partie plane d'épaisseur e, de hauteur L, et de largeur externe $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = 2.R.\sin\alpha$. Une section quelconque de la porte dans un plan perpendiculaire à la direction $\vec{z}_0$ est :



Données et notations :

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2.\alpha = \frac{2.\pi}{3}$$

$\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = R = 12,4m$: rayon extérieur du secteur circulaire

$L = 58m$: hauteur de la porte (suivant la direction $\vec{z}_0$)

e : épaisseur des tôles de la porte

$\mu = 7800\ kg/m^3$: masse volumique de la porte

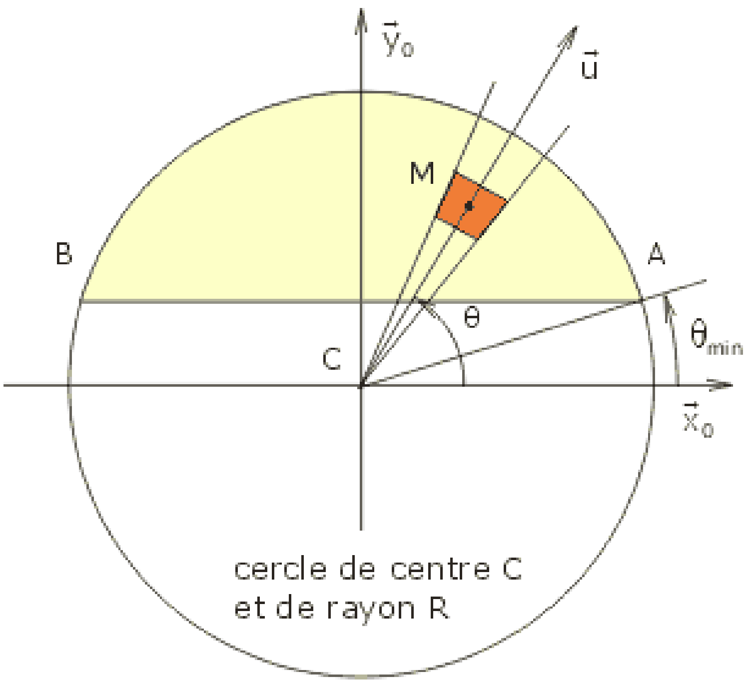
1 Donner l'expression de la masse m de la porte . Calculer sa valeur numérique pour $e = 0,5m$.

2 Dans le cas d'une épaisseur faible $e = 0,05m$, donner une expression approchée de la masse m . Comparer à la valeur qui serait obtenue avec l'expression trouvée à la question 1. Conclusion.

3 Déterminer dans le cas d'une épaisseur faible $e = 0,05m$, la position du centre de gravité G de la porte que l'on définira par le vecteur $\overrightarrow{CG}$. Déterminer alors la valeur numérique $\left\|\overrightarrow{CG}\right\| = r_G$.

Solution

1 Considérons une portion de cylindre d'axe $\left(C, \vec{z}_0\right)$, de longueur L suivant cet axe et dont la section dans le plan $\left(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$ est représentée ci-dessous :



L'expression de la masse de cette portion de cylindre est :

$$M = \iiint \mu . dv = \mu . L . \iint ds \qquad avec \qquad ds = \rho . d\rho . d\theta$$

$$M = \mu . L \int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \int_{\frac{R.\sin\theta_{min}}{\sin\theta}}^{R} \rho d\rho . d\theta = \mu . L \int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{R.\sin\theta_{min}}{\sin\theta}}^{R} d\theta$$

$$M = \mu . L \int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2 . \sin^2\theta_{min}}{2} . \frac{1}{\sin^2\theta}\right) . d\theta$$

Cherchons alors $\displaystyle\int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \frac{1}{\sin^2\theta}.d\theta$. Posons $t = \tan\theta$. On a alors : $\left|\begin{array}{c} dt = \left(1+t^2\right)d\theta \\ \sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \tan\theta_{min} \leq t \leq \tan\left(\pi-\theta_{min}\right) \end{array}\right.$ et

