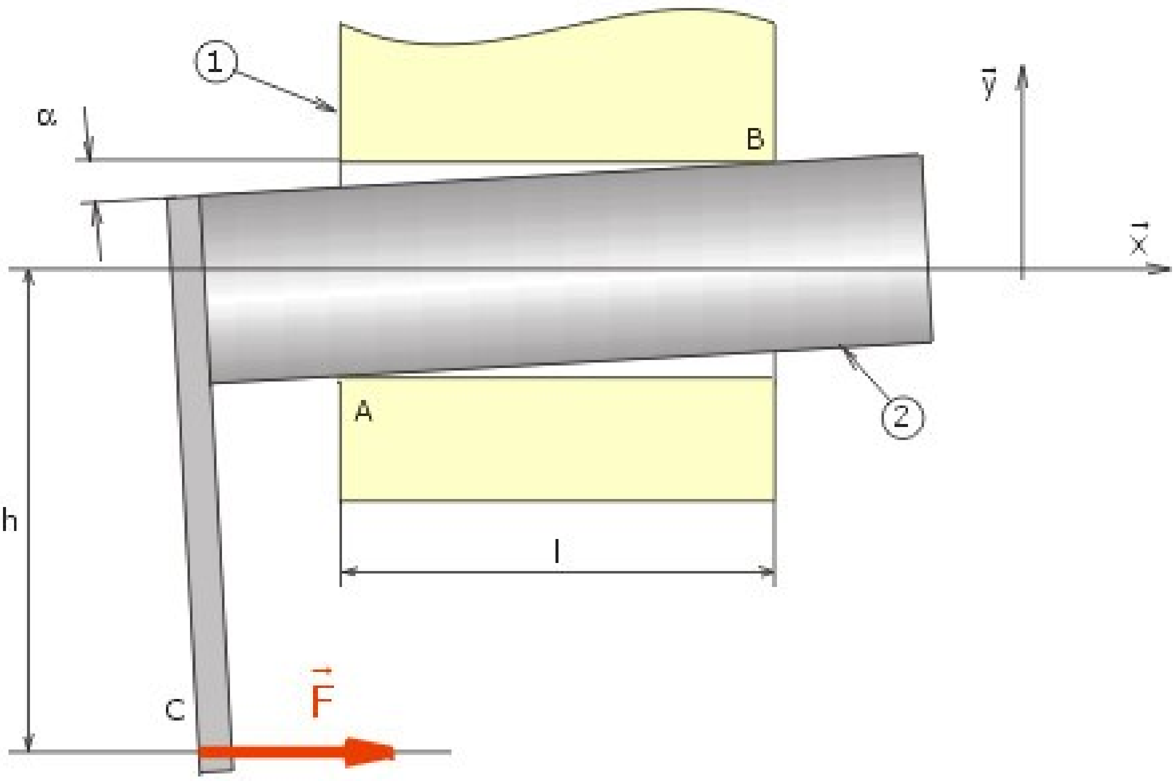
Enoncé

Considérons une liaison pivot glissant constituée d'un arbre (1) et d'un alésage (2). Du fait du jeu existant dans la liaison, on observe un défaut de position angulaire de l'axe de l'arbre par rapport à l'axe de l'alésage . Le paramètre de position angulaire est noté α .



L'arbre est soumis à un glisseur $\{T_{ext \to 2}\} = {}_{\forall M \in (C,\vec{x})}\left\{\begin{matrix} \vec{F} = F.\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$. Le coefficient de frottement pour le couple de matériaux en présence est : $f = \tan\varphi$. Les actions de gravitation sont négligées.

En fonction de la géométrie du système, on observe un équilibre de l'arbre par rapport à l'alésage quelque soit l'intensité de l'effort appliqué en C. Ce phénomène s'appelle Arc-Boutement. On le retrouve notamment dans les liaisons glissières (tiroirs par exemples) soumis à des sollicitations en porte-à-faux.

