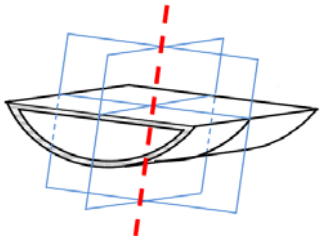
MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

CORRIGE

Exercice 1 : BARRAGE DE LA TAMISE

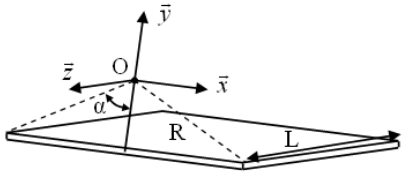
Question 1 : *Identifier les éléments de symétrie de la porte. En déduire la forme du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre de gravité de la porte.*

Le solide possède 2 plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie.



Donc : $\overrightarrow{OG} = \boxed{y_G \cdot \vec{y} - \frac{L}{2} \cdot \vec{z}}$

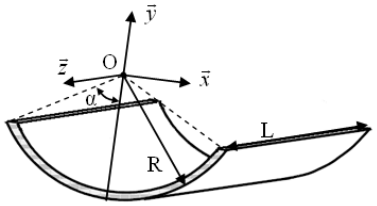
Question 2 : *Identifier les éléments de symétrie de chacun de ces volumes. En déduire la forme des vecteurs position $\overrightarrow{OG_1}$ et $\overrightarrow{OG_2}$ des centres de gravité de chacun de ces volumes.*



Le solide possède 3 plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur au point d'intersection des 3 plans de symétrie.

$$\overrightarrow{OG_1} = -\left((R \cdot \cos\alpha) + \frac{e}{2}\right) \cdot \vec{y} - \frac{L}{2} \cdot \vec{z}$$

$$= \boxed{-R \cdot \cos\alpha \cdot \vec{y} - \frac{L}{2} \cdot \vec{z}} \ (e << R)$$



Le solide possède 2 plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie.

$$\overrightarrow{OG_2} = \boxed{y_{G_2} \cdot \vec{y} - \frac{L}{2} \cdot \vec{z}}$$

Question 3 : *Déterminer entièrement l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OG_2}$ du centre de gravité du volume 2.*

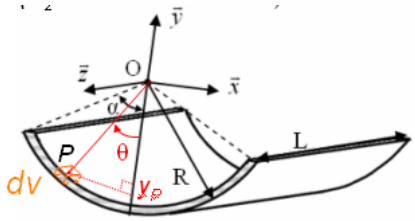
$$y_{G_2} = \overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{y} = \frac{1}{m_2} \int_{V_2} \overrightarrow{OP} \cdot dm \cdot \vec{y} = \frac{1}{m_2} \int_{V_2} \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{y}}_{y_P} \cdot \rho \cdot dv$$

On a :

$$= \frac{1}{\rho \cdot L \cdot R \cdot 2 \cdot \alpha \cdot e} \int_{V_2} -R \cdot \cos\theta \cdot \rho \cdot e \cdot R \cdot d\theta \cdot dz$$

$$= -\frac{R}{L \cdot 2 \cdot \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \int_{-L}^{0} dz = -\frac{R}{L \cdot 2 \cdot \alpha} [\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha} \cdot [z]_{-L}^{0}$$

$$= -\frac{R}{L \cdot 2 \cdot \alpha} \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot L = \boxed{-\frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}}$$



$y_P = -R \cdot \cos\theta \quad (e << R)$

$dv = e \cdot R \cdot d\theta \cdot dz$

$m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot L \cdot 2 \cdot R \cdot \alpha \cdot e$

Question 4 : *En déduire la position du centre de gravité G de la porte.*

G est le barycentre des masses des solides 1 et 2 : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$

On ne cherche a déterminer que la coordonnée y_G : $y_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} = \frac{1}{m}(m_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} \cdot \vec{y} + m_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} \cdot \vec{y})$

$$y_G = \frac{1}{\underbrace{\rho \cdot 2 \cdot R \cdot L \cdot e(\sin\alpha + \alpha)}_{m=m_1+m_2}} (-\overbrace{\rho \cdot 2 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot L \cdot e}^{m_1} \cdot R \cdot \cos\alpha - \overbrace{\rho \cdot R \cdot 2 \cdot \alpha \cdot L \cdot e}^{m_2} \cdot \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha})$$

$$\Rightarrow \boxed{y_G = -\frac{R \cdot \sin\alpha \cdot (\cos\alpha + 1)}{(\alpha + \sin\alpha)}}$$