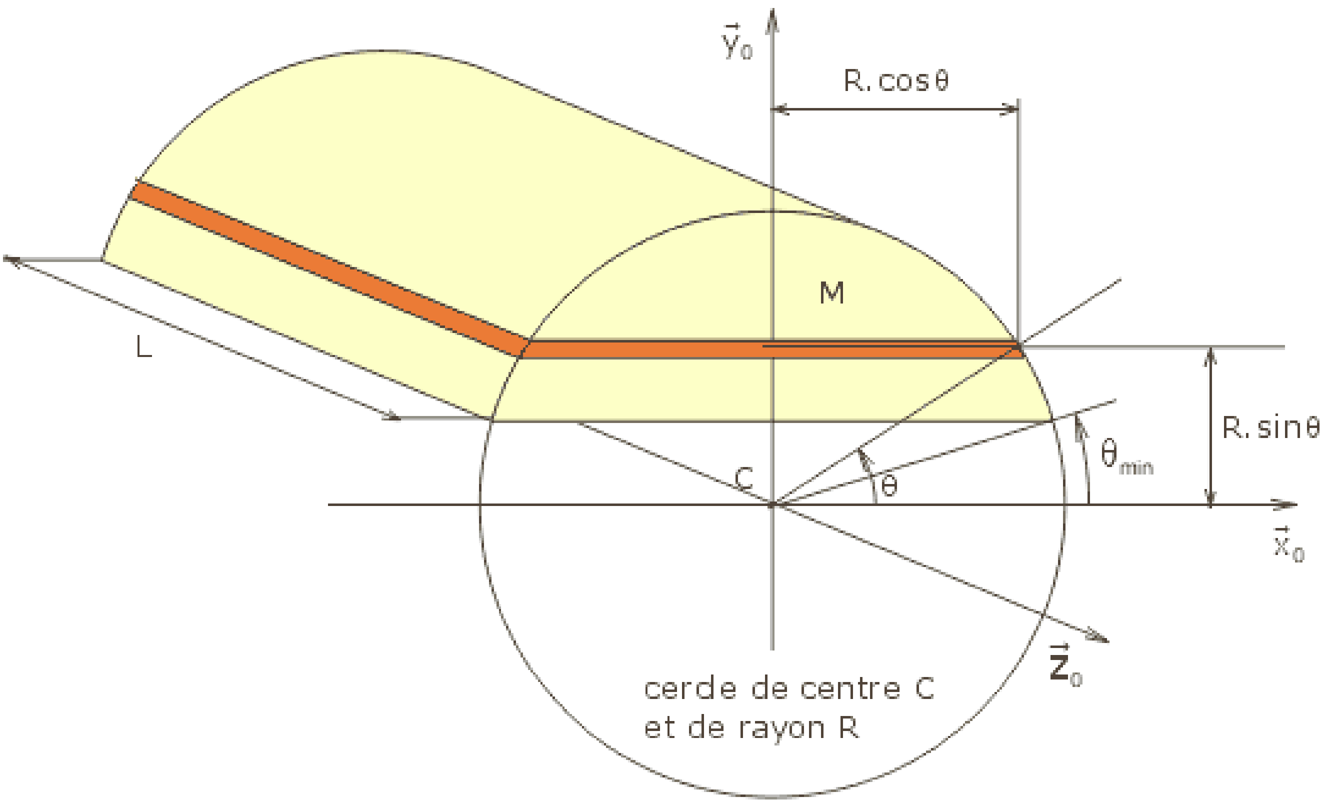
l'expression de l'intégrale devient : $\displaystyle\int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \frac{1}{\sin^2\theta}.d\theta = \int_{\tan\theta_{min}}^{\tan(\pi-\theta_{min})} \frac{1+t^2}{t^2}.\frac{1}{1+t^2}.dt = \frac{2}{\tan\theta_{min}}$.

