LOIS ENTREE-SORTIE PAS FERMETURE GEOMETRIQUE

CORRIGE

Exercice 1 : MICROMOTEUR DE MODÉLISME

Question 1 : *Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du dispositif de transformation de mouvement.*

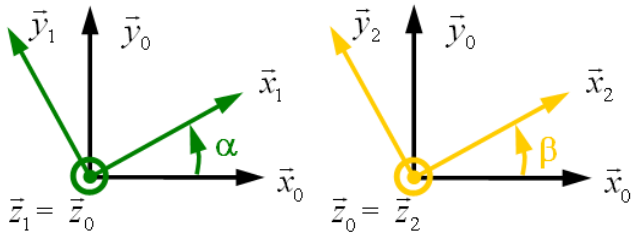
Paramètre d'entrée : $x(t)$ (position linéaire du piston 3 par rapport au bâti 0)

Paramètre de sortie : $\alpha(t)$ (position angulaire du vilebrequin 1 par rapport au bâti 0)

Question 2 : *Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position $x = f(\alpha)$ du dispositif de transformation de mouvement.*

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

Donc : $e \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \vec{x}_2 - x \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$



Or $\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin\alpha \cdot \overrightarrow{y_0}$ *et* $\overrightarrow{x_2} = \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_0}$

L'équation vectorielle obtenue par fermeture géométrique permet d'obtenir les équations scalaires suivantes :

En projection sur $\overrightarrow{x_0} \Rightarrow e.\cos\alpha + L.\cos\beta - X = 0$ (1)

En projection sur $\overrightarrow{y_0} \Rightarrow e.\sin\alpha + L.\sin\beta = 0$ (2)

On cherche une loi entrée-sortie de type $x = f(\alpha)$, il faut donc éliminer β (paramètre intermédiaire) de ces deux relations…

Pour cela, à partir des deux relations obtenues, on :

- isole les cosinus et sinus du paramètre angulaire dont on veut se débarrasser ;
- on élève au carré ;
- on utilise la relation de trigonométrie $\boxed{\cos^2 \cdots + \sin^2 \cdots = 1}$.

Ce qui nous donne dans notre cas :

$(1) \Rightarrow L \cdot \cos\beta = X - e \cdot \cos\alpha$

$(2) \Rightarrow L.\sin\beta = -e.\sin\alpha$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow L^2 \cdot \cos^2\beta + L^2.\sin^2\beta = (X - e \cdot \cos\alpha)^2 + e^2.\sin^2\alpha$

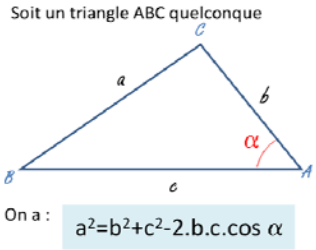
Donc :

$L^2 - e^2.\sin^2\alpha = (X - e \cdot \cos\alpha)^2 \Rightarrow \sqrt{L^2 - e^2.\sin^2\alpha} = \pm(X - e \cdot \cos\alpha)$ (car $L \geq e$)

Ce qui nous donne : $\boxed{X = e \cdot \cos\alpha + \sqrt{L^2 - e^2.\sin^2\alpha}}$ (car X *est toujours* ≥ 0)

Question 3 : *Retrouver ce résultat à l'aide du théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé).*

Théorème d'Al-Kashi :



$L^2 = e^2 + X^2 - 2 \cdot e \cdot X \cdot \cos\alpha \Rightarrow \; 0 = X^2 - 2 \cdot e \cdot X \cdot \cos\alpha + e^2 - L^2$

$\Delta = 4 \cdot e^2 \cdot \cos^2\alpha - 4 \cdot (e^2 - L^2) > 0 \quad (\text{ car } L \geq e)$

Donc :

$$X = \frac{2 \cdot e \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{4 \cdot e^2 \cdot \cos^2\alpha - 4 \cdot (e^2 - L^2)}}{2}$$

