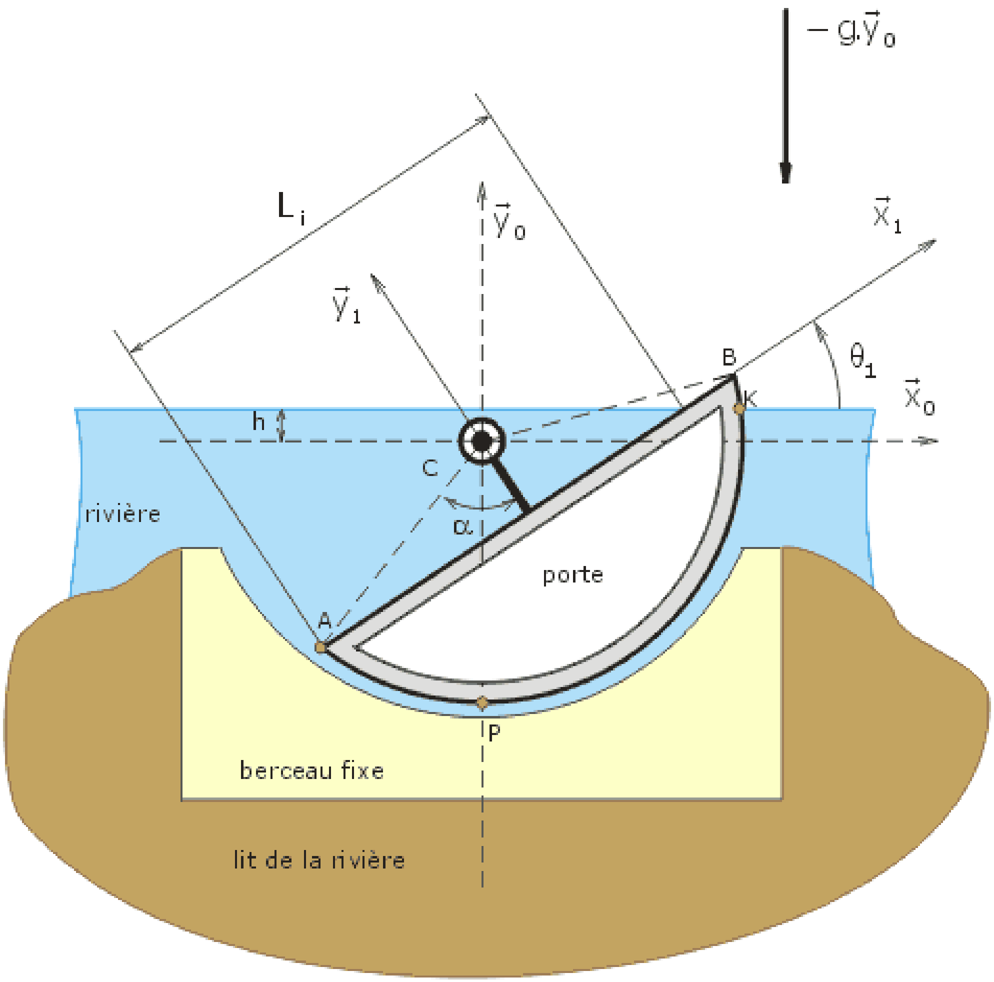
Enoncé *Concours CAPET 1992*

La protection de la ville de Londres contre les inondations de la Tamise, dues aux tempêtes ou aux très fortes marées de la mer du Nord, est assurée depuis 1981 par un barrage mobile constitué de 10 éléments indépendants permettant de fermer partiellement ou totalement le cours du fleuve. Les quatre barrières centrales de 61 m autorisent le passage de navires de fort tonnage. Chaque barrière est constituée d'une partie centrale (porte) , de section en forme de secteur circulaire de centre C et de deux disques contre-poids situés à ses extrémités.
Les parois de la porte sont constituées de tôles métalliques, entretoisées pour rigidifier la structure. Elle peut être animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe $\left(C,\vec{z}_0\right)$; axe fixe par rapport au sol. Les faces internes de la porte sont supposées soumises à la pression atmosphérique. Les faces externes immergées sont supposées soumises à la pression hydrostatique de l'eau.
Le plan $\left(C,\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)$ est plan de symétrie de la porte.



