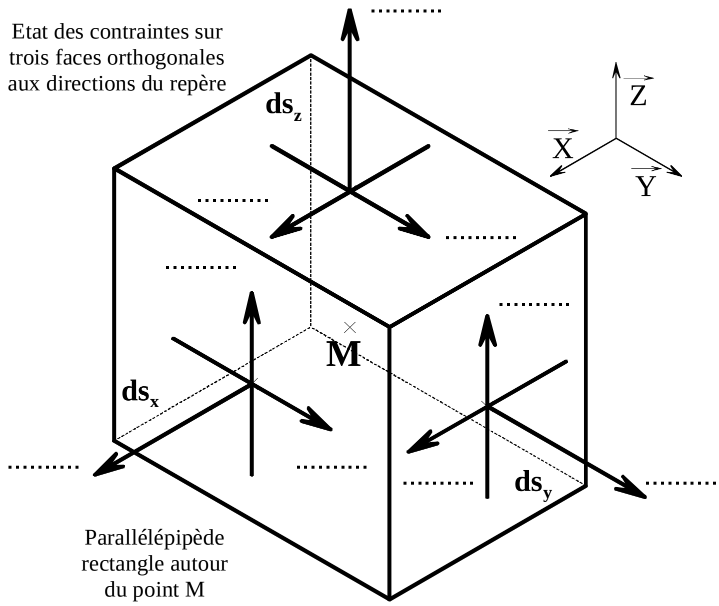
1- Etat de contraintes en un point M

1.1- Notation indicielle de Cauchy

Soit un point M d'un solide auquel est lié le repère $(M, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$. Ce repère permet de définir l'orientation d'un parallélépipède rectangle dont les facettes sont orthogonales aux axes du repère.

On définit les composantes des contraintes sur les trois facettes : $\overrightarrow{\Sigma(M,x)}$; $\overrightarrow{\Sigma(M,y)}$ et $\overrightarrow{\Sigma(M,z)}$. Chacune de ces trois contraintes se projette sur les trois axes du repère lié à la pièce.

Si on utilise la notation indicielle (a deux indices) suivante : 1^{ier} indice : Vecteur unitaire de la normale à la facette ; 2^{ième} indice : Vecteur unitaire de l'axe sur lequel est projetée la contrainte.



On a alors : $\overrightarrow{\Sigma(M,x)} = \sigma_{xx}.\overrightarrow{X} + \tau_{xy}.\overrightarrow{Y} + \tau_{xz}.\overrightarrow{Z}$

$\overrightarrow{\Sigma(M,y)} = \tau_{yx}.\overrightarrow{X} + \sigma_{yy}.\overrightarrow{Y} + \tau_{yz}.\overrightarrow{Z}$ $\quad$ $\overrightarrow{\Sigma(M,z)} = \tau_{zx}.\overrightarrow{X} + \tau_{zy}.\overrightarrow{Y} + \sigma_{zz}.\overrightarrow{Z}$

1.2- Matrice des contraintes en un point M

Cette notation permet de définir la matrice des contraintes en un point M dans le repère $(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$:

$$\left[\boldsymbol{\Sigma(M)}\right] = \begin{pmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{pmatrix}_{......................}$$

On montre que cette matrice permet de déterminer $\overrightarrow{\Sigma(M,n)}$ le vecteur contrainte en M sur la surface de normale le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. On a pour cela :

$$\text{Donc si } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})} \text{ alors :}$$

$\overrightarrow{\Sigma(M,n)} =$

1.3- Théorème de Cauchy

On montre en étudiant l'équilibre du parallélépipède ci-dessus les trois relations suivantes :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

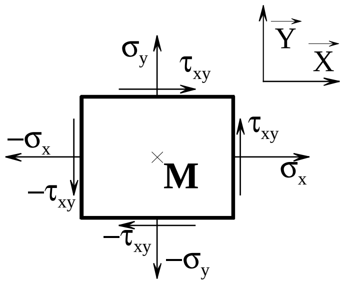
Cela revient donc à dire que :

....

....

2- Contraintes planes en M

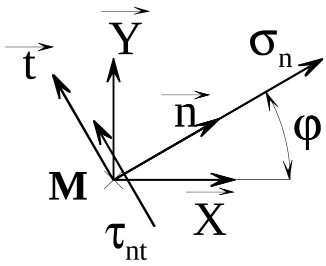
2.1- matrice des contraintes dans un problème plan



Dans un problème plan ($\vec{X}$, $\vec{Y}$) la matrice des contraintes peut être réduite à une matrice symétrique 2x2 :

....

