Corrigé Exercice 1 : DEMI-CIRCONFÉRENCE.

Question 1 : *Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur la demi-circonférence.*

$\overrightarrow{R_{pes\to1}} = m.\vec{g} = -\rho.L.g.\vec{y} = -\rho.\pi.R.g.\vec{y}$ (car solide homogène $\rho(Q) = \rho = cste$)

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = \int_l \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{dF_{pes\to1}(Q)}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = \int_l R.\vec{u} \wedge (\rho.\vec{g}.dl)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = \int_l R.\vec{u} \wedge (-\rho.g.\vec{y}.dl)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -R.\rho.g.\int_l \vec{u} \wedge \vec{y}.dl$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -R.\rho.g.\int_l \sin(\frac{\pi}{2} - \theta).\vec{z}.dl$$

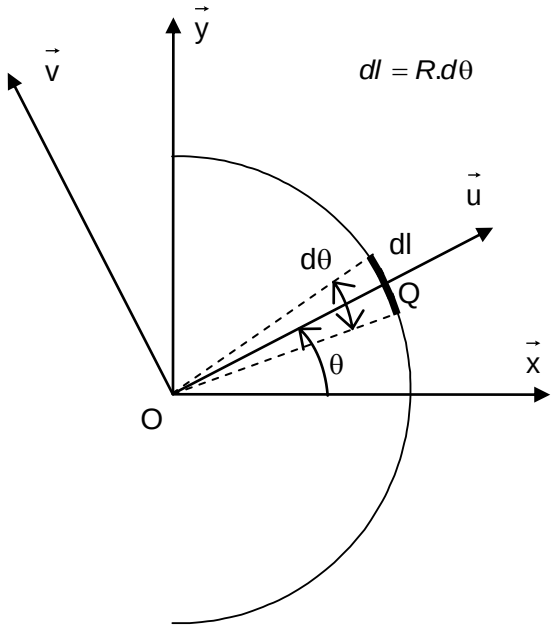
$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -R.\rho.g.\vec{z}.\int_l \cos\theta.dl$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -R.\rho.g.\vec{z}.\int_\theta \cos\theta.R.d\theta$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -R^2.\rho.g.\vec{z}.\left[\sin\theta\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to1}} = -2.R^2.\rho.g.\vec{z}$$

$$\boxed{\left\{T_{pes\to1}\right\} = \begin{Bmatrix} -\rho.\pi.R.g.\vec{y} \\ -2.R^2.\rho.g.\vec{z} \end{Bmatrix}_O}$$



Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène pour la 1ère expression à une résultante (N), pour la 2ème expression à un moment (N.m).

Question 2 : *Déterminer la position du centre de gravité G.*

$$L.\overrightarrow{OG} = \int_l \overrightarrow{OQ}.dl$$

$$\pi.R.\overrightarrow{OG} = \int_\theta R.\vec{u}.R.d\theta$$

$$\pi.\overrightarrow{OG} = R.\int_\theta \vec{u}.d\theta$$

$$\pi.\overrightarrow{OG} = R.\int_\theta (\cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\vec{y}).d\theta$$

$$\pi.\overrightarrow{OG} = R.\left(\left[\sin\theta\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.\vec{x} + \left[-\cos\theta\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.\vec{y}\right)$$

$$\pi.\overrightarrow{OG} = R.2.\vec{x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{2.R}{\pi}.\vec{x}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

Corrigé Exercice 2 : DEMI-DISQUE.

