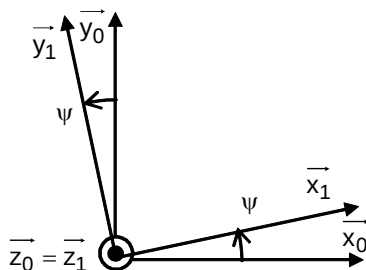


Corrigé Exercice 1 : MANÈGE SPIN FLY.

Question 1 : Réaliser des figures planes illustrant les 3 paramètres d'orientation.

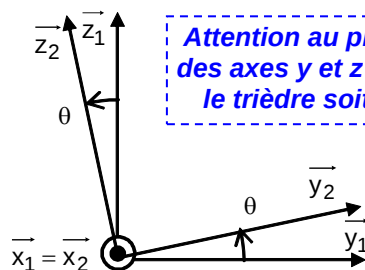
Question 2 : En déduire sous chaque figure, le vecteur rotation traduisant la figure.

Avant tout calcul, TOUJOURS REALISER des figures planes définissant les paramètres d'orientation.



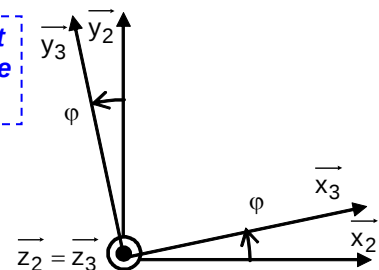
$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Pour réaliser des figures planes, toujours commencer par tracer le vecteur commun aux 2 bases, puis placer les autres vecteurs de façon à obtenir des trièdres directs.



$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_2$$

Attention au placement des axes y et z pour que le trièdre soit direct.



$$\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\phi} \vec{z}_2 = \dot{\phi} \vec{z}_3$$

Attention les figures planes définissent $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/2}$ et non pas $\vec{\Omega}_{0/1}$, $\vec{\Omega}_{1/2}$ et $\vec{\Omega}_{2/3}$.

Question 3 : En déduire $\vec{\Omega}_{3/0}$.

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\phi} \vec{z}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

Question 4 : Déterminer les trajectoires $T_{D \in 3/2}$, $T_{D \in 2/1}$, $T_{D \in 1/0}$ et $T_{D \in 3/0}$.

NB : Pour déterminer une trajectoire, il faut s'intéresser à la nature du mouvement en présence... (voir cours sur les trajectoires).

Le mouvement de 3/2 est une rotation d'axe $(B, \vec{z}_2)$. Par conséquent, la trajectoire $T_{D \in 3/2}$ est un arc de cercle d'axe $(B, \vec{z}_2)$, de centre B et de rayon [BD].	Le mouvement de 2/1 est une rotation d'axe $(B, \vec{x}_1)$. Par conséquent, la trajectoire $T_{D \in 2/1}$ est un arc de cercle d'axe $(B, \vec{x}_1)$, de centre H1 le projeté orthogonal de D sur la droite $(B, \vec{x}_1)$ et de rayon [H1D].	Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$. Par conséquent, la trajectoire $T_{D \in 1/0}$ est un arc de cercle d'axe $(O, \vec{z}_0)$, de centre H2 le projeté orthogonal de D sur la droite $(O, \vec{z}_0)$ et de rayon [H2D].

(voir vidéos sur site du professeur)

Le mouvement de 3/0 est une combinaison de 3 rotations.

Les trajectoires des points de 3 dans R0 sont quelconques dans l'espace.

Question 5 : Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{D \in 3/2}}$, $\overrightarrow{V_{D \in 2/1}}$, $\overrightarrow{V_{D \in 1/0}}$, et $\overrightarrow{V_{D \in 3/0}}$.
(Vérifier l'homogénéité des résultats).

$$\overrightarrow{V_{D \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{D/2}} + "D \in 3" = \overrightarrow{V_{D/2}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_2D}}{dt} \right]_2 = \left[\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt} \right]_2 = \left[\frac{d(c.\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_2 = c. \left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_2$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_2 = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{x_3} = \dot{\phi}.\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{x_3} = \dot{\phi}.\overrightarrow{y_3}$$

Donc $\overrightarrow{V_{D \in 3/2}} = c.\dot{\phi}.\overrightarrow{y_3}$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs. De plus, ces dérivées peuvent être réutilisées dans les questions suivantes...