2.2- Contraintes en M sur une facette quelconque



Soit une facette (surface élémentaire) orienté d'un angle φ par rapport à l'axe $\vec{X}$ du repère dans lequel est exprimée la matrice des contraintes en M.

....

....

....

....

2.3- Directions principales en M

Les directions pour lesquelles la contrainte tangentielle est nulle sont appelées les directions principales de la sollicitation au point M elles peuvent être déterminée à partir de l'expression de τ_{nt} établie ci-dessus. On obtient deux valeurs d'angle :

☞ φ_1 tel que : $\tan \varphi_1 = \dfrac{2.\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

☞ φ_2 tel que : $\tan \varphi_2 = \dfrac{2.\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$ $(\varphi_2 = \varphi_1 + 90°)$

En tout point M, on a donc deux directions orthogonales où la contrainte tangentielle est nulle.

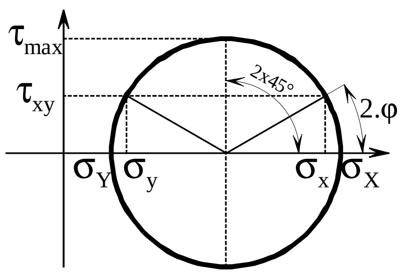
Sachant que : $\cos 2.\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2 2.\varphi}}$ et que: $\sin 2.\varphi = \sqrt{\dfrac{\tan^2 2.\varphi}{1+\tan^2 2.\varphi}}$

On obtient les valeurs σ_X et σ_Y de la contrainte normale dans les directions principales :

....

....

2.4- Cercle de Mohr



Le cercle de Mohr en un point M du solide se dessine dans un plan ($\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$) avec la contrainte normale en abscisse et la contrainte tangentielle en ordonnée. C'est le lieu définissant l'état des contraintes normales et tangentielles suivant l'orientation de la facette.

Il montre que la contrainte tangentielle maximale est obtenue pour un angle à 45° des directions principales et à la valeur : $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}$

3- Critère de résistance

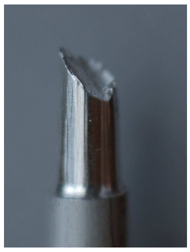
3.1- Contrainte en traction pure

En traction on a, à la limite de traction R_e :

☞ Sur la facette orthogonale à $\overrightarrow{X}$ une contrainte normale $\sigma_x = R_e$

☞ Sur la facette orthogonale à $\overrightarrow{Y}$ une contrainte normale nulle : $\sigma_y = 0$

☞ Sur les facettes orthogonale à $\overrightarrow{X}$ et à $\overrightarrow{Y}$ une contrainte tangentielle nulle : $\tau_{xy} = 0$



Or le plus souvent (particulièrement pour les matériaux ductile on constate que la rupture lors d'un essai de traction a lieu dans un plan incliné de 45° par rapport à la ligne moyenne de l'éprouvette.

On en déduit qu'à priori la rupture se produit pour la valeur maximale de contrainte tangentielle. Or

$\tau_{max} = \dfrac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}$ avec : $\sigma_X = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2}$ et : $\sigma_Y = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2}$

Soit $\tau_{max} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2}$ Avec en traction $\sigma_x = R_e$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ Donc : ....

3.2- Contrainte et critère de Tresca

Le critère de Tresca suppose qu'il y a rupture (ou perte de l'élasticité) lorsque la contrainte maximale de cisaillement atteint la limite à la rupture (ou élastique) au cisaillement. Soit deux fois la limite à la rupture (ou élastique) à la traction. On définit donc la contrainte équivalente de Tresca :

....

Le critère de résistance de Tresca est donc que : $\sigma_{Tresca} \leq \sigma_{adm}$ soit :

....

Avec R_e limite élastique à la traction et s coefficient de sécurité.

Ce critère convient bien aux matériaux ductiles, mais moins pour les matériaux fragile ou ayant des limites bien différentes à la compression et à la traction.

3.3- Contrainte et critère de Von Mises

Afin de mieux prendre en compte les trois contraintes principales dans une même équation, le professeur Von Mises a défini un autre contrainte équivalente. Dans une sollicitation donnant des contraintes planes la contrainte équivalente de Von Mises est :

....

Le critère de résistance de Tresca est donc que : $\sigma_{Tresca} \leq \sigma_{adm}$ soit :

....

Avec R_e limite élastique à la traction et s coefficient de sécurité.

Ce critère convient bien également aux matériaux ductiles, et assez bien aux matériaux fragiles mais peu également aux matériaux ayant des limites bien différentes à la compression et à la traction.