Question 1 : *Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le demi-disque.*

$\overrightarrow{R_{pes\to 1}} = m.\vec{g} = -\rho.S.g.\vec{y} = -\rho.\frac{\pi.R^2}{2}.g.\vec{y}$ (car solide homogène $\rho(Q) = \rho = cste$)

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_s \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{dF_{pes\to 1}(Q)}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_s r.\vec{u} \wedge (\rho.\vec{g}.ds)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_s r.\vec{u} \wedge (-\rho.g.\vec{y}.ds)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\int_s r.\sin(\frac{\pi}{2} - \theta).\vec{z}.ds$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\vec{z}.\int_s r.\cos\theta.ds$$

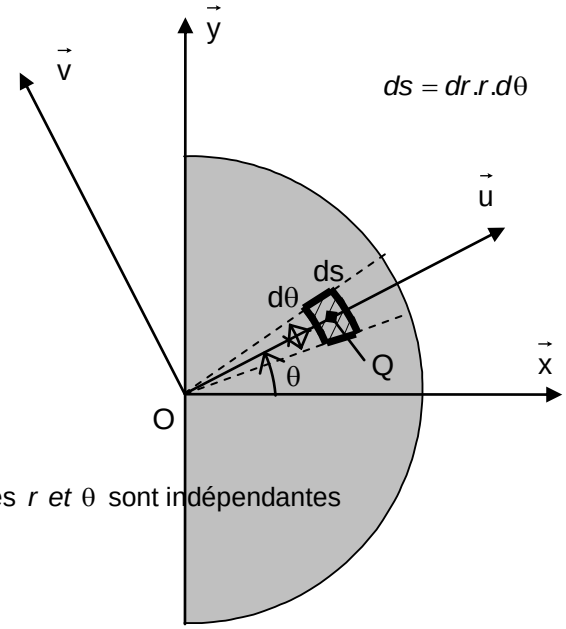
$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\vec{z}.\iint_{r,\theta} r.\cos\theta.dr.r.d\theta$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\vec{z}.\left(\int_r r^2.dr\right).\left(\int_\theta \cos\theta.d\theta\right)$$ car les 2 variables r *et* θ sont indépendantes

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\vec{z}.\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R.[\sin\theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\vec{z}.\frac{R^3}{3}.2$$

$$\boxed{\left\{T_{pes\to 1}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} -\rho.\frac{\pi.R^2}{2}.g.\vec{y} \\ -\frac{2.R^3}{3}.\rho.g.\vec{z} \end{Bmatrix}}$$



Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène
pour la 1ère expression à une résultante (N),
pour la 2ème expression à un moment (N.m).

Question 2 : *Déterminer la position du centre de gravité G.*

$$S.\overrightarrow{OG} = \int_s \overrightarrow{OQ}.ds$$

$$\frac{\pi.R^2}{2}.\overrightarrow{OG} = \iint_{r,\theta} r.\vec{u}.dr.r.d\theta$$

$$\frac{\pi.R^2}{2}.\overrightarrow{OG} = \left(\int_r r^2.dr\right).\left(\int_\theta (\cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\vec{y}).d\theta\right)$$ car les 2 variables r *et* θ sont indépendantes

$$\frac{\pi.R^2}{2}.\overrightarrow{OG} = \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\right).\left([\sin\theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.\vec{x} + [-\cos\theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.\vec{y}\right)$$

$$\frac{\pi.R^2}{2}.\overrightarrow{OG} = \frac{R^3}{3}.2.\vec{x}$$

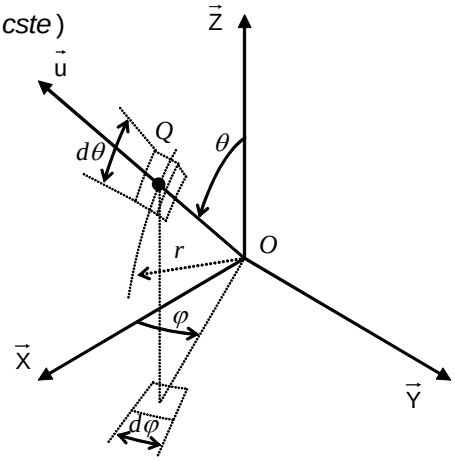
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{4.R}{3.\pi}.\vec{x}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

Corrigé Exercice 3 : DEMI-SPHÈRE.