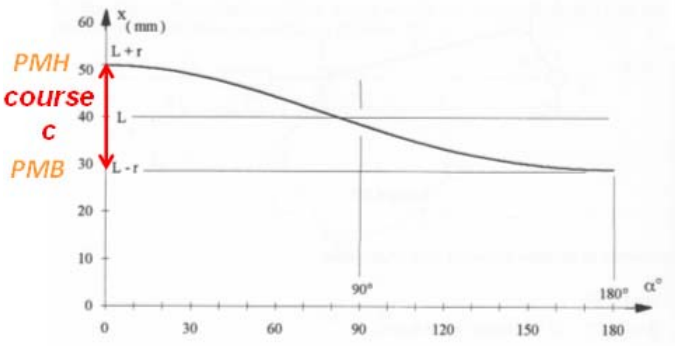
$\Rightarrow \; X = e \cdot \cos\alpha + \sqrt{e^2 \cdot \cos^2\alpha - (e^2 - L^2)}$ (car X *est toujours* ≥ 0)

Or : $e^2 \cdot \cos^2\alpha + e^2 \cdot \sin^2\alpha = e^2 \;\Rightarrow e^2 \cdot \cos^2\alpha = e^2 - e^2 \cdot \sin^2\alpha$

Donc : $X = e \cdot \cos\alpha + \sqrt{\cancel{e^2} - e^2 \cdot \sin^2\alpha - (\cancel{e^2} - L^2)} = \boxed{X = e \cdot \cos\alpha + \sqrt{L^2 - e^2.\sin^2\alpha}}$

On retrouve bien la même loi entrée-sortie.

Question 4 : *Déterminer la cylindrée du micromoteur.*



$Cyl = S_{piston} \cdot c = \pi \cdot R_{piston}{}^2 \cdot c = \pi \cdot 1{,}2^2 \cdot 2{,}2 = \boxed{9{,}95\,cm^3}$

Question 5 : *Déterminer, à l'aide du résultat de la question Q2, la loi entrée-sortie en vitesse* $\dot{x} = f(\dot{\alpha}, \alpha)$. *En déduire le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V_{B\in 3/0}}$ *en fonction de* $\dot{\alpha}$, α, L *et* e .

En dérivant la loi entrée- sortie en position, on obtient une loi entrée-sortie en vitesse :

$$\dot{X} = (-e \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha + \frac{-e^2 \cdot 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sqrt{L^2 - e^2.\sin^2\alpha}})$$

Rappel : $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

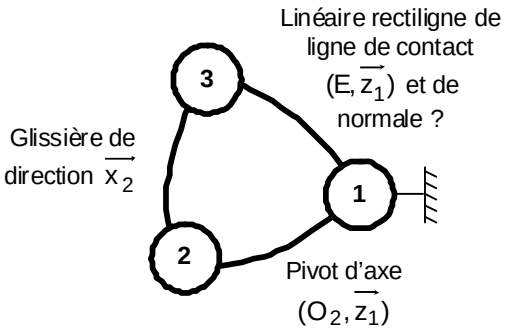
Or on sait que $\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = \dot{X} \cdot \overrightarrow{x_0}$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = (-e \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha - \frac{e^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sqrt{L^2 - e^2.\sin^2\alpha}}) \cdot \overrightarrow{x_0}}$$

Exercice 2 : POMPE À PALETTES

Question 1 : *Dessiner le graphe des liaisons de ce système.*



Question 2 : *Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.*

Paramètre d'entrée : position angulaire du barillet 2 par rapport au corps 1 : α

Paramètre de sortie : position linéaire de la palette 3 par rapport au barillet 2 : λ

Question 3 : *Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position $\lambda = f(\alpha)$ de la pompe à palettes.*

Par fermeture géométrique : $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2D} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO_1} = \vec{0}$

$-e.\overrightarrow{x_1} + d.\overrightarrow{y_2} + \lambda.\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{EO_1} = \vec{0}$ or on sait que $\left\|\overrightarrow{EO_1}\right\| = R$

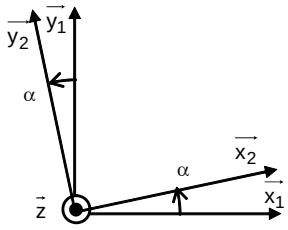
Donc $\left\|-e.\overrightarrow{x_1} + d.\overrightarrow{y_2} + \lambda.\overrightarrow{x_2}\right\| = \left\|-\overrightarrow{EO_1}\right\| = R \Rightarrow \left\|-e.(\cos\alpha.\overrightarrow{x_2} - \sin\alpha.\overrightarrow{y_2}) + d.\overrightarrow{y_2} + \lambda.\overrightarrow{x_2}\right\| = R$