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire. De plus, la vitesse (portée par $\overrightarrow{y_3}$) est bien tangente à la trajectoire (rappel $\overrightarrow{BD} = c.\overrightarrow{x_3}$) !

$$\overrightarrow{V_{D \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{D/1}} + "D \in 2" = \overrightarrow{V_{D/1}} + "\phi = cte" = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1D}}{dt} \right]_1 + "\phi = cte" = \left[\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right]_1 + "\phi = cte" = \left[\frac{d(b.\overrightarrow{z_0} + c.\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_1 + "\phi = cte"$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_1 + "\phi = cte" = \left[\frac{d\overrightarrow{z_1}}{dt} \right]_1 + "\phi = cte" = \vec{0} \quad \text{car } \overrightarrow{z_1} \text{ fixe dans 1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_1 + "\phi = cte" = \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \overrightarrow{x_3} + "\phi = cte" = (\dot{\phi}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}.\overrightarrow{x_2}) \wedge \overrightarrow{x_3} + "\phi = cte" = \dot{\theta}.\sin\phi.\overrightarrow{z_2}$$

Donc $\overrightarrow{V_{D \in 2/1}} = c.\dot{\theta}.\sin\phi.\overrightarrow{z_2}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

$$\overrightarrow{V_{D \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{D/0}} + "D \in 1" = \overrightarrow{V_{D/0}} + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0D}}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = \left[\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte"$$

$$\overrightarrow{V_{D \in 1/0}} = \left[\frac{d(b.\overrightarrow{z_0} + c.\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = c. \left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte"$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{x_3} + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = (\dot{\phi}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{x_3} + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte"$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = \dot{\psi}.(\cos\theta.\overrightarrow{z_2} + \sin\theta.\overrightarrow{y_2}) \wedge \overrightarrow{x_3} + "\phi = cte \text{ et } \theta = cte" = \dot{\psi}.\cos\theta.\overrightarrow{y_3} - \dot{\psi}.\sin\theta.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right).\overrightarrow{z_2}$$

Donc $\overrightarrow{V_{D \in 1/0}} = c.\dot{\psi}.\cos\theta.\overrightarrow{y_3} - c.\dot{\psi}.\sin\theta.\cos\phi.\overrightarrow{z_2}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= \overrightarrow{V_{D/0}} + "D \in 3" = \overrightarrow{V_{D/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0D}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(b.\overrightarrow{z_0} + c.\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_0 = c. \left[\frac{d.\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 \\ \left[\frac{d.\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 &= \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{x_3} = (\dot{\phi}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{x_3} = \dot{\phi}.\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}.\sin \phi.\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}.\cos \theta.\overrightarrow{z_2} + \sin \theta.\overrightarrow{y_2}) \wedge \overrightarrow{x_3} \\ \left[\frac{d.\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_0 &= \dot{\phi}.\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}.\sin \phi.\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}.\cos \theta.\overrightarrow{y_3} - \dot{\psi}.\sin \theta.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right).\overrightarrow{z_2} = (\dot{\phi} + \dot{\psi}.\cos \theta).\overrightarrow{y_3} + (\dot{\theta}.\sin \phi - \dot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi).\overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= c.(\dot{\phi} + \dot{\psi}.\cos \theta).\overrightarrow{y_3} + c.(\dot{\theta}.\sin \phi - \dot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi).\overrightarrow{z_2}\end{aligned}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

NB : On peut remarquer que $\overrightarrow{V_{D \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{D \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{D \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{D \in 1/0}}$
(Propriété de composition des vecteurs vitesses que l'on démontrera dans le cours suivant)

Question 6 : Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 3/0}}$. (Vérifier l'homogénéité du résultat).