Données et notations :

- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=2.\alpha=\dfrac{2.\pi}{3}$: angle au centre de la section
- $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=R$: rayon extérieur du secteur circulaire
- L : longueur de la porte
- ρ : masse volumique de l'eau
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\theta_1$: paramètre de position angulaire de la porte

1 A partir des données précédentes, déterminer les pressions relatives aux points A,K et P .

2 On note L_i la longueur immergée de la face plane de la porte. Déterminer au point C appartenant au plan de symétrie $(C,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ de la porte, le couple résultant des actions réparties de l'eau sur la partie plane de la porte en fonction de la pression relative en A notée $P_{\text{Rel }A}$, de L_i , R , α et L .

Sans développer les expressions des intégrales, expliquer ensuite la méthode qui permettrait de déterminer entièrement dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ le torseur d'action en C de l'eau sur la partie cylindrique immergée de la porte en fonction de $P_{\text{Rel }A}$, R , α , L , h , ρ et du paramètre de position θ_1 .

Solution

1 La variation de la pression est fonction de la coordonnée y car en hydrostatique $\dfrac{dP(y)}{dz}=-\rho.g$. En intégrant cette relation entre les positions :

$$\left|\begin{array}{ll} y=y_0 & au\ niveau\ de\ l'\text{interface}\ eau/air \\ et & \\ y & en\ un\ \text{point}\ quelconque\ M\ du\ liquide \end{array}\right.$$

on obtient la relation suivante :

$$\underbrace{P(y_0)}_{P_{atm}}-P(y)=-\rho.g.(y_0-y)$$

L'expression de la pression relative est donc :

$$\boxed{P_{rel\ M}=P(y)-P_{atm}=\rho.g.(y_0-y)=\rho.g.\Delta y}$$

Nous pouvons donc définir les pressions aux différents points :

$$En\ A\ :\ \Delta y=h+R.\cos(\alpha-\theta_1)\quad\rightarrow\quad P_{Rel\ A}=\rho.g.\left(h+R.\cos(\alpha-\theta_1)\right)$$

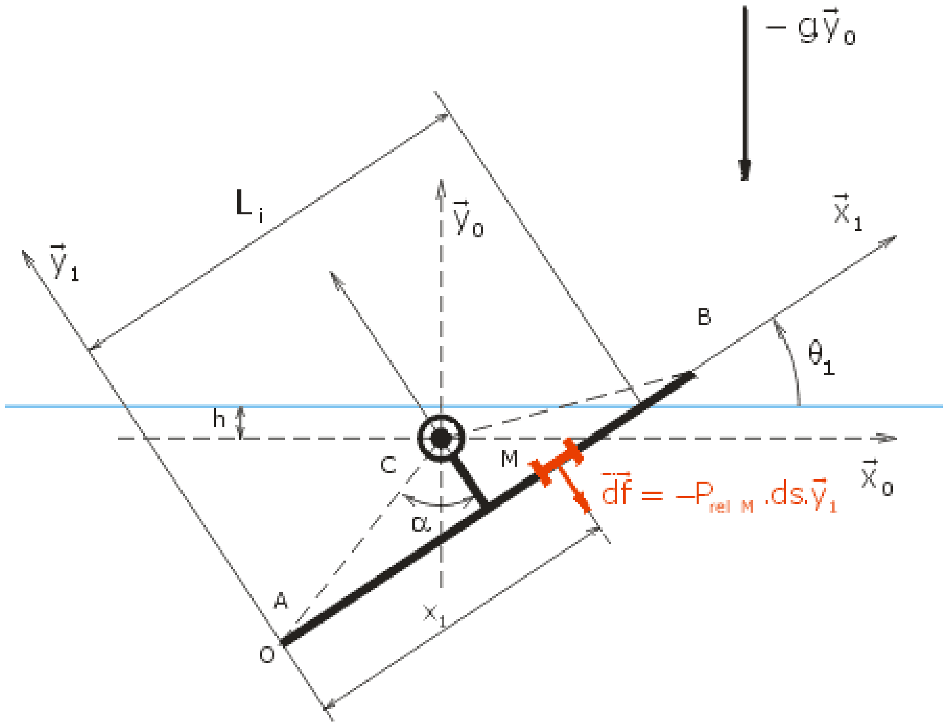
$$En\ P\ :\ \Delta y=h+R\quad\rightarrow\quad P_{Rel\ P}=\rho.g.(h+R)$$