Le torseur d'action du solide (i) sur le solide (j) sera noté au point M :

$$_M\left\{T_{i \to j}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c|c} X_M & - \\ Y_M & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z})}$$

1 Exprimer la valeur de l'angle α en fonction du jeu mini : $j_{\min}$ entre l'arbre et l'alésage et des constantes du problème. On supposera cet angle faible.

2 On suppose que le contact entre l'arbre et l'alésage est de type ponctuel avec frottement aux points A et B. Donner la forme des glisseurs d'actions de l'alésage (1) sur l'arbre (2) aux points A et B.

3 En supposant que le problème répond aux conditions de la statique plane, déterminer analytiquement la condition pour laquelle il y a arc-boutement. Les diamètres nominaux : d de l'arbre et de l'alésage sont identiques.

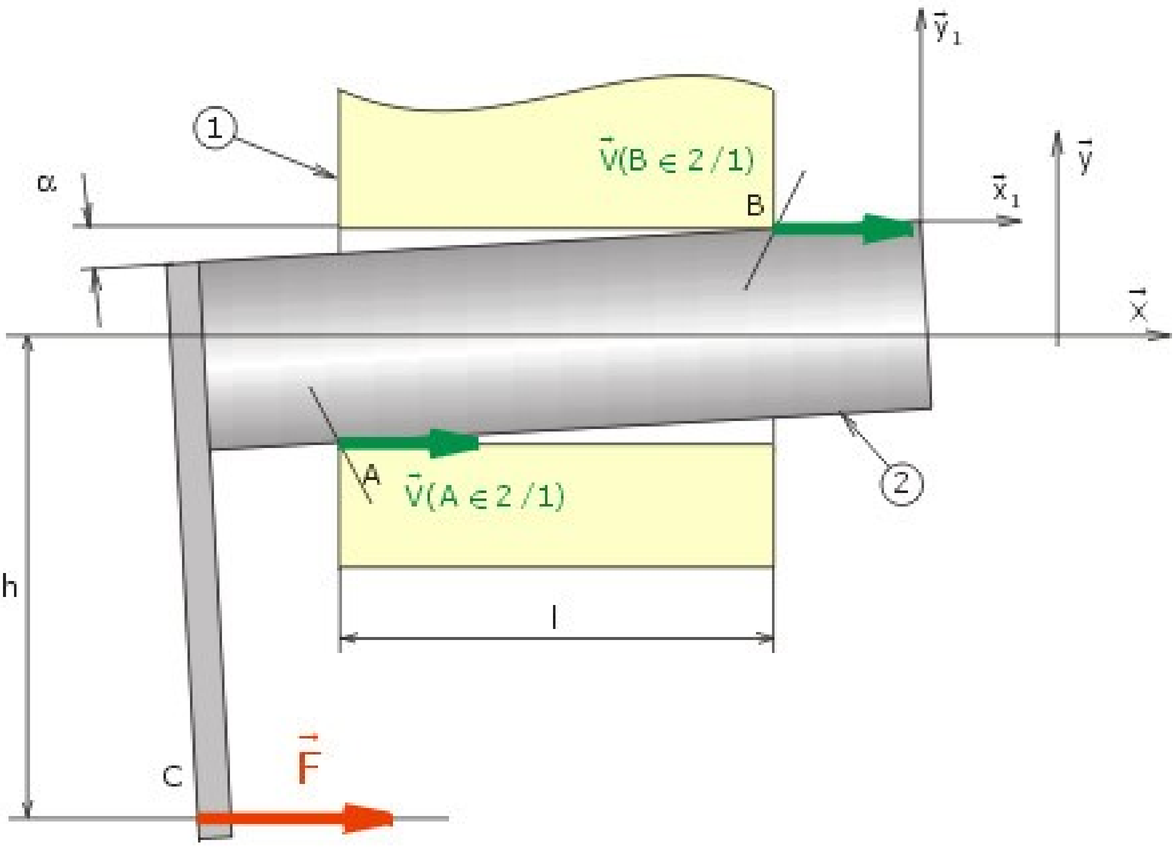
4 Retrouver le résultat précédent à partir d'une interprétation graphique de l'équilibre de l'arbre (2).