Question 1 : *Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur la demi-sphère.*

$$\overrightarrow{R_{pes\to 1}} = m.\vec{g} = -\rho.V.g.\vec{y} = -\rho.\frac{4.\pi.R^3}{2.3}.g.\vec{y}$$ (car solide homogène $\rho(Q) = \rho = cste$)



$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_v \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{dF_{pes\to 1}(Q)}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_v r.\vec{u} \wedge (\rho.\vec{g}.dv)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = \int_v r.\vec{u} \wedge (-\rho.g.\vec{y}.dv)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\iiint_{r,\theta,\phi} r.\left(\cos\theta.\vec{z} + \sin\theta.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right) \wedge \left(\vec{y}.r^2.\sin\theta.d\theta.d\phi.dr\right)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\iiint_{r,\theta,\phi} (-\cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\cos\phi.\vec{z}).r^3.\sin\theta.d\theta.d\phi.dr$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\left(\int_r r^3.dr\right).\left(\iint_{\theta,\phi} (-\cos\theta.\sin\theta.\vec{x} + \sin^2\theta.\cos\phi.\vec{z}).d\theta.d\phi\right)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right).\left(\iint_{\theta,\phi} (-\frac{\sin 2\theta}{2}.\vec{x} + \frac{1-\cos 2\theta}{2}.\cos\phi.\vec{z}).d\theta.d\phi\right)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\frac{R^4}{4}.\int_\phi\left(\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^\pi.\vec{x} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi.\cos\phi.\vec{z}\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\frac{R^4}{4}.\int_\phi\left(\frac{\pi}{2}.\cos\phi.\vec{z}\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\frac{\pi.R^4}{8}.[\sin\phi]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}.\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to 1}} = -\rho.g.\frac{\pi.R^4}{4}.\vec{z}$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\cos a.\sin a = \frac{\sin 2a}{2}$$

Attention aux bornes d'intégration :
r varie entre 0 et R
θ varie entre 0 et π
ϕ varie entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

$$\left\{T_{pes\to 1}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} -\rho.\frac{2.\pi.R^3}{3}.g.\vec{y} \\ -\rho.g.\frac{\pi.R^4}{4}.\vec{z} \end{matrix}\right\}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène pour la 1ère expression à une résultante (N), pour la 2ème expression à un moment (N.m).

Question 2 : *Déterminer la position du centre de gravité G.*

$$V.\overrightarrow{OG} = \int_V \overrightarrow{OQ}.dv$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \iiint_{r,\theta,\varphi} r.\vec{u}.r^2.\sin\theta.d\theta.d\phi.dr$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \left(\int_r r^3.dr\right).\left(\iint_{\theta,\phi}\left(\cos\theta.\vec{z} + \sin\theta.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right).\sin\theta.d\theta.d\phi\right)$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right).\left(\iint_{\theta,\phi}\left(\cos\theta.\sin\theta.\vec{z} + \sin^2\theta.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right).d\theta.d\phi\right)$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \frac{R^4}{4}.\iint_{\theta,\phi}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}.\vec{z} + \frac{1-\cos 2\theta}{2}.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right).d\theta.d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8.\pi}.\int_\phi\left(\left[\frac{-\cos 2\theta}{4}\right]_0^\pi.\vec{z} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8.\pi}.\int_\phi\left(\frac{\pi}{2}.(\cos\phi.\vec{x} + \sin\phi.\vec{y})\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{16}.\left[\sin\phi.\vec{x} - \cos\phi.\vec{y}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{16}.2.\vec{x}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8}.\vec{x}}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

Corrigé Exercice 4 : BARRAGE POIDS.

Question 1 : *Donner la surface S d'une section du barrage. Retrouver ce résultat en intégrant un petit élément de surface :* $S = \int_s ds$.

