1- Hypothèses de la théorie des poutres

1.1- Notion de poutre

Une pièce est associée à une poutre lorsque sa longueur est importante devant sa section. Cette notion est très relative. Plus la longueur est importante devant la section plus les calculs de la théorie de poutres sont conformes à la réalité.

1.2- Matériaux homogènes et isotropes

Homogénéïté : Le matériau d'une pièce est homogène lorsque les caractéristiques de ce matériau sont identiques en tout point de la pièce.

Isotropisme : Le matériau d'une pièce est isotrope lorsque les caractéristiques de ce matériau sont identiques dans toutes les directions de l'espace.

1.3- Ligne moyenne

La ligne moyenne d'une poutre est une courbe parcourant la poutre sur toute sa longueur et passant par les centres des sections droites de cette poutre. La tangente en un point à cette ligne moyenne est perpendiculaire à la section contenant ce point.

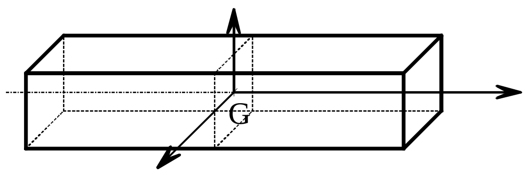
1.4- Hypothèse de Navier Bernoulli

La section droite d'une poutre avant déformation (perpendiculaire à la ligne moyenne avant déformation) reste après déformation plane et perpendiculaire à la ligne moyenne déformée.

1.4- Repère associé à une section

Soit une poutre E représentée ci-contre. On effectue une coupe fictive de cette poutre suivant une section plane perpendiculaire à la ligne moyenne et de centre de gravité G.

Alors le repère associé à la section de coupure est le repère Rs(G, $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$) dont l'axe $\overrightarrow{X}$ est porté par la ligne moyenne et est orienté de la gauche vers la droite. Les axes $\overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$ peuvent être choisis de manière quelconque, mais souvent l'axe $\overrightarrow{Y}$ est dans le plan de symétrie de la poutre lorsque celle-ci en possède un.



2- Coupure d'une poutre - Equilibre

2.1- Etude des actions

La section S partage la poutre en 2 tronçons : Un à gauche de la section l'autre à droite de la section.

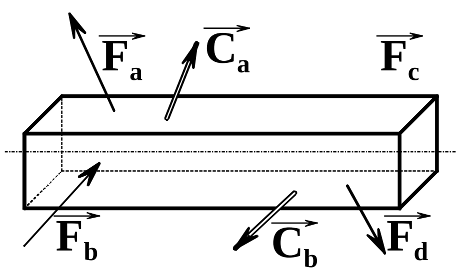
On note : E_1 : Le tronçon gauche de la poutre — E_2 : Le tronçon droite de la poutre

E : L'ensemble de la poutre — $\overline{E}$: Tout ce qui n'est pas la poutre

PFS **$\{T(\overline{E}/E)\} = \{0\}$ (a)**

<u>Isolons la poutre</u>

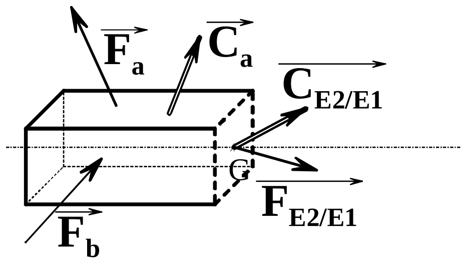
$\{T(\overline{E}/E)\}$: Le torseur des actions extérieures à la poutre exercées sur cette poutre



Isolons le tronçon gauche de la poutre

$\{T(\overline{E}/E1)\}$: Le torseur des actions extérieures à la poutre exercées sur le tronçon gauche de la poutre .

$\{T(E_2/E_1)\}$ le torseur de l'action de E_2 sur E_1

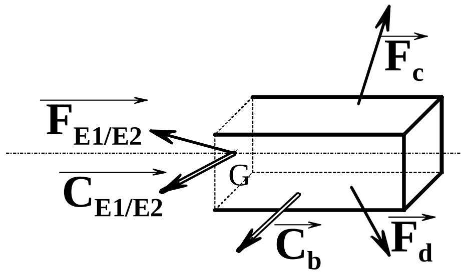


PFS : $\{T(\overline{E}/E_1)\}+\{T(E_2/E_1)\} = \{0\}$ (b)

Isolons le tronçon droite la poutre

$\{T(\overline{E}/E_2)\}$: Le torseur des actions extérieures à la poutre exercées sur le tronçon droite de la poutre .