Solution

1 Le jeu minimal étant réduit , on a $\tan\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha = \dfrac{j_{\min}}{\ell}$. On a donc $\boxed{\alpha \approx \dfrac{j_{\min}}{\ell}}$. On peut par exemple faire une application numérique pour un ajustement $\varnothing\ 20\ H\ 7\ g\ 6$ qui donne un jeu minimal de $0,007\,mm$. Pour une longueur de guidage $\ell = 20\ mm$ entre l'arbre et l'alésage, nous obtenons $\tan\alpha = \dfrac{j_{\min}}{\ell} = \dfrac{0,007}{20} = 3,5\,10^{-4}$ ce qui donne un angle de $\alpha = 0,02°$. Le calcul direct donnerait $\alpha \approx \dfrac{j_{\min}}{\ell}.\dfrac{360}{2.\pi} = \dfrac{0,007}{20}.\dfrac{360}{2.\pi} = 0,02°$

2 Considérons les normales aux contacts en A et B. Si on isole l'arbre (2), la base locale $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$

permet de définir les torseurs d'actions de (1) sur (2) aux points A et B



La normale au contact au niveau des deux points de contact est : $\vec{y}_1$. En travaillant en valeur algébrique nous pouvons alors écrire :

$$_A\{T_{1\to 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

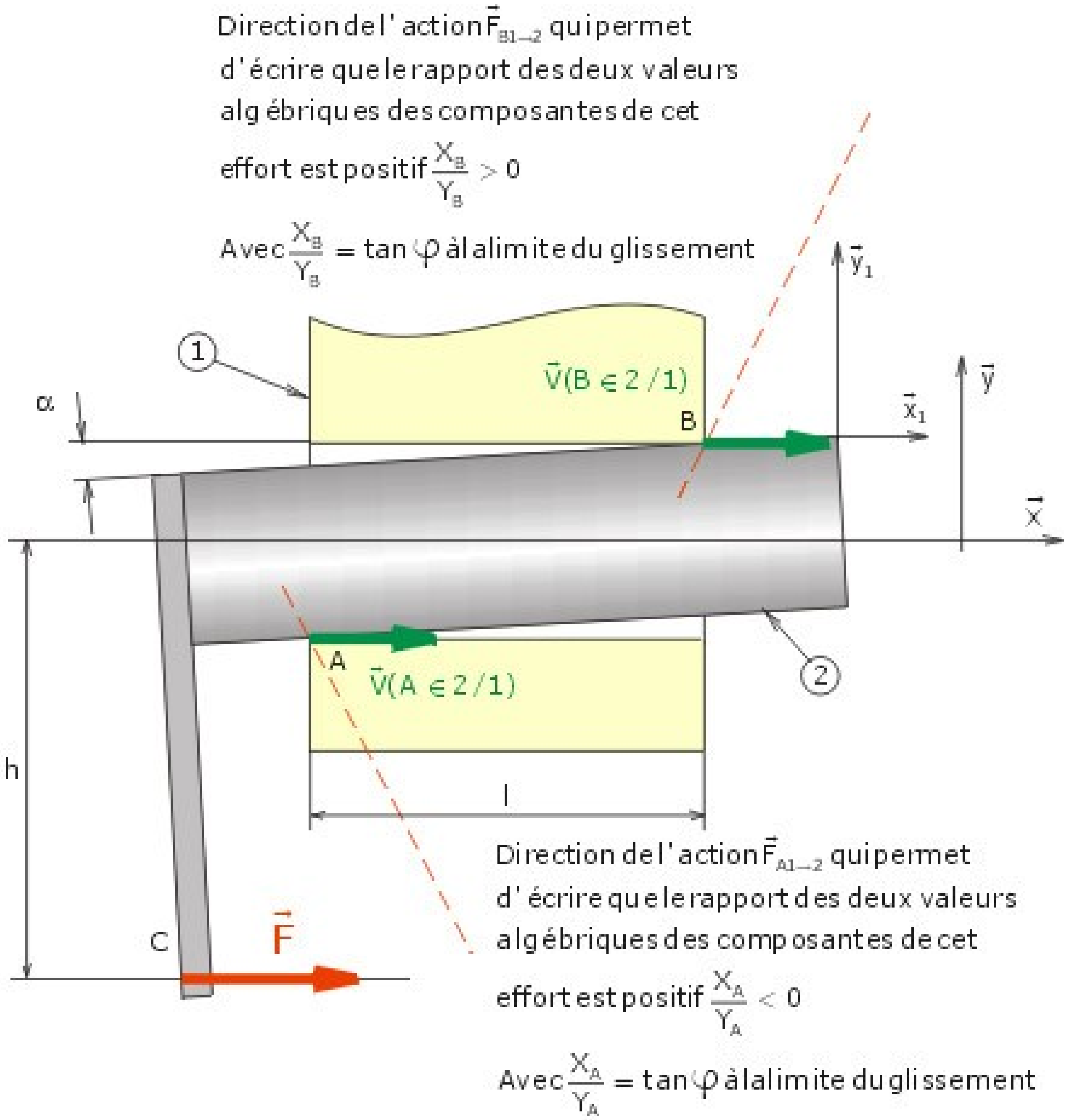
$$_B\{T_{1\to 2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