$$En\ K\ :\ \Delta y=0\quad\rightarrow\quad P_{Rel\ K}=0$$

2 Le torseur résultant des actions de l'eau sur la porte , peut se décomposer en deux termes :

$_C\left\{T_{Eau\to Porte}\right\} = {}_C\left\{T_{Eau\to Plan}\right\} + {}_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\}$

Cherchons dans un premier temps le torseur $_C\left\{T_{Eau\to Plan}\right\}$:



En travaillant dans le plan de symétrie $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ de la porte, considérons un point M courant de ce même plan tel que $\overrightarrow{CM} = -R.\cos\alpha.\vec{y}_1 + (x_1 - R.\sin\alpha).\vec{x}_1$. Nous pouvons écrire que le torseur d'action de la pression relative de l'eau sur la partie plane est :

$$_M\left\{dT_{Eau\to Plan}\right\} = \left\{\begin{matrix} -P_{rel\ M}.dS.\vec{n} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M$$

avec :

$$* \underbrace{P(y) - P_A}_{P_{rel\ M} - P_{rel\ A}} = -\rho.g.\underbrace{(y - y_A)}_{x_1.\sin\theta_1} \Rightarrow \qquad P_{rel\ M} = -\rho.g.x_1.\sin\theta_1 + P_{rel\ A}$$

$* \ dS = L dx_1$

$* \ \vec{n} = -\vec{y}_1$

On a donc :

$$_M\left\{dT_{Eau\to Plan}\right\} = \left\{\begin{matrix} (\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}).L.dx_1.\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M$$

$$_C\left\{dT_{Eau\to Plan}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{y}_1 \\ \overrightarrow{CM}\wedge\left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{y}_1\end{matrix}\right\} \text{ avec } \overrightarrow{CM} = -R.\cos\alpha.\vec{y}_1 + \left(x_1 - R.\sin\alpha\right).\vec{x}_1$$

$$_C\left\{dT_{Eau\to Plan}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{y}_1 \\ \left(R.\sin\alpha - x_1\right).\left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$$