$\sqrt{(-e.\cos\alpha + \lambda)^2 + (e.\sin\alpha + d)^2} = R$

$(-e.\cos\alpha + \lambda)^2 + (e.\sin\alpha + d)^2 = R^2$

$\pm(-e.\cos\alpha + \lambda) = \sqrt{R^2 - (e.\sin\alpha + d)^2}$ $\qquad (e + d) < R$

$\lambda = e.\cos\alpha \pm \sqrt{R^2 - (e.\sin\alpha + d)^2}$



Donc : $\boxed{\lambda = e.\cos\alpha + \sqrt{R^2 - (e.\sin\alpha + d)^2}}$ car $\lambda > 0$

Question 4 : *Donner, sans calcul, la trajectoire $T_{E/1}$ du point géométrique de contact.*

On a : $\left\|\overrightarrow{O_1E}\right\| = R$

La trajectoire du point E dans le repère R1 est le cercle de centre O_1 et de rayon R.

Question 5 : *Déterminer l'expression des vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/1}}$.*

$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}}$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0}}$ $\qquad$ et $\qquad \boxed{\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}}$

Question 6 : *Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}}$.*

$\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{G_3\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{G_3\in 2/1}}$

Avec : $\overrightarrow{V_{G_3\in 3/2}} = \underline{\dot{\lambda}\cdot\overrightarrow{x_2}}$

Et $\overrightarrow{V_{G_3\in 2/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{O_2\in 2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{G_3O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \left(-(\lambda - b)\cdot\overrightarrow{x_2} - d\cdot\overrightarrow{y_2}\right) \wedge \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1} = \underline{(\lambda - b)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} - d\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{x_2}}$

car O_2 est sur l'axe de rotation du Mvt 2/1

Donc : $\boxed{\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}} = (\dot{\lambda} - d\cdot\dot{\alpha})\cdot\overrightarrow{x_2} + (\lambda - b)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2}}$

Question 7 : *En déduire le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G_3\in 3/1}}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma_{G_3\in 3/1}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{G_3\in 3/1}}}{dt}\right]_1 = \left[\frac{d\left((\dot{\lambda} - d\cdot\dot{\alpha})\cdot\overrightarrow{x_2} + (\lambda - b)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2}\right)}{dt}\right]_1$$

$$= (\ddot{\lambda} - d\cdot\ddot{\alpha})\cdot\overrightarrow{x_2} + (\dot{\lambda} - d\cdot\dot{\alpha})\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_1 + \dot{\lambda}\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} + (\lambda - b)\cdot\ddot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} + (\lambda - b)\cdot\dot{\alpha}\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_1$$

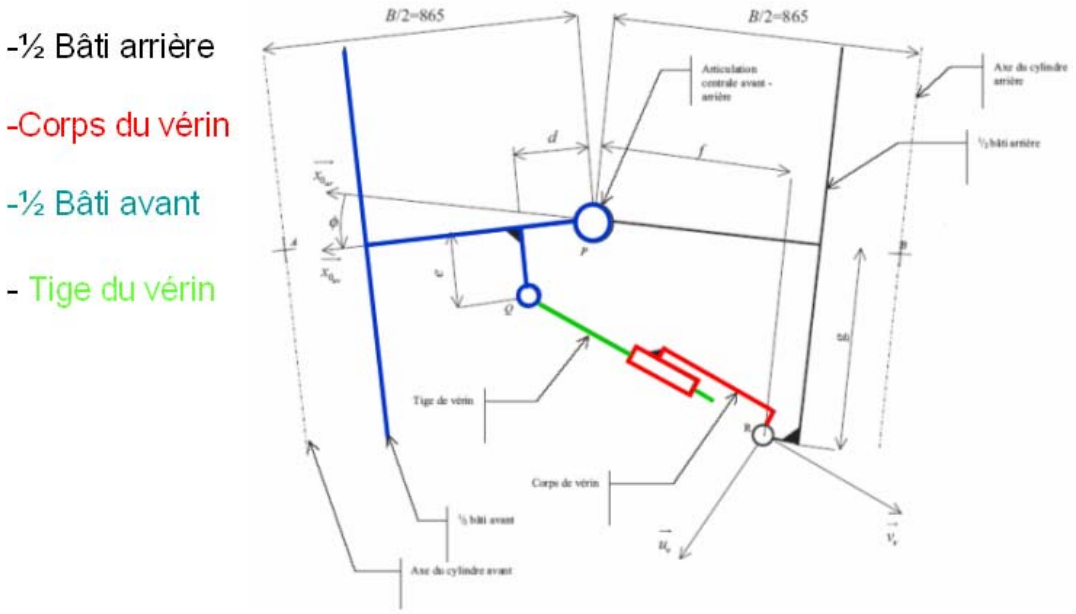
Or $\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_1 = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2}$ et $\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_1 = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{y_2} = \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = -\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{x_2}$