Question 5 : *Donner, lorsque la porte est en position verticale, l'expression du torseur (au centre de gravité G) de l'action mécanique de la pesanteur sur la porte. En déduire l'expression de ce torseur au point O. Faire l'application numérique.*

$$\{T_{pes \to porte}\} = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\overrightarrow{M_{O,pes \to porte}} = \cancel{\overrightarrow{M_{G,pes \to porte}}} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R_{pes \to porte}}$$

$$= (y_G \cdot \vec{y} - \frac{L}{2} \cdot \vec{z}) \wedge (-m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) = -y_G \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} - \frac{L}{2} \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{x_0}$$

(lorsque la porte est en position verticale $\vec{z} = \overrightarrow{z_0}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{x_0}$)

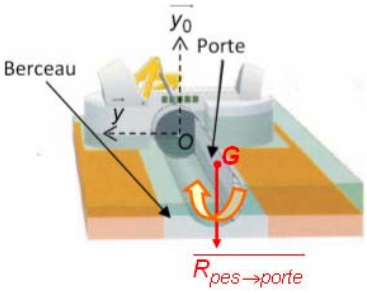
Donc :

$$\boxed{\{T_{pes \to porte}\} = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \\ -y_G \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} - \frac{L}{2} \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix}_O}$$

Application numérique : $\{T_{pes \to porte}\} = \begin{Bmatrix} -1{,}05 \cdot 10^7 \cdot \overrightarrow{y_0} \\ 8{,}86 \cdot 10^7 \cdot \overrightarrow{z_0} - 3{,}05 \cdot 10^8 \overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix}_O (N \text{ et } N \cdot m)$

Question 6 : *Indiquer à quoi correspond la composante sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$ du moment de ce torseur.*

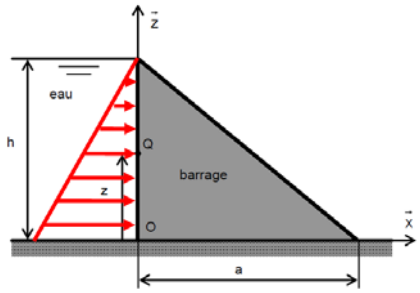
Ce terme représente la capacité qu'a l'action mécanique de la pesanteur à faire tourner la porte autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$.



Exercice 2 : BARRAGE POIDS

Question 1 : *Donner l'expression de la force élémentaire de pression de l'eau sur le barrage en un point Q.*

Point de vue local :



Sur chaque élément de surface $ds = dy \cdot dz$ situé autour d'un point Q de la paroi s'exerce un effort élémentaire :

$$d\overrightarrow{F_{eau \to barrage}(Q)} = p(Q) \cdot ds \cdot \vec{x}$$

Les lois de l'hydrostatique permettent d'écrire :

$$p(Q) = \rho_{eau} \cdot g \cdot (h - z)$$

On a donc : $\boxed{d\overrightarrow{F_{eau \to barrage}(Q)} = \rho_{eau} \cdot g \cdot (h - z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{x}}$

Question 2 : *Déterminer les coordonnées du point $M(0,0,z_M)$ ou le moment résultant de l'action mécanique de l'eau sur le barrage est nul. Donner, en ce point, l'expression du torseur de cette action mécanique.*

On cherche le point $M(0,0,z_M)$ pour lequel : $\overrightarrow{M_{M,eau\to barrage}} = \vec{0}$

Or :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{M,eau\to barrage}} &= \int_S \overrightarrow{MQ} \wedge d\overrightarrow{F_{eau\to barrage}(Q)} \\
&= \int_S (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ}) \wedge \rho_{eau} \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{x} \\
&= \int_S \left((-z_M \cdot \vec{z}) + (y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \right) \wedge \rho_{eau} \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{x} \\
&= \int_S -y \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{z} + \int_S (z - z_M) \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{y} \\
&= -\rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y \cdot dy \cdot \int_0^h (h-z) \cdot dz + \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{y} \int_0^h (z - z_M) \cdot (h-z) \cdot dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cdot dy \\
&= \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{z} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cdot \left[h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h + \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \left[(h + z_M) \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - z \cdot z_M \cdot h \right]_0^h \cdot [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= 0 + \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \left(\frac{h^3}{6} - \frac{z_M \cdot h^2}{2} \right) \cdot L
\end{aligned}$$