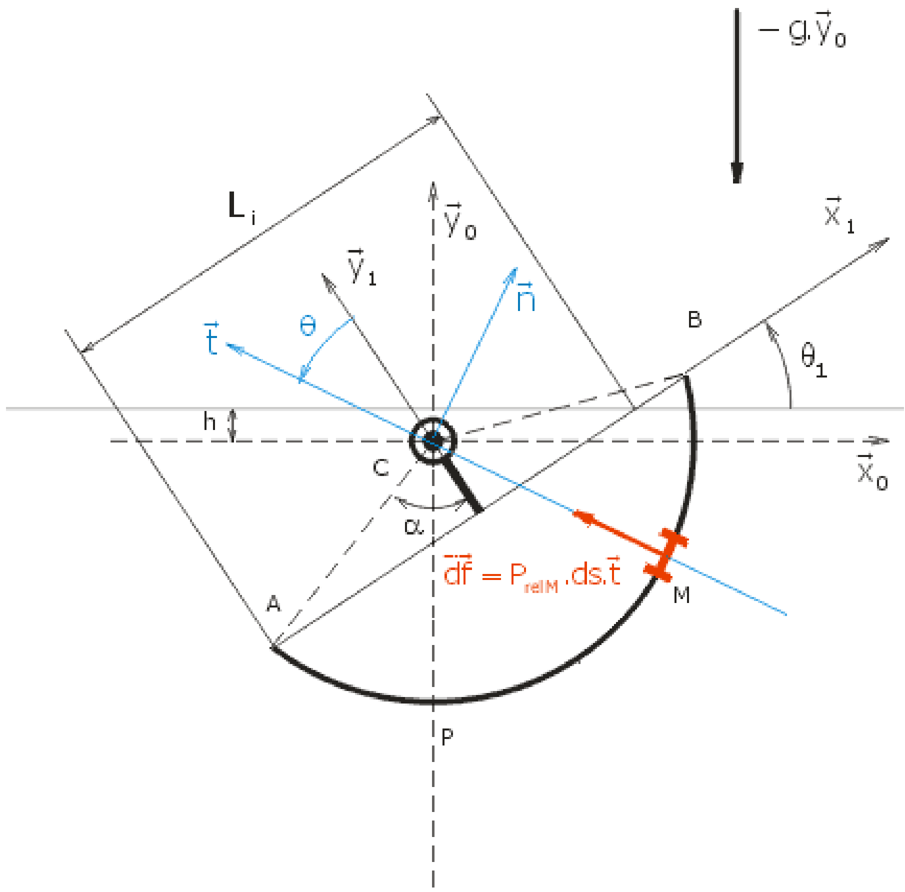
On obtient alors par intégration :

$$_C\left\{T_{Eau\to Plan}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \int_0^{L_i}\left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{y}_1 \\ \int_0^{L_i}\left(R.\sin\alpha - x_1\right).\left(\rho.g.x_1.\sin\theta_1 - P_{rel\ A}\right).L.dx_1.\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$$

Le torseur cherché est donc :

$$_C\left\{T_{Eau\to Plan}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.\sin\theta_1.\dfrac{L_i^{\,2}}{2} - P_{rel\ A}.L_i\right).L.\vec{y}_1 \\ \left(P_{rel\ A}.L_i\left(\dfrac{L_i}{2} - R.\sin\alpha\right) - \rho.g.L_i^{\,2}\sin\theta_1.\left(\dfrac{L_i}{3} + \dfrac{R.\sin\alpha}{2}\right)\right).L.\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$$

Cherchons dans un second temps le torseur $_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\}$:



$$_M\left\{dT_{Eau\to Cylindre}\right\} = \left\{\begin{matrix} -P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M$$

En travaillant dans le plan de symétrie $(C,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ de la porte, considérons un point M courant de ce même plan tel que $\overrightarrow{CM} = -R.\vec{t}$ On peut remarquer que pour tout point M, $\vec{df}$ est orienté suivant la direction du vecteur $\overrightarrow{CM}$ et donc que $\int \overrightarrow{CM} \wedge \vec{df} = \vec{M}_{C\ Eau\to Cylindre} = \vec{0}$. Le torseur élémentaire des actions de pression relative ramené au point C est :

$$_C\left\{dT_{Eau\to Cylindre}\right\} = \left\{\begin{matrix} P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

Par intégration nous obtiendrons :

$$_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\} = \left\{\begin{matrix} \int_{-\alpha}^{\theta_{max}} P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