Donc :

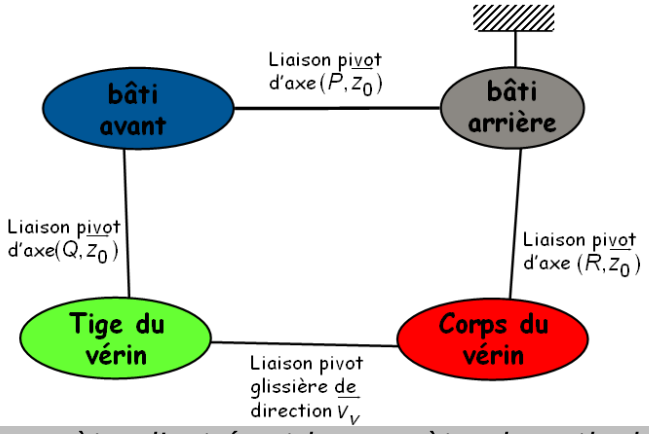
$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_3\in 3/1}} = \left((\ddot{\lambda} - d\cdot\ddot{\alpha}) - (\lambda - b)\cdot\dot{\alpha}^2\right)\cdot\overrightarrow{x_2} + \left(2\cdot\dot{\lambda}\cdot\dot{\alpha} - d\cdot\dot{\alpha}^2 + (\lambda - b)\cdot\ddot{\alpha}\right)\cdot\overrightarrow{y_2}}$$

Exercice 3 : COMPACTEUR

Question 1 : *Repasser en couleur les différents solides sur le schéma cinématique.*



Question 2 : *Dessiner le graphe des liaisons de ce système.*



Question 3 : *Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système d'orientation des cylindres.*

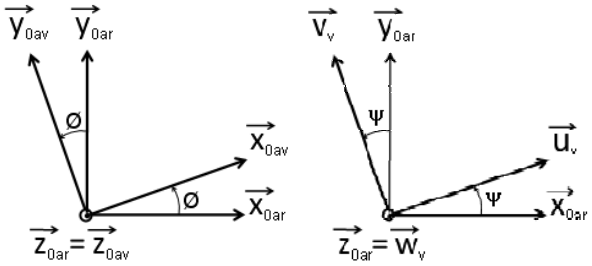
Paramètre d'entrée : $k(t)$ (position linéaire de la tige du vérin par rapport corps du vérin)

Paramètre de sortie : $\phi(t)$ (position angulaire du ½ bâti avant par rapport au ½ bâti arrière)

Question 4 : *Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position $k = f(\phi)$ du système d'orientation des cylindres.*

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \vec{0}$

Donc : $d \cdot \overrightarrow{x_{0av}} + e \cdot \overrightarrow{y_{0av}} + k \cdot \overrightarrow{v_v} - g \cdot \overrightarrow{y_{0ar}} + f \cdot \overrightarrow{x_{0ar}} = \vec{0}$



Or

$\overrightarrow{x_{0av}} = \cos\phi \cdot \overrightarrow{x_{0ar}} + \sin\phi \cdot \overrightarrow{y_{0ar}}$, $\overrightarrow{y_{0av}} = -\sin\phi \cdot \overrightarrow{x_{0ar}} + \cos\phi \cdot \overrightarrow{y_{0ar}}$ *et* $\overrightarrow{v_v} = -\sin\psi \cdot \overrightarrow{x_{0ar}} + \cos\psi \cdot \overrightarrow{y_{0ar}}$

L'équation vectorielle obtenue par fermeture géométrique permet d'obtenir les équations scalaires suivantes :

En projection sur $\overrightarrow{x_{0ar}} \Rightarrow d.\cos\phi - e\cdot\sin\phi - k\cdot\sin\psi + f = 0$ (1)

En projection sur $\overrightarrow{y_{0ar}} \Rightarrow d\cdot\sin\phi + e\cdot\cos\phi + k\cdot\cos\psi - g = 0$ (2)

On cherche une loi entrée-sortie de type $k = f(\phi)$, il faut donc éliminer ψ (paramètre intermédiaire) de ces deux relations…

Pour cela, à partir des deux relations obtenues, on :

- isole les cosinus et sinus du paramètre angulaire dont on veut se débarrasser ;
- on élève au carré ;
- on utilise la relation de trigonométrie $\boxed{\cos^2\cdots + \sin^2\cdots = 1}$.

