

I. INTRODUCTION

1. Objectifs

Dans ce cours, utilisant les connaissances acquises en cinématique et statique des solides, nous serons capables d'analyser les comportements cinématique et statique d'un mécanisme :

- déterminer les relations **entrées sorties** du mécanisme ;
- déterminer le **degré de mobilité** du mécanisme ;
- déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- modifier les liaisons du mécanisme afin de le rendre **isostatique**.
- déterminer la liaison **équivalente**.

2. Hypothèses d'études :

Dans ce chapitre, nous n'oublierons pas ces hypothèses d'étude :

- les solides seront tous considérés **indéformables** ;
- les liaisons entre les solides seront **parfaites** du point de vue cinématique (**sans jeu**) et du point de vue statique (**sans frottements**) ;
- les effets dynamiques sont considérés comme négligeables (**masse faible**), ainsi le **PFS peut être écrit à tout ensemble matériel issu du mécanisme** ;

3. Nombre cyclomatique d'un mécanisme :

Le graphe des liaisons permet d'identifier les liaisons entre tous les solides du mécanisme.

On définit le **nombre cyclomatique** γ comme le nombre de cycles (chaînes fermées) indépendants existants dans le mécanisme :

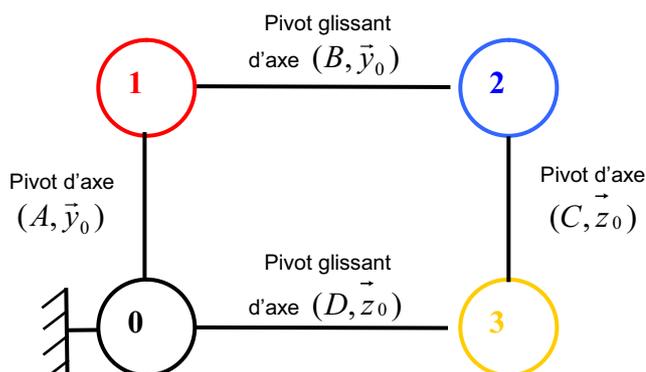
$$\gamma = l - n + 1$$

l : **nombre de liaisons** présentes dans le mécanisme

n : **nombre de solides** constituant le mécanisme bâti compris

Exemple 1 : Malaxeur – Mélangeur

La figure 1 représente un malaxeur – mélangeur. L'arbre d'entrée **1** est entraîné en rotation par un moteur électrique. Par l'intermédiaire de la bielle **2**, la pale de sortie **3** est animée d'un mouvement de rotation autour de (D, \vec{z}_0) et d'un mouvement de translation alternatif d'axe (D, \vec{z}_0) .



Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

$$\gamma = l - n + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

Le mécanisme possède une chaîne fermée que l'on pourra étudier plus tard dans le chapitre afin de déterminer la vitesse de la pale **3** en fonction du moteur.

