PRINCIPE FONDAMENTALE DE LA STATIQUE

CORRIGE

Exercice 1 : BOUCHE DE CLIMATISATION

Corrigé animé sur *http://s2i.chateaubriand.free.fr*

Exercice 2 : TABLE ÉLÉVATRICE

Corrigé animé sur *http://s2i.chateaubriand.free.fr*

Exercice 3 : SUSPENSION AUTOMOBILE

Question 1 : *Justifier, à l'aide du Principe Fondamental de la Statique appliqué à 3, que* $Y_{4\to3}=0$.

BAME sur 3 :

$AM_{4\to3}$

$AM_{pes\to3}$ *(négligée)*

$AM_{1\to3}$

Ces AM sont modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{4\to3}\right\}=\left\{\begin{matrix} X_{4\to3} & 0 \\ Y_{4\to3} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *hypothèse de problème plan* $(\vec{x},\vec{y})$

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to3}\right\}=\left\{\begin{matrix} X_{1\to3} & 0 \\ Y_{1\to3} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *hypothèse de problème plan* $(\vec{x},\vec{y})$

Théorème du moment statique en B et en projection sur $\vec{z}$: $\boxed{\overrightarrow{M_{B,\bar{3}\to3}}\cdot\vec{z}=0}$

Avec :

$$\overrightarrow{M_{B,\bar{3}\to3}}\cdot\vec{z}=\overrightarrow{M_{B,4\to3}}\cdot\vec{z}+\overrightarrow{M_{B,1\to3}}\cdot\vec{z}$$

Or :

$$\overrightarrow{M_{B,4\to3}}\cdot\vec{z}=(\underbrace{\overrightarrow{M_{C,4\to3}}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R_{4\to3}})\cdot\vec{z}=\left(b\cdot\vec{x}\wedge(X_{4\to3}\cdot\vec{x}+Y_{4\to3}\cdot\vec{y})\right)\cdot\vec{z}=\underline{b\cdot Y_{4\to3}}$$

$$\overrightarrow{M_{B,1\to3}}\cdot\vec{z}=\underline{0}$$

Donc :

$$b\cdot Y_{4\to3}=0\ \Rightarrow\ \boxed{Y_{4\to3}=0}$$

Question 2 : *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à l'ensemble E=4+6 au point D, les trois équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

BAME sur E=4+6 :

$AM_{3\to4}$

$AM_{pes\to E}$ *(négligée)*

$AM_{0\to6}$

$AM_{2\to4}$

Ces AM sont modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{3\to4}\right\}=-\left\{\mathrm{T}_{4\to3}\right\}=\left\{\begin{matrix} X_{3\to4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *Théorème des actions réciproques*

$$\left\{\mathrm{T}_{0\to 6}\right\} = \underset{L}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{0\to 6} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{2\to 4}\right\} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} X_{2\to 4} & 0 \\ Y_{2\to 4} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \textit{hypothèse de problème plan}(\vec{x},\vec{y})$$

Principe fondamental de la statique au point D: $\boxed{\left\{\mathrm{T}_{\bar{E}\to E}\right\} = \{0\}}$ ..

Avec :

$$\left\{\mathrm{T}_{3\to 4}\right\} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} X_{3\to 4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a\cdot X_{4\to 3} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

car $\overrightarrow{M_{D,3\to 4}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{C,3\to 4}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{R_{3\to 4}} = (c\cdot\vec{x} - a\cdot\vec{y}) \wedge X_{3\to 4}\cdot\vec{x} = a\cdot X_{3\to 4}\cdot\vec{z}$

$$\left\{\mathrm{T}_{0\to 6}\right\} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{0\to 6} & 0 \\ 0 & (c+e)\cdot F_{0\to 6} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

car $\overrightarrow{M_{D,0\to 6}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{L,0\to 6}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DL} \wedge \overrightarrow{R_{0\to 6}} = ((c+e)\cdot\vec{x} - (a+\mu)\cdot\vec{y}) \wedge F_{0\to 6}\cdot\vec{y} = (c+e)\cdot F_{0\to 6}\cdot\vec{z}$

donc :

$$\underset{D}{\begin{Bmatrix} X_{3\to 4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a\cdot X_{3\to 4} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \underset{D}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{0\to 6} & 0 \\ 0 & (c+e)\cdot F_{0\to 6} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \underset{D}{\begin{Bmatrix} X_{2\to 4} & 0 \\ Y_{2\to 4} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les trois équations scalaires :

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ X_{3\to 4} + X_{2\to 4} = 0 \\ (2)\ F_{0\to 6} + Y_{2\to 4} = 0 \\ (3)\ a\cdot X_{3\to 4} + (c+e)\cdot F_{0\to 6} = 0 \end{array}}$$

Question 3 : *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à 2 au point A, les trois équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

BAME sur 2 :