Pour que $\overrightarrow{M_{M,eau\to barrage}} = \vec{0}$, il faut donc que $z_M = \frac{h}{3}$

Au point M, le torseur de l'action mécanique de l'eau s'écrit :

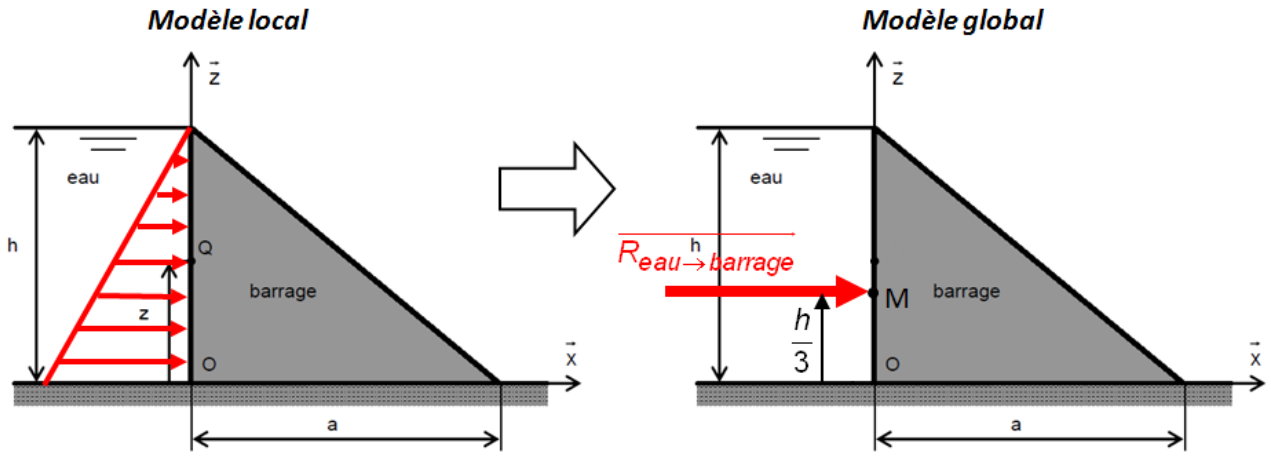
$$\left\{ T_{eau\to barrage} \right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{eau\to barrage}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_{eau\to barrage}} &= \int_S d\overrightarrow{F_{eau\to barrage}(Q)} = \int_S \rho_{eau} \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{x} \\
&= \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \int_0^h (h-z) \cdot dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy = \rho_{eau} \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \left[h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \cdot [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \rho_{eau} \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \vec{x}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\left\{ T_{eau\to barrage} \right\} = \begin{Bmatrix} \rho_{eau} \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M}$$