En reprenant alors l'expression générale du torseur d'action de l'eau sur la porte, nous aurons :

$$_C\left\{T_{Eau\to Porte}\right\} = {}_C\left\{T_{Eau\to Plan}\right\} + {}_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\}$$

$$_C\left\{T_{Eau\to Porte}\right\} = \left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.\sin\theta_1.\frac{L_i^2}{2} - P_{rel\ A}.L_i\right).L.\vec{y}_1 \\ \left(P_{rel\ A}.L_i\left(\frac{L_i}{2} - R.\sin\alpha\right) - \rho.g.L_i^2\sin\theta_1.\left(\frac{L_i}{3} + \frac{R.\sin\alpha}{2}\right)\right).L.\vec{z}_0 \end{matrix}\right\}_C + \left\{\begin{matrix} \int_{-\alpha}^{\theta_{max}} P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

$$_C\left\{T_{Eau\to Porte}\right\} = \left\{\begin{matrix} \left(\rho.g.\sin\theta_1.\frac{L_i^2}{2} - P_{rel\ A}.L_i\right).L.\vec{y}_1 + \int_{-\alpha}^{\theta_{max}} P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \left(P_{rel\ A}.L_i\left(\frac{L_i}{2} - R.\sin\alpha\right) - \rho.g.L_i^2\sin\theta_1.\left(\frac{L_i}{3} + \frac{R.\sin\alpha}{2}\right)\right).L.\vec{z}_0 \end{matrix}\right\}_C$$

Le moment du torseur des actions de l'eau sur la porte en C sera donc :

$$\boxed{\vec{M}_{C\ Eau\to Porte} = \left(P_{rel\ A}.L_i\left(\frac{L_i}{2} - R.\sin\alpha\right) - \rho.g.L_i^2\sin\theta_1.\left(\frac{L_i}{3} + \frac{R.\sin\alpha}{2}\right)\right).L.\vec{z}_0}$$

Dans l'étude précédente, nous avons déterminé l'expression du torseur d'action de l'eau sur la partie cylindrique de la porte au point C:

$$_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\} = \left\{\begin{matrix} \int_{-\alpha}^{\theta_{max}} P_{rel\ M}.dS.\vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

Cherchons l'expression de l'élément d'effort en fonction de θ_1 :

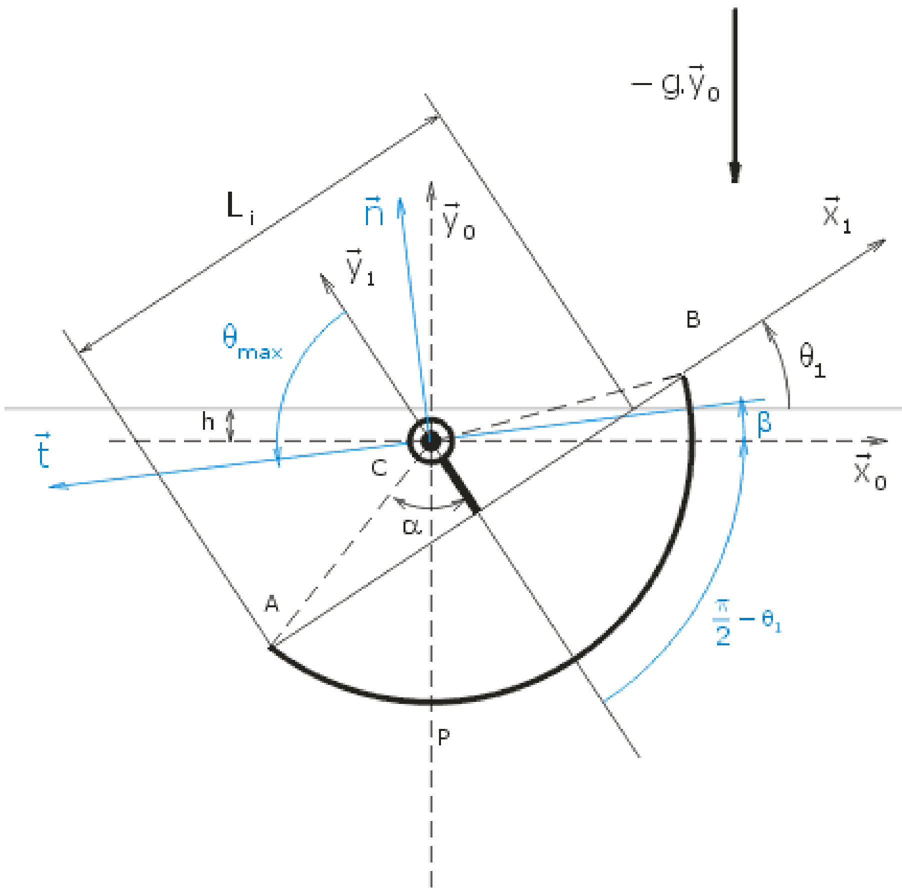
* $\underbrace{P(y) - P_A}_{P_{rel\ M} - P_{rel\ A}} = -\rho.g.\left(y - y_A\right)$ avec $\quad y - y_A = \overrightarrow{AM}.\vec{y}_0 = \overrightarrow{AC}.\vec{y}_0 + \overrightarrow{CM}.\vec{y}_0 = R.\left(\cos(\alpha - \theta_1) - \cos(\theta + \theta_1)\right)$
* $dS = R.L.d\theta$ avec $-\alpha \le \theta \le \theta_{max}$
* $\vec{t} = -\sin(\theta + \theta_1).\vec{x}_0 + \cos(\theta + \theta_1).\vec{y}_0$