En reprenant l'expression de la masse :

$$M = \mu.L\int_{\theta_{min}}^{\pi-\theta_{min}} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2.\sin^2\theta_{min}}{2}.\frac{1}{\sin^2\theta}\right).d\theta = \mu.L.\left(\frac{R^2}{2}.\left(\pi - 2.\theta_{min}\right) - \frac{R^2.\sin^2\theta_{min}}{2}.\frac{2}{\tan\theta_{min}}\right)$$

Et l'on obtient finalement : $\boxed{M = \mu.L.\dfrac{R^2}{2}.\left(\left(\pi - 2.\theta_{min}\right) - \sin 2\theta_{min}\right)}$

Une autre méthode de détermination consiste à considérer une portion de cylindre d'axe $\left(C,\vec{z}_0\right)$, de longueur L et d 'élément de volume, le volume orange sur la figure ci-dessous :



Dans ce cas, l'expression de la masse de cette portion de cylindre sera :

$M = \iiint \mu . dv$ avec $\left| \begin{array}{l} dv = L.2.R.\cos\theta . dy \\ y = R.\sin\theta \end{array} \right. \Rightarrow \quad dy = R.\cos\theta . d\theta$. L'élément de volume dv sera donc $dv = L.2.R^2.\cos^2\theta . d\theta$. Il n'est fonction que de la variable θ . L'expression de la masse devient :

$$M = \mu . \int_{\theta_{min}}^{\frac{\pi}{2}} L.2.R^2.\cos^2\theta . d\theta = \mu . L.R^2 . \int_{\theta_{min}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos(2.\theta)\right) . d\theta$$

$$M = \mu . L.R^2 . \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{min} - \frac{\sin(2.\theta_{min})}{2} \right)$$

On retrouve l'expression de la masse déterminée précédemment. Cette dernière relation nous permet de définir la masse m de notre porte, en remarquant que $m = M_1 - M_2$.

* M_1 étant la masse de portion de cylindre telle que $\left| \begin{array}{ll} son\ rayon\ soit : & R \\ L'angle\ \theta_{min}\ soit : & \frac{\pi}{2} - \alpha \end{array} \right.$

* M_2 étant la masse de portion de cylindre telle que $\left| \begin{array}{ll} son\ rayon\ soit : & R - e \\ L'angle\ \theta_{min}\ soit : & \frac{\pi}{2} - \mathrm{ar}\cos\left(\frac{R.\cos\alpha + e}{R - e} \right) \end{array} \right.$

On obtient alors l'expression finale de la masse m de notre porte :

$m = M_1 - M_2$

$$m = \mu . L \left(R^2 . \left(\alpha - \frac{\sin(2.\alpha)}{2} \right) - (R-e)^2 \left(\mathrm{ar}\cos\left(\frac{R.\cos\alpha + e}{R-e} \right) - \frac{\sin\left(2.\mathrm{ar}\cos\left(\frac{R.\cos\alpha + e}{R-e} \right) \right)}{2} \right) \right) \#$$

A.N : $m = 7800.58. \left(\underbrace{12,4^2 . \left(1,047 - \frac{\sin(2.60)}{2} \right)}_{94,437} - \underbrace{(11,9)^2 . \left(0,973 - \frac{\sin(2.55,734)}{2} \right)}_{71,852} \right)$

$$\boxed{m = 10,217\ 10^6\ Kg}$$

2 Dans le cas d'une épaisseur faible , nous pouvons écrire l'expression approchée de la masse m en

considérant que la porte est constituée de deux parties linéaires (Le segment $[A, B]$ et l'arc $\widehat{A, B}$) à répartition linéaire massique constante : $\mu.L.e \quad en \quad Kg/m$

$$m \approx \mu.L.e.\left(2.R.\alpha + 2.\left(R.\sin\alpha\right)\right)$$

$$m \approx 2.\mu.L.e.R.\left(\alpha + \sin\alpha\right)\#$$

A.N :

$$m \approx 2.7800.58.0,05.12,4\left(1,0472 + \sin 60\right)$$

$$\boxed{m \approx 1,073\ 10^6 \ \ Kg}$$

En utilisant l'expression de la masse déterminée à la question 1, nous aurions :

$$m = 7800.58.\left(\underbrace{12,4^2.\left(1,047 - \frac{\sin\left(2.60\right)}{2}\right)}_{94,437} - \underbrace{\left(12,35\right)^2.\left(1,04 - \frac{\sin\left(2.59,597\right)}{2}\right)}_{92,05}\right)$$