$$\overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{D/0}} + "D \in 3" = \overrightarrow{\Gamma_{D/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{D/0}}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(c.(\dot{\phi} + \dot{\psi}.\cos \theta).\overrightarrow{y_3} + c.(\dot{\theta}.\sin \phi - \dot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi).\overrightarrow{z_2})}{dt} \right]_0$$

NB : $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

Attention $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ et $\frac{d \cos u}{dx} = -u'.\sin u$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= c.(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}.\cos \theta - \dot{\psi}.\dot{\theta}.\sin \theta).\overrightarrow{y_3} + c.(\dot{\phi} + \dot{\psi}.\cos \theta).\left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_0 \\ &+ c.(\ddot{\theta}.\sin \phi + \dot{\theta}.\dot{\phi}.\cos \phi - \ddot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi - \dot{\psi}.\dot{\theta}.\cos \theta.\cos \phi + \dot{\psi}.\sin \theta.\dot{\phi}.\sin \phi).\overrightarrow{z_2} + c.(\dot{\theta}.\sin \phi - \dot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi).\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0\end{aligned}$$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs.

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_0 &= \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{y_3} = (\dot{\phi}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{y_3} = -\dot{\phi}.\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right).\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}.\cos \theta.\overrightarrow{z_2} + \sin \theta.\overrightarrow{y_2}) \wedge \overrightarrow{y_3} \\ \left[\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt} \right]_0 &= -\dot{\phi}.\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}.\cos \phi.\overrightarrow{z_2} - \dot{\psi}.\cos \theta.\overrightarrow{x_3} + \dot{\psi}.\sin \theta.\sin \phi.\overrightarrow{z_2} = (-\dot{\phi} - \dot{\psi}.\cos \theta).\overrightarrow{x_3} + (\dot{\theta}.\cos \phi + \dot{\psi}.\sin \theta.\sin \phi).\overrightarrow{z_2} \\ \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0 &= \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} = (\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}.\sin \theta.\overrightarrow{x_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= c.(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}.\cos \theta - \dot{\psi}.\dot{\theta}.\sin \theta).\overrightarrow{y_3} + c.(\dot{\phi} + \dot{\psi}.\cos \theta). \left[(-\dot{\phi} - \dot{\psi}.\cos \theta).\overrightarrow{x_3} + (\dot{\theta}.\cos \phi + \dot{\psi}.\sin \theta.\sin \phi).\overrightarrow{z_2} \right] \\ &+ c.(\ddot{\theta}.\sin \phi + \dot{\theta}.\dot{\phi}.\cos \phi - \ddot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi - \dot{\psi}.\dot{\theta}.\cos \theta.\cos \phi + \dot{\psi}.\sin \theta.\dot{\phi}.\sin \phi).\overrightarrow{z_2} \\ &+ c.(\dot{\theta}.\sin \phi - \dot{\psi}.\sin \theta.\cos \phi).(-\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\psi}.\sin \theta.\overrightarrow{x_1})\end{aligned}$$

Toujours donner le résultat dans l'ordre croissant des bases, puis dans l'ordre croissant des vecteurs, exemple : $\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = ? \cdot \overrightarrow{x_1} + ? \cdot \overrightarrow{y_1} + ? \cdot \overrightarrow{z_1} + ? \cdot \overrightarrow{x_2} + ? \cdot \overrightarrow{y_2} + \dots$

soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} = & c \cdot (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \cdot \dot{\psi} \sin \theta \cdot \overrightarrow{x_1} - c \cdot (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_2} \\ & + c \cdot \left[\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \ddot{\theta} \sin \phi + 2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + 2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \right] \cdot \overrightarrow{z_2} \\ & - c \cdot (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \cdot \overrightarrow{x_3} + c \cdot (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \sin \theta) \cdot \overrightarrow{y_3} \end{aligned}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une accélération linéaire.

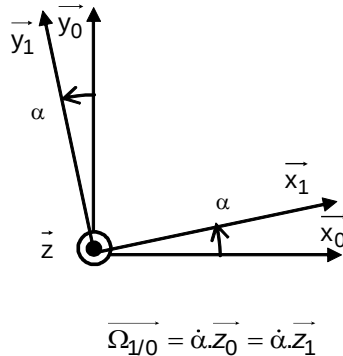
Maintenant, il faudrait projeter ce vecteur dans une base unique pour pouvoir déterminer analytiquement sa norme...