De plus, avec α faible nous pouvons écrire : $\left| \begin{array}{lll} \vec{x}_1 = \cos\alpha.\vec{x} + \sin\alpha.\vec{y} & \rightarrow & \vec{x}_1 \approx \vec{x} \\ \vec{y}_1 = -\sin\alpha.\vec{x} + \cos\alpha.\vec{y} & \rightarrow & \vec{y}_1 \approx \vec{y} \end{array} \right.$. Les torseurs des liaisons ponctuelles deviennent donc :

$${}_A\left\{T_{1\to 2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c|c} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})}$$

$${}_B\left\{T_{1\to 2}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c|c} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})}$$

3 Les lois de Coulomb nous disent que la composante tangentielle d'action s'oppose localement à la vitesse de glissement.



L'utilisation des valeurs algébriques dans cette étude d'équilibre permet d'écrire d'après les lois de coulomb:

$$\frac{X_A}{Y_A} < 0 \text{ et } \frac{X_B}{Y_B} > 0$$

En appliquant le principe fondamental de la statique à l'arbre (2), dans le cas de ce problème plan, nous obtiendrons trois relations indépendantes. Comme ce problème est à quatre inconnues : $X_A, Y_A, X_B \; et \; Y_B$, il nous faut une autre équation pour résoudre le système. Les lois de Coulomb nous donnent une relation dans le cas où un des deux points est à la limite du glissement. Dans ce cas, les lois de coulomb nous disent que le rapport de la composante tangentielle sur la composante normale est constante. Cette dernière relation permet de résoudre le système et de définir chacune des inconnues $X_A, Y_A, X_B \; et \; Y_B$. La condition d'équilibre se traduira par une inéquation que devra vérifier le rapport des composantes tangentielles et normales de l'appui ponctuel qui ne se trouve pas à la limite de glissement. En effet, si on observe un glissement en l'un des points de contact, l'autre point de contact doit garantir alors l'équilibre de l'arbre. Traduisons ceci analytiquement :

Le PFS appliqué à (2) en A se traduit par :

$$\sum \vec{F}_{\bar{2} \to 2} \cdot \vec{x} = 0 \quad \rightarrow \quad X_A + X_B + F = 0 \qquad 1)$$

$$\sum \vec{F}_{\bar{2} \to 2} \cdot \vec{y} = 0 \quad \rightarrow \quad Y_A + Y_B = 0 \qquad 2)$$

$$\sum \vec{M}_{A \; \bar{2} \to 2} \cdot \vec{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(h - \frac{d}{2}\right).F + \ell.Y_B - d.X_B = 0 \qquad 3)$$