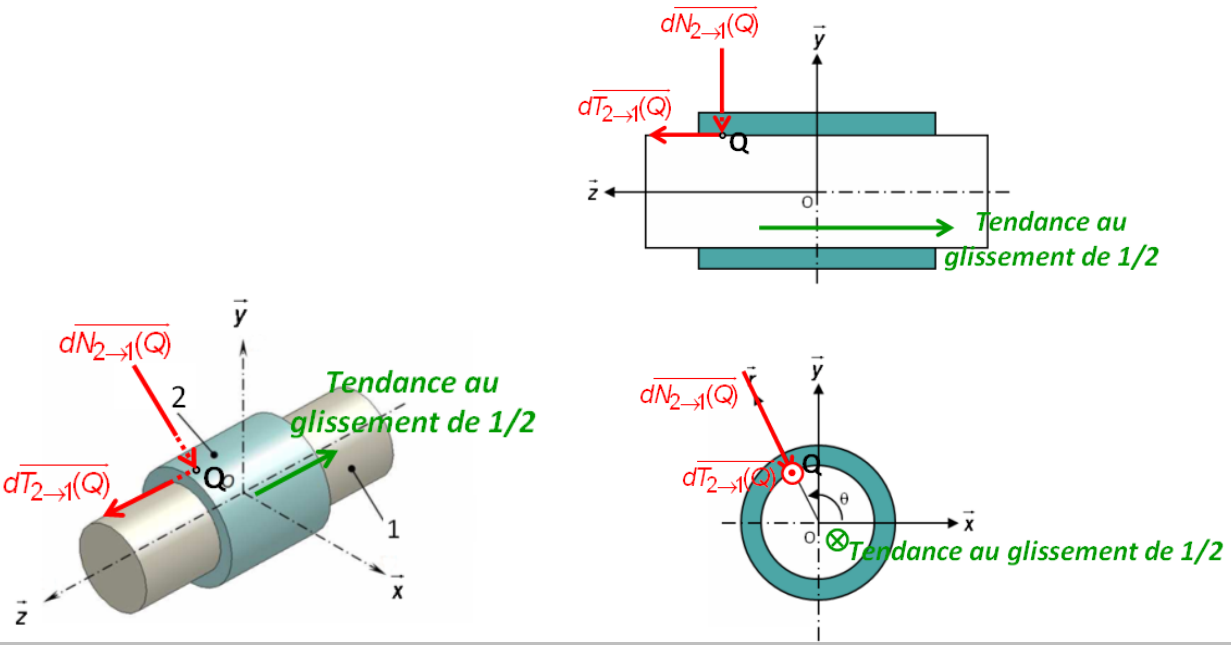
Question 3 : *Vérifier le critère de la fonction FS4.*

$$\left\|\overrightarrow{R_{eau\to barrage}}\right\| = \rho_{eau}\cdot g\cdot L\cdot\frac{h^2}{2} = \boxed{245\cdot10^6\,N} < 300\cdot10^6\,N$$

Le critère de la fonction FS4 est donc respecté

Exercice 3 : ASSEMBLAGE PAR FRETTAGE

Question 1 : *Représenter sur deux schémas plans ou un schéma en perspective, la force élémentaire de pression $d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)}$ et la force élémentaire tangentielle $d\overrightarrow{T_{2\to1}(Q)}$ en un point Q de la surface de contact.*



Question 2 : *Donner l'expression de la force élémentaire $d\overrightarrow{F_{2\to1}(Q)}$.*

$$d\overrightarrow{F_{2\to1}(Q)} = d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)} + d\overrightarrow{T_{2\to1}(Q)}$$

On est en phase d'adhérence, mais on fait l'hypothèse que l'on est à la limite du glissement, on a donc :

$$\left\|d\overrightarrow{T_{2\to1}(Q)}\right\| = \mu\cdot\left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)}\right\| \text{ avec } \left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)}\right\| = p\cdot ds$$

Or : $ds = R\cdot d\theta\cdot dz$

D'où :

$$\boxed{d\overrightarrow{F_{2\to1}(Q)} = -p\cdot R\cdot d\theta\cdot dz\cdot\vec{r} + \mu\cdot p\cdot R\cdot d\theta\cdot dz\cdot\vec{z}}$$

Question 3 : *Déterminer, à la limite du glissement, l'effort axial maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.*

A la limite du glissement, la résultante de l'action mécanique de contact de 2 1 «s'équilibre » avec l'effort maximal transmissible.

$$\overrightarrow{R_{2\to1}} = \int_s \overrightarrow{dF_{2\to1}(Q)} = -p\cdot R \int_{S_{contact}} d\theta\cdot dz\cdot\vec{r} - \mu\cdot d\theta\cdot dz\cdot\vec{z}$$

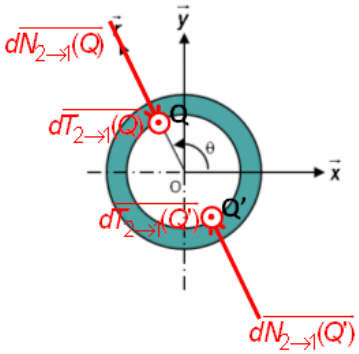
L'axe $\vec{r} = \cos\theta\cdot\vec{x} + \sin\theta\cdot\vec{y}$ « varie » avec θ, il faut donc l'intégrer.