Surface du triangle $S = \frac{a \cdot h}{2}$

On peut retrouver ce résultat par :

$$S = \int_s ds$$

$$S = \iint_{x,z} dx.dz$$

$$S = \int_x dx \cdot \int_z dz$$

$$S = [x]_0^a . [z]_0^h$$

$$S = a \cdot h \quad (ce \quad qui \quad est \quad complètement \quad faux)$$

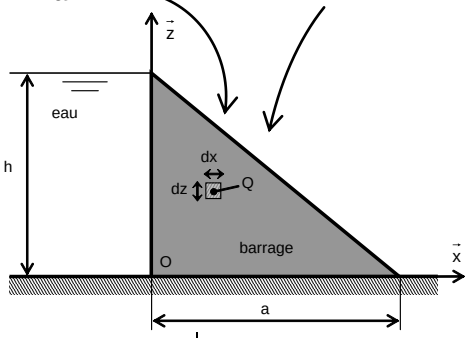
Attention, ici x et z ne sont pas indépendants. Voyons 2 méthodes pour calculer cette intégrale.

Pour un x fixé $\Rightarrow$ z varie de 0 à $\frac{-h}{a}.x + h$

Pour un z fixé $\Rightarrow$ x varie de 0 à $a - \frac{a}{h}.z$

équation de la droite enveloppe

$z = \frac{-h}{a}.x + h$ ou $x = \frac{a}{-h}.(z - h) = a - \frac{a}{h}.z$



Donc :

$$S = \iint_{x,z} dx.dz$$

$$S = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{-h}{a}.x+h} dz \right).dx$$

$$S = \int_0^a \left([z]_0^{\frac{-h}{a}.x+h} \right).dx$$

$$S = \int_0^a \left(\frac{-h}{a}.x + h \right).dx$$

$$S = \left[\frac{-h}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + h \cdot x \right]_0^a$$

$$S = \frac{-h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + h \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S = \frac{h \cdot a}{2}}$$

$$S = \iint_{x,z} dx.dz$$

$$S = \int_0^h \left(\int_0^{a-\frac{a}{h}.z} dx \right).dz$$

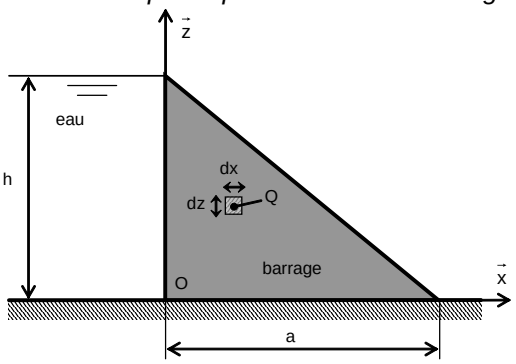
$$S = \int_0^h \left([x]_0^{a-\frac{a}{h}.z} \right).dz$$

$$S = \int_0^h \left(a - \frac{a}{h}.z \right).dz$$

$$S = \left[a \cdot z - \frac{a}{h}.\frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$S = a \cdot h - \frac{a}{h}.\frac{h^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S = \frac{a \cdot h}{2}}$$

Question 2 : *Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le barrage.*



$$\overrightarrow{R_{pes\to barrage}} = m.\vec{g} = -m.g.\vec{z} = -\psi.\frac{a.h}{2}.l.g.\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \int_v \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{dF_{pes\to barrage}(Q)}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \int_v (x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge (-\psi.g.\vec{z}.dv)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = -\psi.g.\int_v (-x.\vec{y}. + y.\vec{x}).dv$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.\vec{y}.\int_v x.dv$$

Comme O milieu du barrage, par symétrie, il n'existera pas de moment suivant $\vec{x}$ (donc cela ne sert à rien de calculer le moment suivant $\vec{x}$ qui sera nul).

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.\vec{y}.\iiint_{x,y,z} x.dx.dy.dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.\vec{y}.\left(\int_y dy\right).\left(\iint_{x,z} x.dx.dz\right)$$ car y indépendant des 2 autres variables.