Ainsi, on validerait ou non, si la limite supportable par l'homme d'une valeur de 2g est dépassée !!

Corrigé Exercice 2 : CAMION BENNE.

Question 1 : Réaliser une figure plane illustrant le paramètre d'orientation.

Question 2 : En déduire sous la figure, le vecteur rotation.



Pour réaliser des figures planes, toujours commencer par tracer le vecteur commun aux 2 bases, puis placer les autres vecteurs de façon à obtenir des trièdres directs.

Attention la figure plane définit $\vec{\Omega}_{1/0}$ et non pas $\vec{\Omega}_{0/1}$.

Question 3 : Que dire des bases 1 et 2 ? En déduire $\vec{\Omega}_{2/1}$.

$B_1 = B_2$ car le mouvement de 2/1 est une translation : donc $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$.

Attention $R_1 \neq R_2$ car les origines sont distincts.

Question 4 : Déterminer les trajectoires $T_{B \in 2/1}$, $T_{B \in 1/0}$ et $T_{B \in 2/0}$.

Le mouvement de 2/1 est une translation rectiligne de direction $\vec{x}_1$.

Par conséquent, la trajectoire $T_{B \in 2/1}$ est un segment de droite porté par $(B, \vec{x}_1)$.

Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe $(O, \vec{z})$.

Par conséquent, la trajectoire du point $T_{B \in 1/0}$ est un arc de cercle d'axe $(O, \vec{z})$, de centre O et de rayon [OB].

Le mouvement de 2/0 est une combinaison d'une rotation d'axe $(O, \vec{z})$ et d'une translation dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$.

Les trajectoires des points de 2 dans R_0 sont quelconques dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$.

Question 5 : Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}$, $\overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$.

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B/1}} + "B \in 2" = \overrightarrow{V_{B/1}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1B}}{dt} \right]_1 = \left[\frac{d\lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_1 = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_1$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1}}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire. De plus, la vitesse (portée par $\overrightarrow{x_1}$) est bien tangente à la trajectoire.

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B/0}} + "B \in 1" = \overrightarrow{V_{B/0}} + " \lambda = cte " = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt} \right]_0 + " \lambda = cte " = \left[\frac{d\lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 + " \lambda = cte " = \lambda \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}}$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs. De plus, ces dérivées peuvent être réutilisées dans les questions suivantes...

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire. De plus, la vitesse (portée par $\overrightarrow{y_1}$) est bien tangente à la trajectoire (rappel $\overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}$) !

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B/0}} + "B \in 2" = \overrightarrow{V_{B/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d\lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

NB : On peut remarquer que $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$
(Propriété de composition des vecteurs vitesses que l'on démontrera dans le cours suivant)

Question 6 : Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}}$.

$$\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{B/0}} + "B \in 2" = \overrightarrow{\Gamma_{B/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{B/0}}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1})}{dt} \right]_0 = \ddot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \dot{\lambda} \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 + (\dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_0$$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs.

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} = \ddot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} + (\dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1} - \lambda \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Toujours donner le résultat dans l'ordre croissant des bases, puis dans l'ordre croissant des vecteurs, exemple :

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = ? \cdot \overrightarrow{x_1} + ? \cdot \overrightarrow{y_1} + ? \cdot \overrightarrow{z_1} + ? \cdot \overrightarrow{x_2} + ? \cdot \overrightarrow{y_2} + \dots$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} = (\ddot{\lambda} - \lambda \cdot \dot{\alpha}^2) \cdot \overrightarrow{x_1} + (2 \cdot \dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1}}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une accélération linéaire.