$$\overrightarrow{R_{2\to1}} = -p\cdot R\iint_{z,\theta} d\theta\cdot dz\cdot(\cos\theta\cdot\vec{x} + \sin\theta\cdot\vec{y}) - \mu\cdot d\theta\cdot dz\cdot\vec{z}$$

$$= -p\cdot R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\int_0^{2\pi}(\cos\theta\cdot\vec{x} + \sin\theta\cdot\vec{y})\cdot d\theta - \mu\cdot d\theta\cdot\vec{z}$$

$$= -p\cdot R\cdot[z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\cdot\left([\sin\theta]_0^{2\pi}\cdot\vec{x} - [\cos\theta]_0^{2\pi}\cdot\vec{y} - \mu\cdot[\theta]_0^{2\pi}\cdot\vec{z}\right)$$

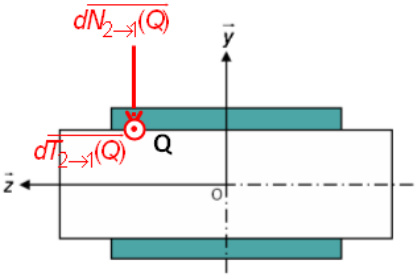
$$= \boxed{p\cdot R\cdot L\cdot\mu\cdot 2\cdot\pi\cdot\vec{z}}$$

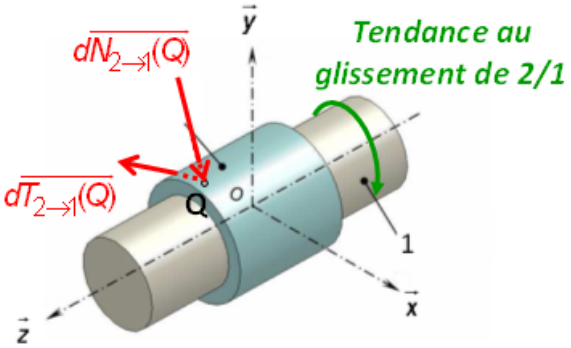


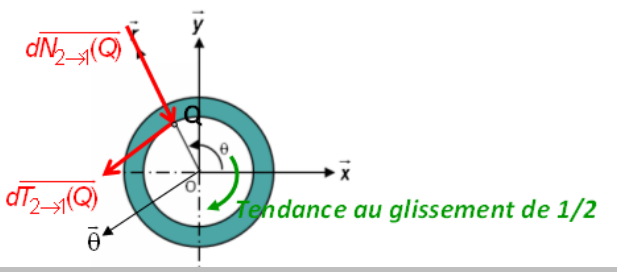
On aurait pu remarquer que tous les forces élémentaires normales s'annulaient entre elles 2 à 2 et ne prendre en compte que les forces élémentaires tangentielles dans le calcul de la résultante.

$$\overrightarrow{R_{2\to1}} = \int_s \overrightarrow{dT_{2\to1}(Q)} = p\cdot R\cdot\mu\cdot\int_0^{2\pi} d\theta\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\cdot\vec{z} = \boxed{p\cdot R\cdot L\cdot\mu\cdot 2\cdot\pi\cdot\vec{z}}$$

Question 4 : *Représenter sur deux schémas plans ou un schéma en perspective, la force élémentaire de pression $\overrightarrow{dN_{2\to1}(Q)}$ et la force élémentaire tangentielle $\overrightarrow{dT_{2\to1}(Q)}$ en un point Q de la surface de contact.*







Question 5 : *Donner l'expression de la force élémentaire $\overrightarrow{dF_{2\to1}(Q)}$.*

$$\overrightarrow{dF_{2\to1}(Q)} = \overrightarrow{dN_{2\to1}(Q)} + \overrightarrow{dT_{2\to1}(Q)}$$

On est en phase d'adhérence, mais on fait l'hypothèse que l'on est à la limite du glissement, on a donc :

$\left\|d\overrightarrow{T_{2\to1}(Q)}\right\| = \mu \cdot \left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)}\right\|$ avec $\left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(Q)}\right\| = p \cdot ds$

Or : $ds = R \cdot d\theta \cdot dz$

D'où :

$$\boxed{d\overrightarrow{F_{2\to1}(Q)} = -p \cdot ds \cdot \vec{r} + \mu \cdot p \cdot ds \cdot \vec{\theta}}$$

Question 6 : *Déterminer, à la limite du glissement, la couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.*

A la limite du glissement, la moment résultant de l'action mécanique de contact de 2 1 «s'équilibre » avec le couple maximal transmissible.