$\{T(E_1/E_2)\}$ le torseur de l'action de E_1 sur E_2



$\{T(\overline{E}/E_2)\}+\{T(E_1/E_2)\} = \{0\}$ (c)

Du principe des actions mutuelles on déduit que : .... **(d)**

De ces 3 dernières équations on déduit que :

(b) + (c) ⇨ $\{T(\overline{E}/E_1)\}+\{T(E_2/E_1)\} + \{T(\overline{E}/E_2)\}+\{T(E_1/E_2)\} = \{0\}$

(d) ⇨ $\{T(\overline{E}/E_1)\}+\{T(E_2/E_1)\} + \{T(\overline{E}/E_2)\}+\{T(E_1/E_2)\} = \{0\}$

Soit : .... (e)

La somme des actions extérieures s'appliquant sur la partie gauche de la poutre est égale à l'opposé de la somme des actions extérieures s'appliquant sur la partie droite de la poutre.

2- Torseur de cohésion

2.1- Définition

Le torseur de cohésion dans une section S est le torseur de l'action du tronçon droite de la poutre sur le tronçon gauche de la poutre : on le note {Tcoh}

....

Du paragraphe précédent on en déduit que : (b) ⇨ $\{T(E_2/E_1)\} = -\{T(\overline{E}/E_1)\}$

(e) ⇨ $\{T(E_2/E_1)\} = +\{T(\overline{E}/E_2)\}$

....

Le torseur de cohésion est donc égal à :

☞ ....

....

Ou

☞ ....

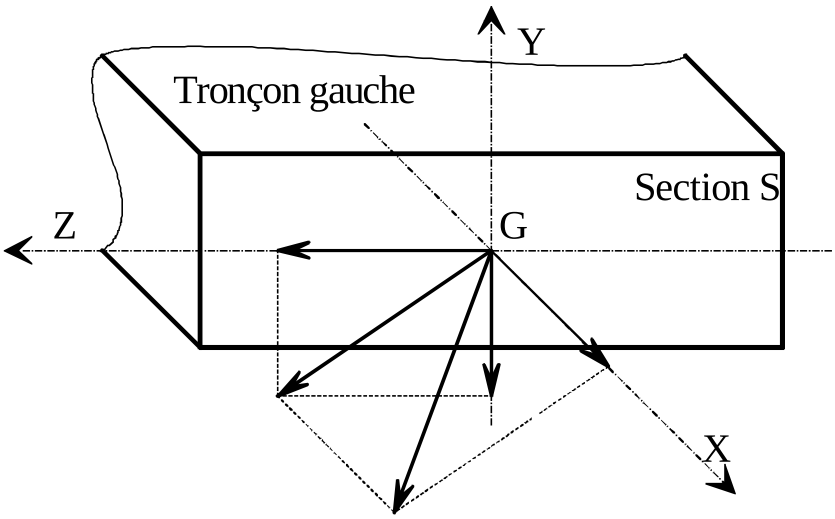
....

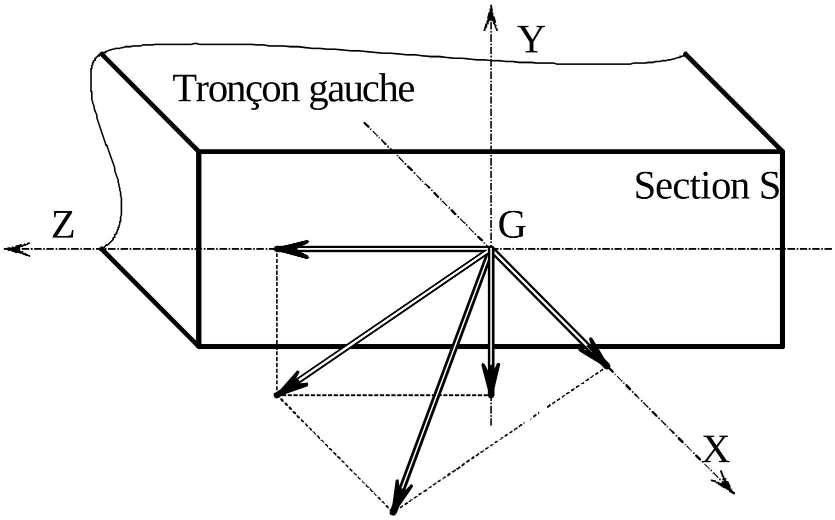
2.2- Composantes du torseur de cohésion

Soit Rs(G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) le repère associé à la section S.

Soit $\vec{R}$ et $\vec{M_G}$ les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre G de la coupure.

On projette ces éléments de réduction sur l'axe $\vec{X}$ et sur le plan ($\vec{Y}$, $\vec{Z}$) de la section:





On définit :

$\vec{N}$: Projection de $\vec{R}$ sur (G, $\vec{X}$) ....

$\vec{T}$: Projection de $\vec{R}$ sur (G, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) ....

$\vec{M_t}$: Projection de $\vec{M_G}$ sur (G, $\vec{X}$) ....

$\vec{M_f}$: Projection de $\vec{M_G}$ sur (G, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) ....