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.\vec{y}.\left([y]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\right).\left(\iint_{x,z} x.dx.dz\right)$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\iint_{x,z} x.dx.dz$$

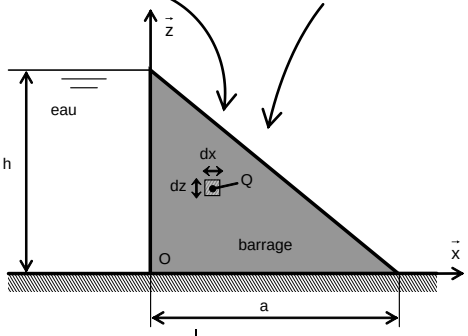
Attention, ici x et z ne sont pas indépendants. Voyons 2 méthodes pour calculer cette intégrale.

Pour un x fixé $\Rightarrow$ z varie de 0 à $\frac{-h}{a}.x + h$

Pour un z fixé $\Rightarrow$ x varie de 0 à $a - \frac{a}{h}.z$

équation de la droite enveloppe

$z = \frac{-h}{a}.x + h$ ou $x = \frac{a}{-h}.(z-h) = a - \frac{a}{h}.z$



Donc :

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\iint_{x,z} x.dx.dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^a x.\left(\int_0^{\frac{-h}{a}.x+h} dz\right).dx$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^a x.\left([z]_0^{\frac{-h}{a}.x+h}\right).dx$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^a x.(\frac{-h}{a}.x + h).dx$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\iint_{x,z} x.dx.dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^h \left(\int_0^{a-\frac{a}{h}.z} x.dx\right).dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^h \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-\frac{a}{h}.z}\right).dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\int_0^h \frac{1}{2}.(a - \frac{a}{h}.z)^2.dz$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\left[\frac{-h}{a}.\frac{x^3}{3}+h.\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.(\frac{-h}{a}.\frac{a^3}{3}+h.\frac{a^2}{2})$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.h.\frac{a^2}{6}.\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\frac{1}{2}.\frac{-h}{3.a}\left[(a-\frac{a}{h}.z)^3\right]_0^h$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.\vec{y}.\frac{-h}{6.a}\left[(a-\frac{a}{h}.h)^3-(a)^3\right]$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes\to barrage}} = \psi.g.l.h.\frac{a^2}{6}.\vec{y}$$

Donc $\boxed{\left\{T_{pes\to barrage}\right\} = \begin{Bmatrix} -\psi.g.\frac{a.h}{2}.l.\vec{z} \\ \psi.g.l.h.\frac{a^2}{6}.\vec{y} \end{Bmatrix}_O}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène pour la 1ère expression à une résultante (N), pour la 2ème expression à un moment (N.m).

Question 3 : *Déterminer la position du centre de gravité G.*

$$V.\overrightarrow{OG} = \int_v \overrightarrow{OQ}.dv$$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iiint_{x,y,z} (x.\vec{x}+y.\vec{y}+z.\vec{z}).dx.dy.dz$$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iint_{x,z}\left[x.y.\vec{x}+\frac{y^2}{2}.\vec{y}+z.y.\vec{z}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx.dz$$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iint_{x,z}\left(x.l.\vec{x}+z.l.\vec{z}\right).dx.dz$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \int_x\left[x.z.\vec{x}+\frac{z^2}{2}.\vec{z}\right]_0^{\frac{-h}{a}.x+h} dx$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \int_x\left(x.(\frac{-h}{a}.x+h).\vec{x}+\frac{(\frac{-h}{a}.x+h)^2}{2}.\vec{z}\right).dx$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \left[(\frac{-h}{a}.\frac{x^3}{3}+h.\frac{x^2}{2}).\vec{x}+\frac{-a}{3.h}.\frac{(\frac{-h}{a}.x+h)^3}{2}.\vec{z}\right]_0^a$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = (\frac{-h}{a}.\frac{a^3}{3}+h.\frac{a^2}{2}).\vec{x}-\frac{-a}{3.h}.\frac{(h)^3}{2}.\vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{a}{3}.\vec{x}+\frac{h}{3}.\vec{z}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.