$$\overrightarrow{M_{O,2\to1}} = \int_{S_{contact}} \overrightarrow{OQ} \wedge d\overrightarrow{F_{2\to1}(Q)} = \int_{S_{contact}} R \cdot \vec{r} \wedge (-p \cdot ds \cdot \vec{r} + \mu \cdot p \cdot ds \cdot \vec{\theta})$$

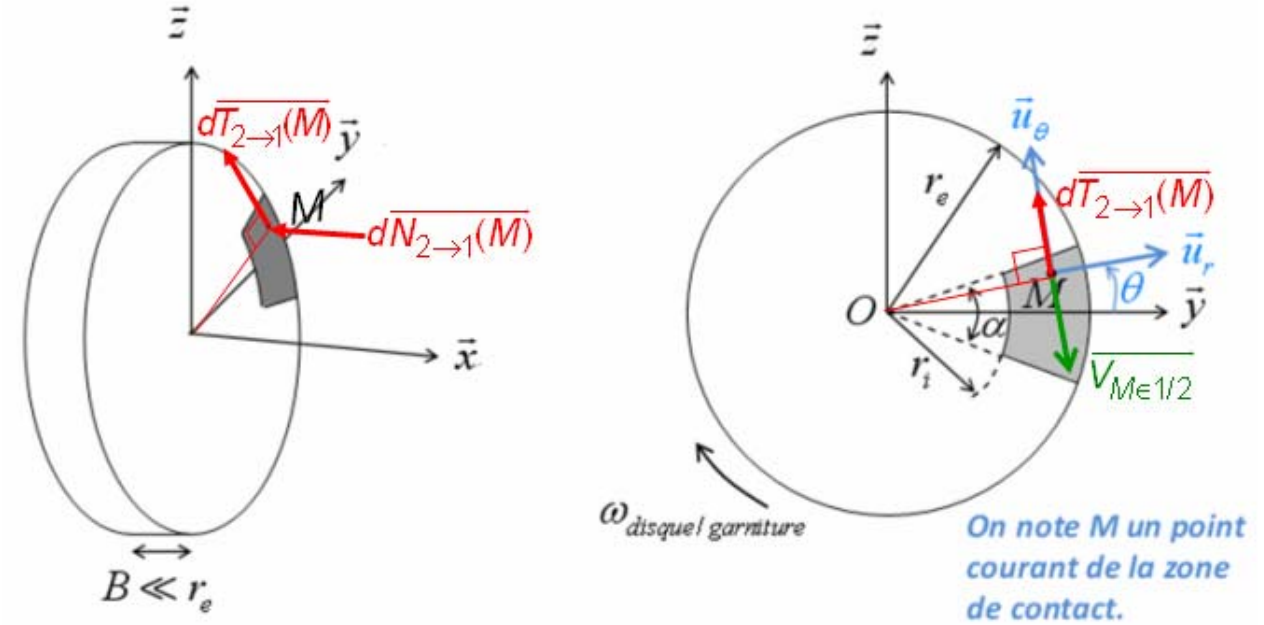
$$= \int_{S_{contact}} R \cdot \mu \cdot p \cdot ds \cdot \vec{z} = R^2 \cdot \mu \cdot p \iint_{z,\theta} d\theta \cdot dz \cdot \vec{z}$$

$$= R^2 \cdot \mu \cdot p \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \cdot \vec{z} = R^2 \cdot \mu \cdot p \cdot [z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \vec{z}$$

$$= \boxed{R^2 \cdot \mu \cdot p \cdot L \cdot 2 \cdot \pi \cdot \vec{z}}$$

Exercice 4 : FREIN D'URGENCE SUR UNE ÉOLIENNE

Question 1 : *Représenter sur les schémas du disque ci-dessus, la force élémentaire de pression $d\overrightarrow{N_{2\to1}(M)}$ et la force élémentaire tangentielle $d\overrightarrow{T_{2\to1}(M)}$ en un point M de la surface de contact.*



Question 2 : *Donner l'expression de la force élémentaire $d\overrightarrow{F_{1\to2}(Q)}$ en fonction de p, f et ds.*

$d\overrightarrow{F_{2\to1}(M)} = d\overrightarrow{N_{2\to1}(M)} + d\overrightarrow{T_{2\to1}(M)}$