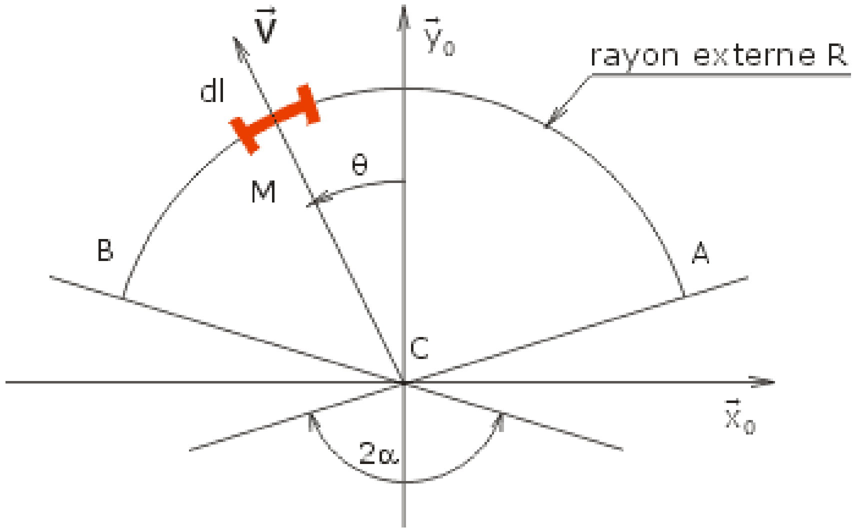
$$\boxed{m = 1,08\ 10^6 \ \ Kg}$$

L'erreur commise en utilisant l'expression approchée est de l'ordre de 1% ; ce qui semble négligeable dans ce cas au regard des incertitudes sur les dimensions exactes de la porte, des variations d'épaisseur des tôles….

3 Pour déterminer dans le cas d'une épaisseur faible $e = 0,05m$ la position du centre de gravité de la porte, nous pouvons à nouveau reconsidérer que la porte est constituée de deux parties distinctes :
*Une partie cylindrique de centre C , rayon R , de longueur L , et d'angle $2.\alpha$.
*Une partie plane de dimension : $L \times \left(2.R.\sin\alpha\right)$.
Par symétrie nous pouvons dire que le centre de gravité se trouvera à l'intersection des plans de symétrie de la porte : donc suivant la droite $\left(C, \vec{y}_0\right)$. Cette droite se trouvant à égale distance des extrémités de la porte .
Pour la partie cylindrique le CDG G_1 est tel que :

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{\rho.l}\int \overrightarrow{CM}.\rho.dl$$ avec : $$\left|\begin{array}{l} dl = R.d\theta \\ \overrightarrow{CM} = R.\vec{v} \\ \rho = \mu.L.e \quad en \quad Kg/m \end{array}\right.$$ les bornes de variation du paramètre θ étant

$$-\alpha \leq \theta \leq \alpha$$



On a donc :

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{\rho.R.2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R.\vec{v}.\rho.R.d\theta = \frac{1}{\rho.R.2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} R.\left(-\sin\theta.\vec{x}_0+\cos\theta.\vec{y}_0\right).\rho.R.d\theta$$

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{R}{2.\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(-\sin\theta.\vec{x}_0+\cos\theta.\vec{y}_0\right).d\theta = \frac{R}{2.\alpha}.\left[\cos\theta.\vec{x}_0+\sin\theta.\vec{y}_0\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{R.\sin\alpha}{\alpha}.\vec{y}_0$$

Pour la partie plane, le CDG se trouve au point G_2 tel que :

$$\overrightarrow{CG_2} = R.\cos\alpha.\vec{y}_0$$

Pour déterminer à présent le CDG G de la porte entière, nous pouvons appliquer la formule du barycentre en pondérant les centres de gravité des deux éléments précédents de leur longueur respective. On a alors :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2.\alpha.R+2.R.\sin\alpha}\left(2.\alpha.R.\overrightarrow{CG_1}+2.R\sin\alpha.\overrightarrow{CG_2}\right)$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2.\alpha.R+2.R.\sin\alpha}\left(2.\alpha.R.\frac{R\sin\alpha}{\alpha}.\vec{y}_0+2.R.\sin\alpha.R.\cos\alpha.\vec{y}_0\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{R.\sin\alpha}{\alpha+\sin\alpha}\left(1+\cos\alpha\right).\vec{y}_0}$$

A.N :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{12,4.\sin 60}{1,047+\sin 60}\left(1+\cos 60\right).\vec{y}_0$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{CG}\right\| = 8,52.m}$$