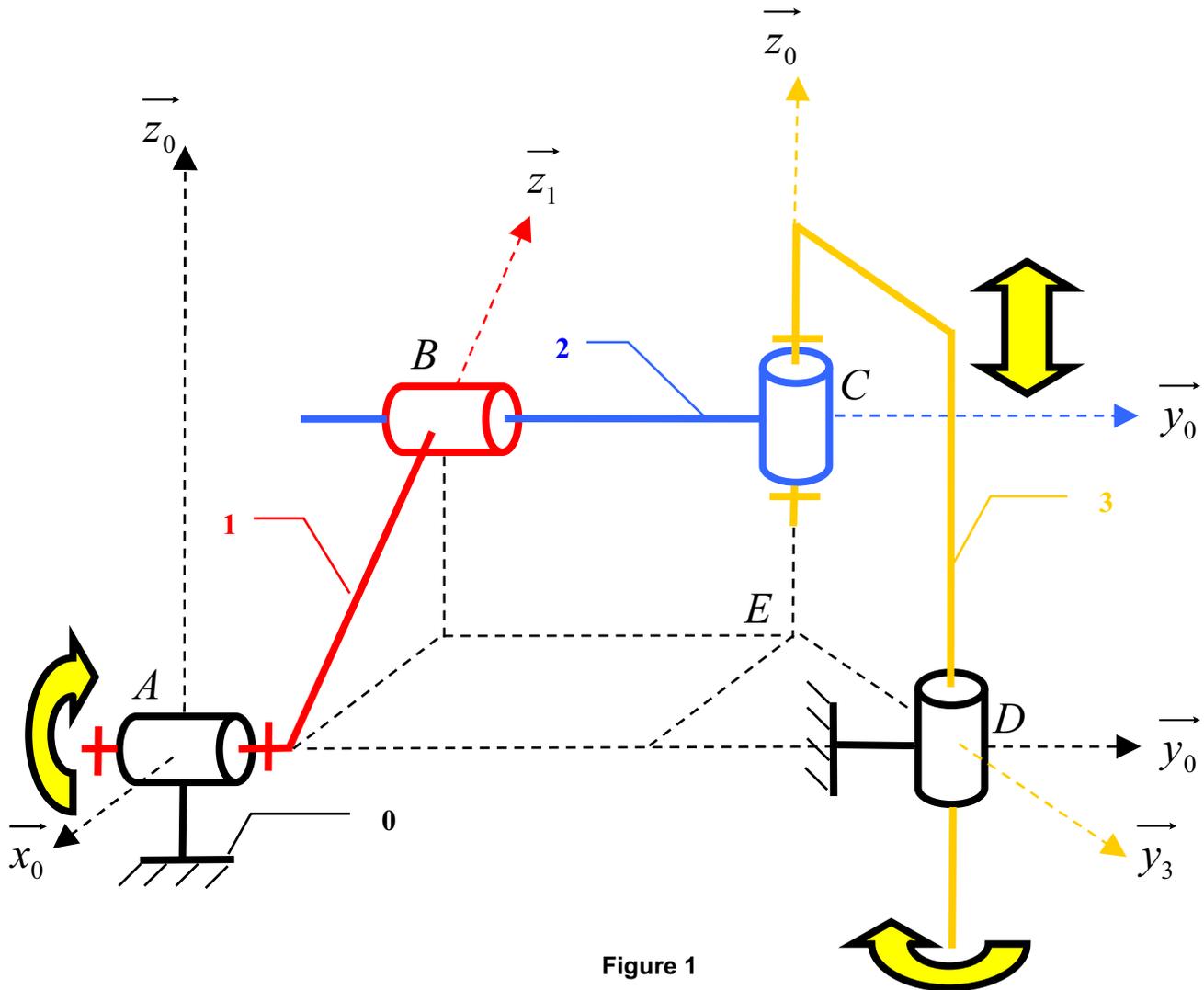
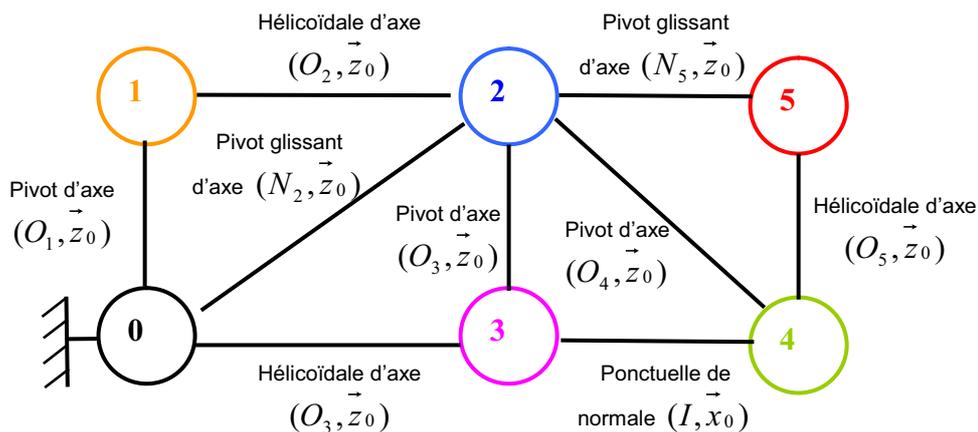


Figure 1

Exemple 2 : Elévateur télescopique

La figure 2 représente un élévateur télescopique. La vis d'entrée 1 est entraînée en rotation par un moteur électrique. Ce mouvement est transformé en translation d'axe (O_1, \vec{z}_0) du coulisseau 2 par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale d'axe (O_2, \vec{z}_0) . La vis 3 est levée par le coulisseau 2, elle entre donc aussi en rotation d'axe (O_3, \vec{z}_0) par l'intermédiaire de la liaison glissière hélicoïdale avec le bâti 0. Le train d'engrenage 3-4 entraîne la vis 4 en rotation qui provoque la translation d'axe (O_5, \vec{z}_0) du plateau 5.



Le nombre cyclomatique de ce mécanisme est :

$$\gamma = l - n + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$$

Le mécanisme possède **4 chaînes fermées indépendantes**.