Ce qui nous donne dans notre cas :

$(1) \Rightarrow k\cdot\sin\psi = d.\cos\phi - e\cdot\sin\phi + f$

$(2) \Rightarrow k\cdot\cos\psi = g - d\cdot\sin\phi - e\cdot\cos\phi$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow k^2 = (d.\cos\phi - e\cdot\sin\phi + f)^2 + (g - d\cdot\sin\phi - e\cdot\cos\phi)^2$

Ce qui nous donne : $\boxed{k = \sqrt{(d.\cos\phi - e\cdot\sin\phi + f)^2 + (g - d\cdot\sin\phi - e\cdot\cos\phi)^2}}$

Question 5 : *En déduire la course minimale c du vérin d'articulation permettant d'obtenir le comportement souhaité du compacteur en virage.*

La course du vérin doit être ≥ à la distance parcourue par la tige par rapport au corps du vérin pour faire passer le ½ bâti avant d'un position angulaire extrême par rapport au ½ bâti arrière (Ø = +32° ou -32°) à une autre (Ø = -32° ou 32°).

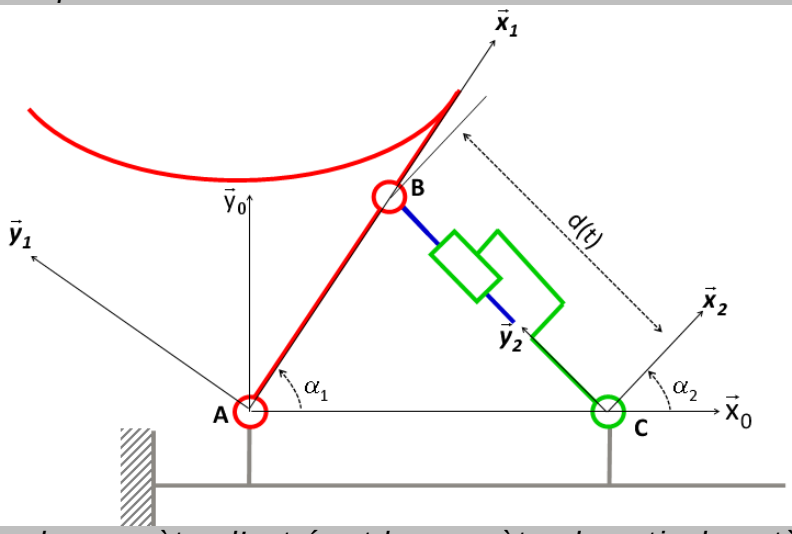
Donc :

Course du vérin $c = |k(\phi = -32°) - k(\phi = +32°)|$ avec $\begin{cases} k_{(\phi=-32°)} = \sqrt{(476,98)^2 + (386,53)^2} \\ k_{(\phi=+32°)} = \sqrt{(349,69)^2 + (269,94)^2} \end{cases}$

Pour garantir un angle Ø compris entre -32° et + 32°, il faut : $c > 613,85 - 441,76 = \boxed{172,09\,mm}$

Exercice 4 : SYSTÈME D'ORIENTATION D'ANTENNE

Question 1 : *Réaliser, en s'inspirant de la figure ci-dessus, le schéma cinématique du système d'orientation d'antenne dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$. Paramétrer ce schéma cinématique.*



Question 2 : *Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.*

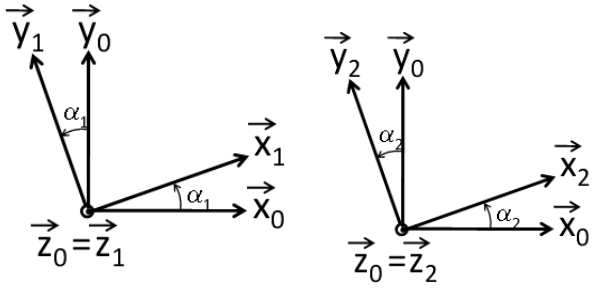
Paramètre d'entrée : $d(t)$ (position linéaire de la tige du vérin par rapport corps du vérin)