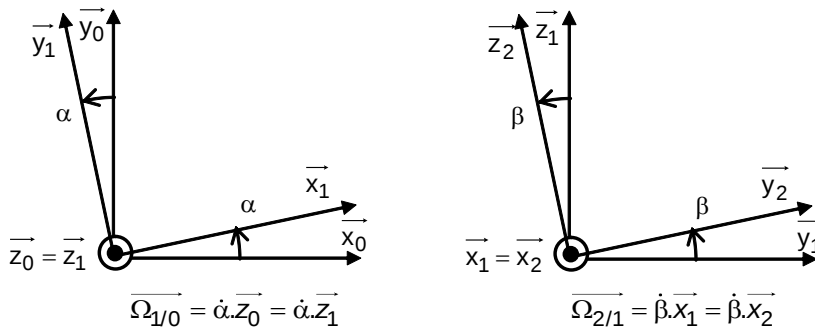
Corrigé Exercice 3 : BRAS MANIPULATEUR.

Question 1 : Proposer un paramétrage intelligent du système.

Pour paramétrer les 2 rotations et la translation, on utilise 2 paramètres angulaires et 1 paramètre linéaire :

Soit : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ et $\vec{BC} = \lambda \cdot \vec{z}_2$.

Question 2 : Réaliser des figures planes illustrant les paramètres d'orientation.



Question 3 : Déterminer les trajectoires $T_{C \in 3/2}$, $T_{C \in 2/1}$ et $T_{C \in 1/0}$.

Le mouvement de 3/2 est une translation rectiligne de direction $\vec{z}_2$.

Par conséquent, la trajectoire $T_{C \in 3/2}$ est un segment de droite porté par $(C, \vec{z}_2)$.

Le mouvement de 2/1 est une rotation d'axe $(B, \vec{x}_1)$.

Par conséquent, la trajectoire $T_{C \in 2/1}$ est un arc de cercle d'axe $(B, \vec{x}_1)$, de centre B et de rayon $[BC]$.

Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe $(A, \vec{z}_0)$.

Par conséquent, la trajectoire $T_{C \in 1/0}$ est un arc de cercle d'axe $(A, \vec{z}_0)$, de centre H le projeté orthogonal de C sur $(A, \vec{z}_0)$ et de rayon $[HC]$.

Question 4 : Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}_{C \in 3/2}$, $\vec{V}_{C \in 2/1}$, $\vec{V}_{C \in 1/0}$ et $\vec{V}_{C \in 3/0}$.

$$\vec{V}_{C \in 3/2} = \vec{V}_{C/2} + "C \in 3" = \vec{V}_{C/2} = \left[\frac{d\vec{O_2C}}{dt} \right]_2 = \left[\frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 = \left[\frac{d\lambda \cdot \vec{z}_2}{dt} \right]_2 = \dot{\lambda} \cdot \vec{z}_2 + \lambda \cdot \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_2$$

Donc $\boxed{\vec{V}_{C \in 3/2} = \dot{\lambda} \cdot \vec{z}_2}$

Choisir l'origine ou un point fixe du repère.

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.
De plus, la vitesse (portée par $\vec{z}_2$) est bien tangente à la trajectoire.

$$\vec{V}_{C \in 2/1} = \vec{V}_{C/1} + "C \in 2" = \vec{V}_{C/1} + "\lambda = cte" = \left[\frac{d\vec{O_1C}}{dt} \right]_1 + "\lambda = cte" = \left[\frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 + "\lambda = cte" = \left[\frac{d(a \cdot \vec{y}_1 + \lambda \cdot \vec{z}_2)}{dt} \right]_1 + "\lambda = cte"$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_1 + "\lambda = cte" = \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{z}_2 + "\lambda = cte" = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_2 + "\lambda = cte" = -\dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

Donc $\boxed{\vec{V}_{C \in 2/1} = -\dot{\beta} \cdot \vec{y}_2}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.
De plus, la vitesse (portée par $\vec{y}_2$) est bien tangente à la trajectoire (rappel $\vec{BC} = \lambda \cdot \vec{z}_2$) !

$$\overrightarrow{V_{C \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{C/0}} + "C \in 1" = \overrightarrow{V_{C/0}} + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0C}}{dt} \right]_0 + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = \left[\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right]_0 + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}"$$

$$\overrightarrow{V_{C \in 1/0}} = \left[\frac{d(a\overrightarrow{y_1} + \lambda\overrightarrow{z_2})}{dt} \right]_0 + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}"$$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs.