La limite de glissement ,par exemple en A, se traduit par :

$$\frac{X_A}{Y_A} = -\tan\varphi = -f \qquad 4)$$

La combinaison de ces quatre relations permet de définir $X_A, Y_A, X_B \; et \; Y_B$:

$$X_A = -f.\frac{\left(h + \frac{d}{2}\right)}{\ell + f.d}.F$$

$$Y_A = \frac{\left(h+\frac{d}{2}\right)}{\ell + f.d}.F$$

$$X_B = \left(\frac{f.\left(h-\frac{d}{2}\right)-\ell}{\ell + f.d}\right).F$$

$$Y_B = -\frac{\left(h+\frac{d}{2}\right)}{\ell + f.d}.F$$

La condition d'équilibre de l'arbre (2) sera alors déterminée par l'inéquation :

$$\frac{X_B}{Y_B} \leq \tan\varphi$$

A partir des l'expressions de $X_B \; et \; Y_B$, il vient :

$$\frac{\left(\frac{f.\left(h-\frac{d}{2}\right)-\ell}{\ell + f.d}\right).F}{-\frac{\left(h+\frac{d}{2}\right)}{\ell + f.d}.F} \leq f$$ ce qui implique donc : $$-\frac{f.\left(h-\frac{d}{2}\right)-\ell}{\left(h+\frac{d}{2}\right)} \leq f$$

Comme $\left(h+\frac{d}{2}\right) > 0$ nous pouvons écrire : $-f.\left(h-\frac{d}{2}\right)+\ell \leq f.\left(h+\frac{d}{2}\right)$ et donc $\boxed{\frac{\ell}{2.h} \leq f}$

Cette dernière relation constitue la condition d'équilibre de l'arbre(2).

L'autre possibilité consiste à définir le point B à la limite de glissement ($\frac{X_B}{Y_B} = \tan\varphi = f \quad 4)$) .

L'utilisation des équations d'équilibres 1), 2) et 3) permet de définir les composantes d'actions :