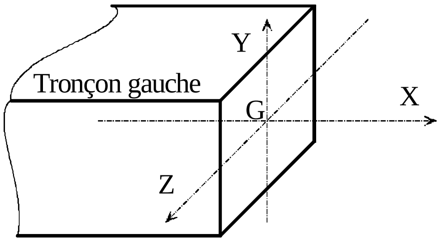
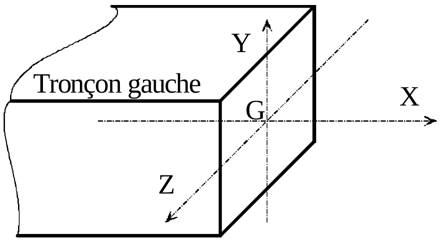
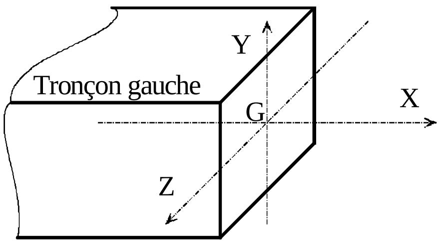
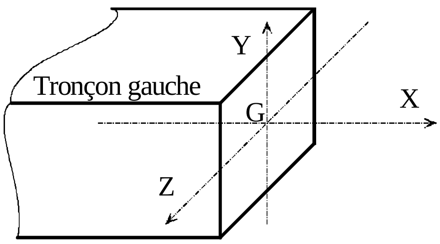
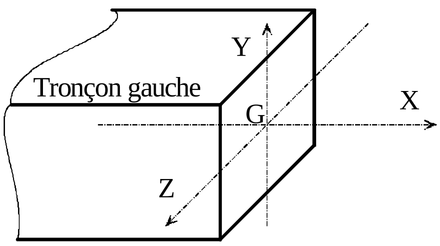
On projette également $\vec{T}$ et $\vec{M_f}$ sur les axes $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$.

On obtient les composantes de $\vec{T}$ et $\vec{M_f}$ sur $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$

D'où les composantes du torseur de cohésion au centre de la section S. de la poutre : ....

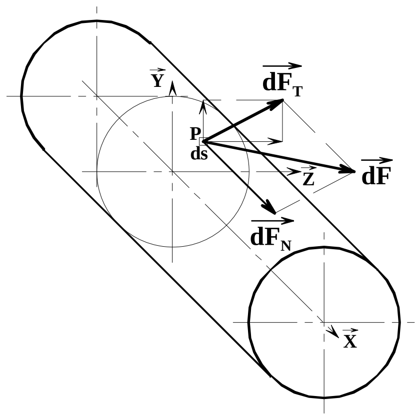
Souvent, ayant affaire à des problèmes plans ($\vec{X}$, $\vec{Y}$)on a : ....

3- Relation entre torseur de cohésion et sollicitation dans la section

Forme du torseur de cohésion	Type de sollicitation
$\{T_{coh}\}$ = ... 	....
$\{T_{coh}\}$ = ... 	....
$\{T_{coh}\}$ = ... 	....
$\{T_{coh}\}$ = ... 	....
$\{T_{coh}\}$ = ... 	....

4- Notion de contrainte

4.1- Efforts de cohésion



Soit la surface droite S d'une poutre. La résistance de cette poutre est liée à la cohésion des deux parties de la poutre de par et d'autre de cette section.

La cohésion est assurée par l'effort de cohésion de la partie droite de la poutre sur la partie gauche modélisé par le torseur de cohésion : $\{T_{coh}\}$.

Cet effort de cohésion est obtenu par la somme d'un ensemble de forces infinitésimales $\overrightarrow{dF}$ appliquées aux points P centres de surface élémentaires ds.

Donc si on a : $\{T_{coh}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M_G} \end{array} \right\}$ Alors : .... et: ....

4.2- Contraintes

La contrainte en un point M d'une section S défini la force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'appliquant sur la surface élémentaire ds autour du point M. Cette force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ peut se décomposer en deux forces : $\overrightarrow{dF_N}$ normale à la section S et $\overrightarrow{dF_T}$ tangente à la section S. ....

Ces deux composantes définissent deux types de contraintes normale et tangentielle. Le critère de résistance d'une pièce dans la section S sera lié aux valeurs des ces contraintes.

<u>4.2.1- Contrainte normale en M</u>

La contrainte normale en un point M de la section S est le réel σ tel que : ....

<u>4.2.2- Contrainte tangentielle en M</u>

La contrainte tangentielle en un point M de la section S est le réel τ tel que : ....

Cette contrainte tangentielle peut se décomposer en deux composantes :

Sur $\vec{Y}$: .... et sur $\vec{Z}$: ....

<u>4.2.3- Unité</u>

L'unité du système international de contrainte est le Pascal : Pa

Souvent on utilise : ....

Relation entre contraintes et effort de cohésion

Ayant : $\overrightarrow{\mathbf{R}} = \int_S \overrightarrow{\mathbf{dF}}$ **et:** $\overrightarrow{\mathbf{M_G}} = \int_S \overrightarrow{\mathbf{GP}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{dF}}$ On montre que : ....

....

....

....