$AM_{4\to 2}$

$AM_{pes\to 2}$ *(négligée)*

$AM_{9\to 2}$

$AM_{1\to 2}$

Ces AM sont modélisables par :

$$\left\{\mathrm{T}_{4\to 2}\right\} = -\left\{\mathrm{T}_{2\to 4}\right\} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} -X_{2\to 4} & 0 \\ -Y_{2\to 4} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \textit{Théorème des actions réciproques}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{9\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -k\cdot(\Delta\ell) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{H\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left\{\mathrm{T}_{1\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *hypothèse de problème plan* $(\vec{x},\vec{y})$

Principe fondamental de la statique au point A: $\boxed{\left\{\mathrm{T}_{\bar{2}\to 2}\right\} = \{0\}}$:

Avec :

$$\left\{\mathrm{T}_{4\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} -X_{2\to 4} & 0 \\ -Y_{2\to 4} & 0 \\ 0 & -d\cdot Y_{2\to 4} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

car $\overrightarrow{M_{A,4\to 2}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{D,4\to 2}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{R_{4\to 2}} = d\cdot\vec{x} \wedge (-X_{2\to 4}\cdot\vec{x} - Y_{2\to 4}\cdot\vec{y}) = -d\cdot Y_{2\to 4}\cdot\vec{z}$

$$\left\{\mathrm{T}_{9\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -k\cdot(\Delta\ell) & 0 \\ 0 & -L\cdot k\cdot(\Delta\ell) \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

car $\overrightarrow{M_{A,9\to 2}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{H,9\to 2}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{R_{9\to 2}} = (L\cdot\vec{x} + h\cdot\vec{y}) \wedge -k\cdot(\Delta\ell)\cdot\vec{y} = -L\cdot k\cdot(\Delta\ell)\cdot\vec{z}$

donc :

$$\left\{\begin{matrix} -X_{2\to 4} & 0 \\ -Y_{2\to 4} & 0 \\ 0 & -d\cdot Y_{2\to 4} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -k\cdot(\Delta\ell) & 0 \\ 0 & -L\cdot k\cdot(\Delta\ell) \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les trois équations scalaires :

$$\boxed{\begin{array}{l} (4)\ \ -X_{2\to 4} + X_{1\to 2} = 0 \\ (5)\ \ -Y_{2\to 4} - k\cdot(\Delta\ell) + Y_{1\to 2} = 0 \\ (6)\ \ -d\cdot Y_{2\to 4} - L\cdot k\cdot(\Delta\ell) = 0 \end{array}}$$

Question 4 : *En déduire une relation entre* $F_{0\to 6}$, $\Delta\ell$ et *les dimensions du système. Faire l'application numérique.*

En utilisant les équations *(2)* et *(6) :*

$$\boxed{d\cdot F_{0\to 6} = L\cdot k\cdot(\Delta\ell)}$$

Question 5 : *Conclure quant au respect du critère de la fonction FS1.*

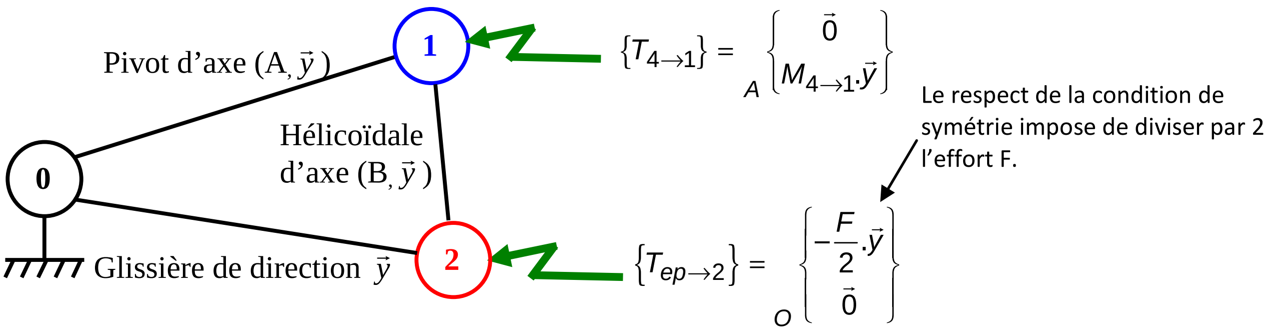
Application numérique :

$\boxed{\Delta\ell = 9cm} < 12cm$ le critère du CdCF est donc respecté.