$$X_A = \frac{\left(f.\left(h+\frac{d}{2}\right)-\ell\right)}{\ell - f.d}.F$$

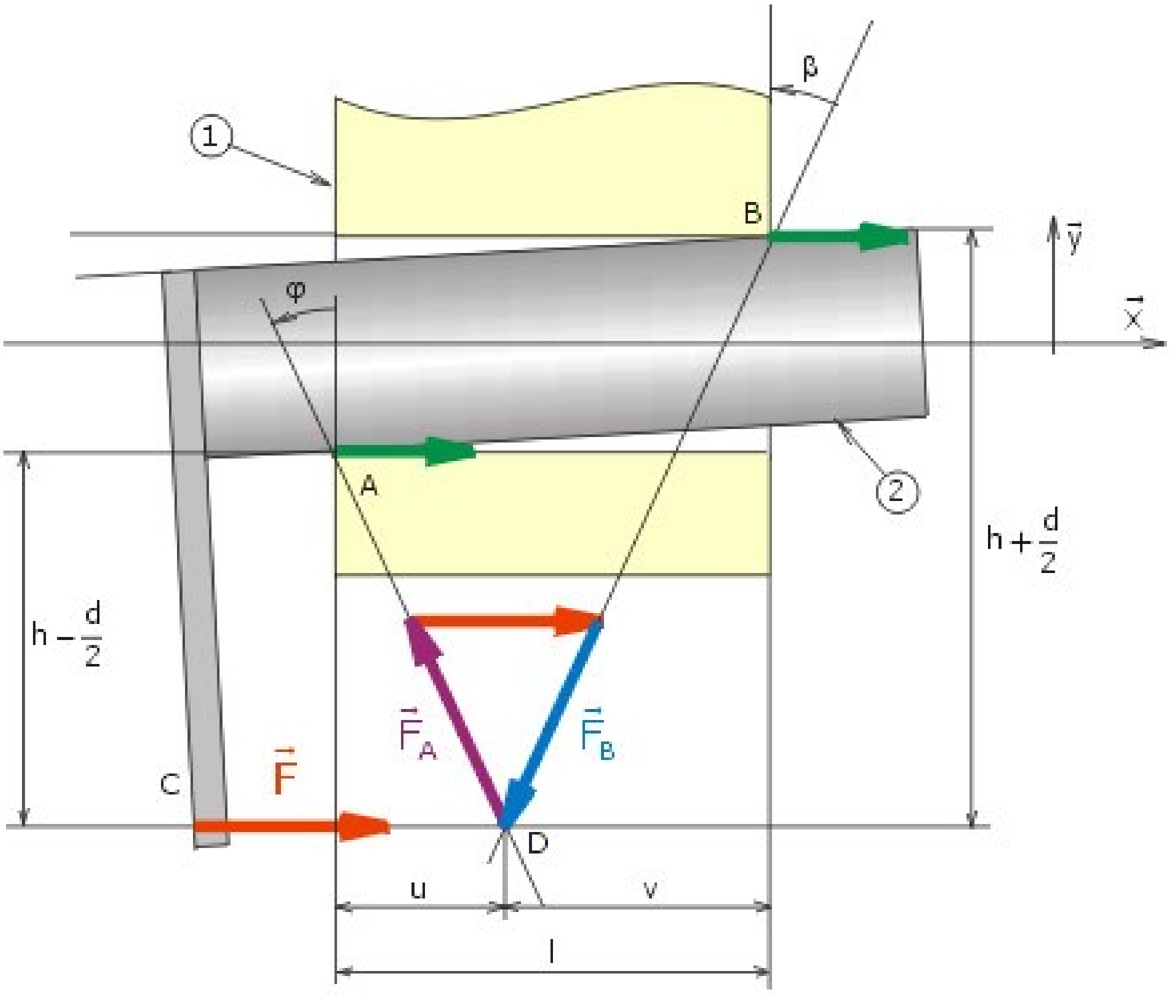
$$Y_A = \frac{\left(h-\frac{d}{2}\right)}{\ell - f.d}.F$$

$$X_B = -f.\frac{\left(h-\frac{d}{2}\right)}{\ell - f.d}.F$$

$$Y_B = -\frac{\left(h-\frac{d}{2}\right)}{\ell - f.d}.F$$

La condition d'équilibre au point A se traduit alors par $-\frac{X_A}{Y_A} \leq \tan\varphi$ (car le rapport $\frac{X_A}{Y_A} < 0$) . En utilisant les composantes définies précédemment nous obtenons : $\boxed{\frac{\ell}{2.h} \leq f}$. Cette relation est identique à celle déterminée précédemment.

4 Isolons l'arbre (2). Il est soumis à l'action de trois glisseurs. D'après le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs, ces glisseurs sont coplanaires, leurs axes centraux sont concourants en D et la somme vectorielle de leurs résultantes doit être nulle.



En supposant être à la limite du glissement en A : $\vec{F}_A = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y}$ avec $-\dfrac{X_A}{Y_A} = \tan\varphi$, la condition d'équilibre de l'arbre (2) est :

$\dfrac{X_B}{Y_B} = \tan\beta \qquad avec \quad \tan\beta \leq \tan\varphi \quad et \quad \vec{F}_B = X_B.\vec{x} + Y_B.\vec{y}$.

Par une analyse graphique on détermine $\tan\beta = \dfrac{v}{h+\dfrac{d}{2}} = \dfrac{\ell - u}{h+\dfrac{d}{2}} = \dfrac{\ell - \left(h - \dfrac{d}{2}\right).\tan\varphi}{h+\dfrac{d}{2}}$. La condition d'équilibre entraîne donc : $\dfrac{\ell - \left(h - \dfrac{d}{2}\right).f}{h+\dfrac{d}{2}} \leq f$ et l'on obtient $\boxed{\dfrac{\ell}{2.h} \leq f}$