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1} + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = -\dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

De plus, ces dérivées peuvent être réutilisées dans les questions suivantes...

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = (\dot{\beta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{z_2} + "\lambda = \text{cte et } \beta = \text{cte}" = \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V_{C \in 1/0}} = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + \lambda\dot{\alpha} \sin\beta \overrightarrow{x_1}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V_{C \in 1/0}} = (\lambda \sin\beta - a)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

De plus, la vitesse (portée par $\overrightarrow{x_1}$) est bien tangente à la trajectoire (rappel $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{y_1}$) !

$$\overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{C/0}} + "C \in 3" = \overrightarrow{V_{C/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0C}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(a\overrightarrow{y_1} + \lambda\overrightarrow{z_2})}{dt} \right]_0 = a \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_0 + \dot{\lambda}\overrightarrow{z_2} + \lambda \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} = (\dot{\beta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + \dot{\alpha} \sin\beta \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \sin\beta \overrightarrow{x_1} - \dot{\beta}\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + \dot{\lambda}\overrightarrow{z_2} + \lambda(\dot{\alpha} \sin\beta \overrightarrow{x_1} - \dot{\beta}\overrightarrow{y_2})$$

$$\overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = (\lambda \sin\beta - a)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} - \lambda\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + \dot{\lambda}\overrightarrow{z_2}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une vitesse linéaire.

$$\text{NB : On peut remarquer que } \overrightarrow{V_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{C \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{C \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{C \in 1/0}}$$

(Propriété de composition des vecteurs vitesses que l'on démontrera dans le cours suivant)

Question 5 : Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{C \in 3/0}}$.

$$\overrightarrow{\Gamma_{C \in 3/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{C/0}} + "C \in 3" = \overrightarrow{\Gamma_{C/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{C/0}}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d((\lambda \sin\beta - a)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} - \lambda\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + \dot{\lambda}\overrightarrow{z_2})}{dt} \right]_0$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{C \in 3/0}} = \left[(\dot{\lambda} \sin\beta + \lambda\dot{\beta} \cos\beta)\dot{\alpha} + (\lambda \sin\beta - a)\ddot{\alpha} \right] \overrightarrow{x_1} + (\lambda \sin\beta - a)\ddot{\alpha} \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 - (\dot{\lambda}\dot{\beta} + \lambda\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} - \lambda\dot{\beta} \left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_0 + \ddot{\lambda}\overrightarrow{z_2} + \dot{\lambda} \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_0$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

Toujours calculer les dérivées des vecteurs unitaires en dehors de l'expression globale demandée, cela évite de nombreuses erreurs.

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2} = (\dot{\beta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{y_2} = \dot{\beta}\overrightarrow{z_2} - \dot{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\overrightarrow{x_1} = -\dot{\alpha} \cos\beta \overrightarrow{x_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{C \in 3/0}} = \left[(\dot{\lambda} \sin\beta + \lambda\dot{\beta} \cos\beta)\dot{\alpha} + (\lambda \sin\beta - a)\ddot{\alpha} \right] \overrightarrow{x_1} + (\lambda \sin\beta - a)\dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} - (\dot{\lambda}\dot{\beta} + \lambda\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} - \lambda\dot{\beta}(-\dot{\alpha} \cos\beta \overrightarrow{x_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{z_2}) + \ddot{\lambda}\overrightarrow{z_2} + \dot{\lambda}(\dot{\alpha} \sin\beta \overrightarrow{x_1} - \dot{\beta}\overrightarrow{y_2})$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une accélération linéaire.

$$\overrightarrow{\Gamma_{C \in 3/0}} = \left[2\dot{\lambda}\dot{\alpha} \sin\beta + 2\lambda\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos\beta + (\lambda \sin\beta - a)\ddot{\alpha} \right] \overrightarrow{x_1} + (\lambda \sin\beta - a)\dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} - (2\dot{\lambda}\dot{\beta} + \lambda\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} + (\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\beta}^2)\overrightarrow{z_2}$$