Exercice 4 : MACHINE DE TRACTION

Question 1 : *Etablir le graphe de structure du système de la partie du système étudiée : solides 0, 1 et 2.*

Graphe de structure :



Question 2 : *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à 2 au point B, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

BAME sur 2 :

$AM_{0\to2}$

$AM_{pes\to2}$ *(négligée)*

$AM_{ep\to2}$

$AM_{1\to2}$

Ces AM sont modélisables par :

$$\{T_{0\to2}\} = \left\{\begin{matrix} X_{0\to2} & L_{P,0\to2} \\ 0 & M_{P,0\to2} \\ Z_{0\to2} & N_{P,0\to2} \end{matrix}\right\}_{\forall P\,(\vec x,\vec y,\vec z)}$$

$$\{T_{ep\to2}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{O\,(\vec x,\vec y,\vec z)}$$

$$\{T_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix} X_{1\to2} & L_{P,1\to2} \\ Y_{1\to2} & -Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ Z_{1\to2} & N_{P,1\to2} \end{matrix}\right\}_{\forall P\in(B,\vec y)\,(\vec x,\vec y,\vec z)} \qquad \textit{pas à droite}$$

Principe fondamental de la statique au point B: $\boxed{\{T_{\bar 2\to2}\} = \{0\}}$ ..

Avec :

$$\{T_{ep\to2}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -d\cdot\frac{F}{2} \end{matrix}\right\}_{B\,(\vec x,\vec y,\vec z)}$$

car $\overrightarrow{M_{B,ep\to2}} = \underbrace{\overrightarrow{M_{O,ep\to2}}}_{\vec 0} + \overrightarrow{BO}\wedge\overrightarrow{R_{ep\to2}} = D\cdot\vec x\wedge(-\frac{F}{2}\cdot\vec y) = -d\cdot\frac{F}{2}\cdot\vec z$

donc :

$$\left\{\begin{matrix} X_{0\to2} & L_{B,0\to2} \\ 0 & M_{B,0\to2} \\ Z_{0\to2} & N_{B,0\to2}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -d\cdot\frac{F}{2}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} X_{1\to2} & L_{B,1\to2} \\ Y_{1\to2} & -Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ Z_{1\to2} & N_{B,1\to2}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les six équations scalaires :

$$\boxed{\begin{matrix} (1)\ X_{0\to2}+X_{1\to2}=0 & (4)\ L_{B,0\to2}+L_{B,1\to2}=0 \\ (2)\ -\frac{F}{2}+Y_{1\to2}=0\ + & (5)\ M_{B,0\to2}-Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}=0 \\ (3)\ Z_{0\to2}+Z_{1\to2}=0 & (6)\ N_{B,0\to2}-d\cdot\frac{F}{2}+N_{B,1\to2}=0 \end{matrix}}$$

Question 3 : *Déterminer, en appliquant le Principe Fondamental de la Statique à 1 au point B, les six équations scalaires liant les composantes d'actions mécaniques et les dimensions du système.*

BAME sur 1 :

$AM_{0\to1}$

$AM_{pes\to1}$ *(négligée)*

$AM_{4\to1}$

$AM_{2\to1}$

Ces AM sont modélisables par :

$$\left\{T_{0\to1}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{0\to1} & L_{P,0\to1} \\ Y_{0\to1} & 0 \\ Z_{0\to1} & N_{P,0\to1}\end{matrix}\right\}_{\forall P\in(A,\vec{y})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\{T_{4\to1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{4\to1} \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\forall P\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *un torseur couple est invariant*

$$\left\{T_{1\to2}\right\} = -\left\{T_{1\to2}\right\} = \left\{\begin{matrix} -X_{1\to2} & -L_{P,1\to2} \\ -Y_{1\to2} & Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ -Z_{1\to2} & -N_{P,1\to2}\end{matrix}\right\}_{\forall P\in(B,\vec{y})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ *Théorème des actions réciproques*

Principe fondamental de la statique au point B: $\boxed{\left\{T_{\bar{1}\to1}\right\}=\{0\}}$

donc :

$$\left\{\begin{matrix} X_{0\to1} & L_{B,0\to1} \\ Y_{0\to1} & 0 \\ Z_{0\to1} & N_{B,0\to1}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{4\to1} \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left\{\begin{matrix} -X_{1\to2} & -L_{B,1\to2} \\ -Y_{1\to2} & Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi} \\ -Z_{1\to2} & -N_{B,1\to2}\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce qui permet d'obtenir les six équations scalaires :

$$\boxed{\begin{matrix} (7)\ X_{0\to1}-X_{1\to2}=0 & (10)\ L_{B,0\to1}-L_{B,1\to2}=0 \\ (8)\ Y_{0\to1}-Y_{1\to2}=0\ + & (11)\ M_{4\to1}+Y_{1\to2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}=0 \\ (9)\ Z_{0\to1}-Z_{1\to2}=0 & (12)\ N_{B,0\to1}-N_{B,1\to2}=0 \end{matrix}}$$

Question 4 : *En déduire une relation entre F , $M_{4\to1}$ et les dimensions du système.*

En utilisant les équations *(2)* et *(11) :*

$$\boxed{M_{4\to1}+\frac{F}{2}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}=0}$$

Question 5 : *Conclure quant au respect du critère de la fonction FS1.*

$$|C|=2\cdot|M_{4\to1}|=\left|F\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}\right|\Rightarrow\boxed{|F|=41888\,N}>20000\,N$$

Le critère du CdCF est donc respecté.