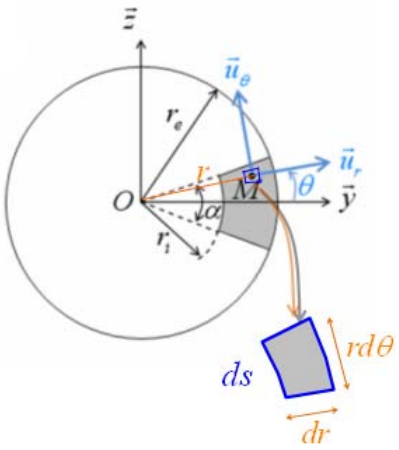
On est en phase de glissement avec frottement, on a donc :

$\left\|d\overrightarrow{T_{2\to1}(M)}\right\| = f \cdot \left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(M)}\right\|$ avec $\left\|d\overrightarrow{N_{2\to1}(M)}\right\| = p \cdot ds$

D'où : $\boxed{d\overrightarrow{F_{2\to1}(M)} = -p \cdot ds \cdot \vec{x} + f \cdot p \cdot ds \cdot \overrightarrow{u_\theta}}$

Question 3 : *Déterminer l'expression du moment résultant de l'action mécanique d'une garniture 2 sur le disque1 au point O.*

$$\left\{T_{2\to1}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{O,2\to1}}\end{matrix}\right\}_O = \left\{\begin{matrix}\int_S \overrightarrow{dF_{2\to1}(P)} \\ \int_S \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF_{2\to1}(M)}\end{matrix}\right\}_O$$



$$\overrightarrow{M_{O,2\to1}} = \int_S \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF_{2\to1}(M)}$$
$$= \int_S r\cdot\overrightarrow{u_r}\wedge(-p\cdot ds\cdot\vec{x} + f\cdot p\cdot ds\cdot\overrightarrow{u_\theta})$$
$$= \int_S (r\cdot p\cdot ds\cdot\overrightarrow{u_\theta} + r\cdot f\cdot p\cdot ds\cdot\vec{x})$$
$$= \int_S (r^2\cdot p\cdot d\theta\cdot dr\cdot\overrightarrow{u_\theta} + f\cdot p\cdot r^2\cdot d\theta\cdot dr\cdot\vec{x})$$

L'axe $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cdot\vec{z} - \sin\theta\cdot\vec{y}$ « varie » avec θ, il faut donc l'intégrer.

$$\overrightarrow{M_{O,2\to1}} = p\cdot\int_{r_i}^{r_e} r^2\cdot dr\int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos\theta\cdot\vec{z} - \sin\theta\cdot\vec{y})\cdot d\theta + f\cdot p\cdot\vec{x}\cdot\int_{r_i}^{r_e} r^2\cdot dr\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta$$
$$= p\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r_i}^{r_e}\cdot\left(\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\cdot\vec{z} - \left[-\cos\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\cdot\vec{y}\right) + f\cdot p\cdot\vec{x}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r_i}^{r_e}\cdot\left[\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$
$$= p\cdot\left(\frac{r_e^3 - r_i^3}{3}\right)\cdot\left(2\cdot\sin\alpha\cdot\vec{z}\right) + f\cdot p\cdot\vec{x}\cdot\left(\frac{r_e^3 - r_i^3}{3}\right)\cdot 2\cdot\alpha$$
$$= \boxed{f\cdot p\cdot\left(\frac{r_e^3 - r_i^3}{3}\right)\cdot 2\cdot\alpha\cdot\vec{x} + p\cdot\left(\frac{r_e^3 - r_i^3}{3}\right)\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\vec{z}}$$

Question 4 : *En déduire le couple total de freinage avec les deux étriers en fonction de α, p, f, r_i et r_e.*

Pour une garniture, le couple de freinage correspond à la capacité qu'a l'action mécanique des garnitures sur le disque à l'empêcher de tourner (ici le ralentir) autour de l'axe $(O,\vec{x})$.

C'est donc la composante sur $\vec{x}$ du moment résultant $\overrightarrow{M_{O,2\to1}}$ de l'AM de 2→1 .

Mais il ne faut pas oublier qu'il y deux étriers avec chacun 2 garnitures pour générer le couple total de freinage !

Donc : $\boxed{C_f = \frac{8\cdot f\cdot p\cdot\alpha(r_e^3 - r_i^3)}{3}}$