On a donc :

$$_C\left\{dT_{Eau\to Cylindre}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\left(-\rho.g.R.\left(\cos\left(\alpha-\theta_1\right)-\cos\left(\theta+\theta_1\right)\right)+P_{rel\ A}\right).R.L.d\theta.\left(-\sin\left(\theta+\theta_1\right).\vec{x}_0+\cos\left(\theta+\theta_1\right).\vec{y}_0\right)\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

$$_C\left\{T_{Eau\to Cylindre}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\int_{-\alpha}^{\theta_{max}}\left(-\rho.g.R.\left(\cos\left(\alpha-\theta_1\right)-\cos\left(\theta+\theta_1\right)\right)+P_{rel\ A}\right).R.L.d\theta.\left(-\sin\left(\theta+\theta_1\right).\vec{x}_0+\cos\left(\theta+\theta_1\right).\vec{y}_0\right)\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

Il reste donc à déterminer θ_{max} en fonction de θ_1 .



A partir de cette figure nous déduisons :

$\sin\beta = \dfrac{h}{R}$ et donc : $\theta_{max} = \beta + \dfrac{\pi}{2} - \theta_1 = Arc\sin\dfrac{h}{R} + \dfrac{\pi}{2} - \theta_1$

Par intégration nous pourrons déterminer ensuite $\vec{F}_{Eau\to Cylindre}$:

Posons $\gamma = \theta + \theta_1$. Pour $-\alpha \le \theta \le Arc\sin\dfrac{h}{R} + \dfrac{\pi}{2} - \theta_1$ on aura $\theta_1 - \alpha \le \underbrace{\theta + \theta_1}_{\gamma} \le Arc\sin\dfrac{h}{R} + \dfrac{\pi}{2}$.

L'expression finale , intégrale, du torseur d'action de l'eau sur la partie cylindrique sera donc :

$$ {}_{C}\left\{T_{Eau\rightarrow Cylindre}\right\} = {}_{C}\left\{\begin{matrix} R.L \displaystyle\int_{\theta_1-\alpha}^{Arcsin\frac{h}{R}+\frac{\pi}{2}} \left(-\rho.g.R\left(\cos\left(\alpha-\theta_1\right)-\cos\left(\gamma\right)\right)+P_{rel\ A}\right).\left(-\sin\left(\gamma\right).\vec{x}_0+\cos\left(\gamma\right).\vec{y}_0\right)d\gamma \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} $$