Paramètre de sortie : $\alpha_1(t)$ (position angulaire de l'antenne par rapport au support)

Question 3 : *Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique, la loi entrée-sortie en position $d = f(\alpha_1)$ du système d'orientation d'antenne.*

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Donc : $L_1 \cdot \overrightarrow{x_1} - d \cdot \overrightarrow{y_2} - L_0 \cdot \overrightarrow{x_0} = \vec{0}$



Or $\overrightarrow{x_1} = \cos\alpha_1 \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin\alpha_1 \cdot \overrightarrow{y_0}$ *et* $\overrightarrow{y_2} = -\sin\alpha_2 \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos\alpha_2 \cdot \overrightarrow{y_0}$

L'équation vectorielle obtenue par fermeture géométrique permet d'obtenir les équations scalaires suivantes :

En projection sur $\overrightarrow{x_0} \Rightarrow L_1.\cos\alpha_1 + d \cdot \sin\alpha_2 - L_0 = 0$ (1)

En projection sur $\overrightarrow{y_0} \Rightarrow L_1.\sin\alpha_1 - d \cdot \cos\alpha_2 = 0$ (2)

On cherche une loi entrée-sortie de type $d = f(\alpha_1)$, il faut donc éliminer α_2 (paramètre intermédiaire) de ces deux relations…

Pour cela, à partir des deux relations obtenues, on :

- isole les cosinus et sinus du paramètre angulaire dont on veut se débarrasser ;
- on élève au carré ;
- on utilise la relation de trigonométrie $\boxed{\cos^2 \cdots + \sin^2 \cdots = 1}$.

Ce qui nous donne dans notre cas :

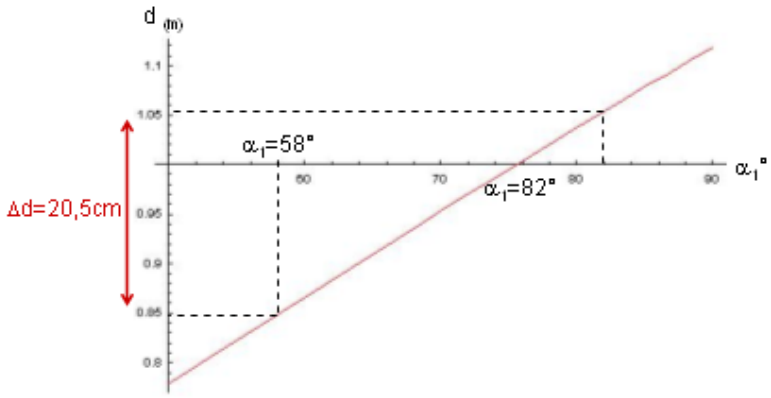
$(1) \Rightarrow d \cdot \sin\alpha_2 = L_0 - L_1.\cos\alpha_1$

$(2) \Rightarrow d \cdot \cos\alpha_2 = L_1.\sin\alpha_1$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow d^2 = (L_0 - L_1.\cos\alpha_1)^2 + (L_1.\sin\alpha_1)^2$

Ce qui nous donne : $\boxed{d = \sqrt{L_0^2 - 2 \cdot L_0 \cdot L_1.\cos\alpha_1 + L_1^2}}$ $(L_0^2 - 2 \cdot L_0 \cdot L_1.\cos\alpha_1 + L_1^2 \geq 0)$

Question 4 : *Déterminer, à l'aide de la courbe de la loi entrée-sortie donnée ci-dessous, la durée d'alimentation du vérin électrique permettant ce changement de position. On supposera que le moteur électrique tourne à la vitesse constante de 6000 tr/min.*



Ce changement de position de l'antenne nécessite donc une sortie de la tige de 20,5 cm.

Pendant cette phase, la vitesse de sortie de tige du vérin est :

$$\underbrace{V}_{mm \cdot s^{-1}} = \underbrace{N}_{tr \cdot m^{-1}} \times \underbrace{p}_{mm} = \frac{6000}{60} \times \frac{1}{5} \times 2 = \underline{40\ mm/s}$$

La durée d'alimentation du moteur est donc :

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{V} = \frac{20,5}{4} = \boxed{5,1\ s}$$