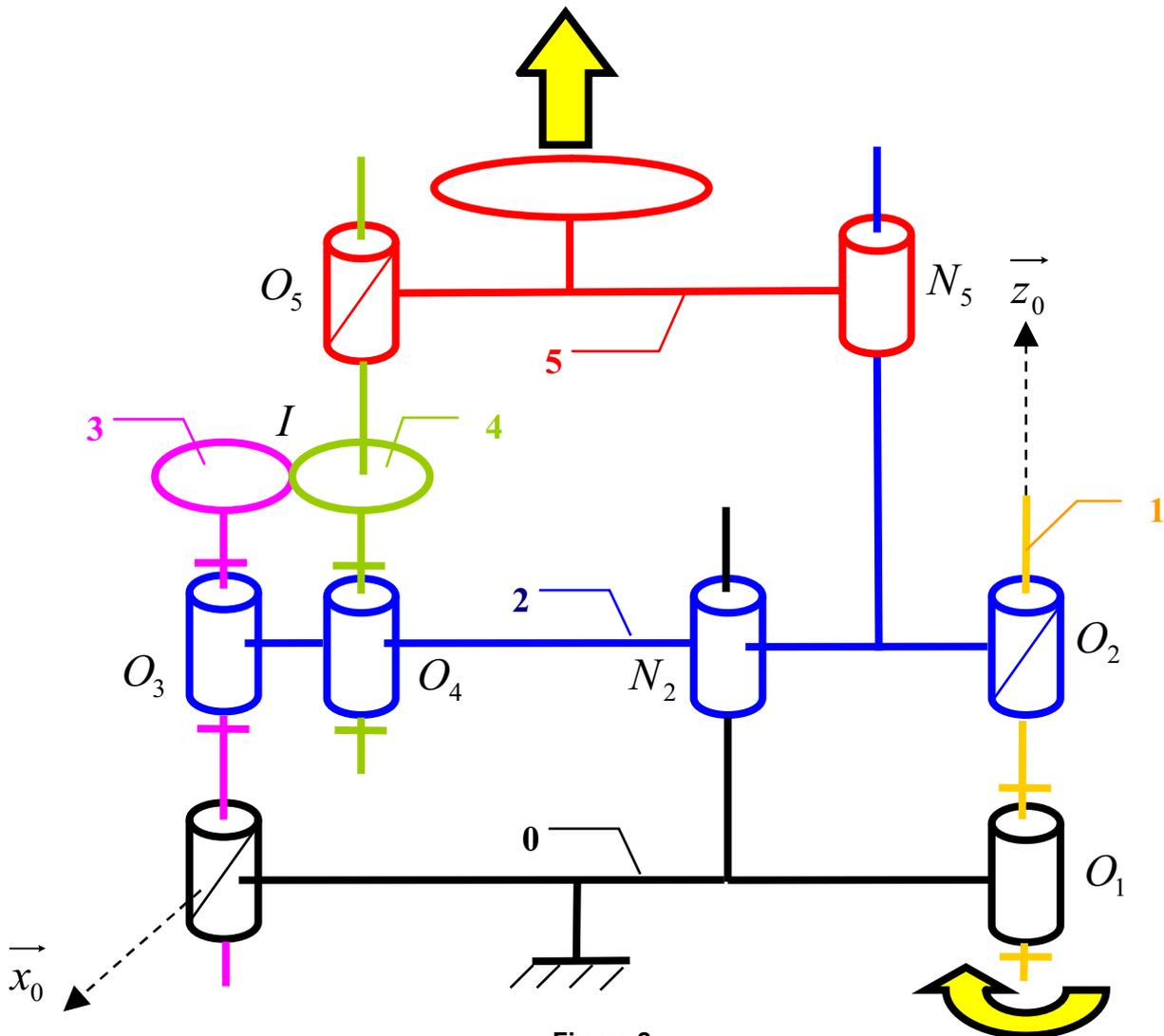


Figure 2

Chaque cycle indépendant γ peut être étudié de façon **géométrique, cinématique ou statique**. Ces trois méthodes font l'objet des paragraphes suivant.

II. ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE CHAÎNE FERMÉE SIMPLE

1. Fermeture géométrique

Objectifs :

- Déterminer les relations entre les **paramètres géométriques connus et inconnus** du mécanisme ;
- Etablir la **loi entrée-sortie**.

Soit $C = \{1, \dots, k\}$ une chaîne fermée simple de k solides. Le nombre de liaisons est $l = k$. Soit le point A_i le centre géométrique de la liaison $L_{i+1/i}$ entre les solides $i+1$ et i avec $i \in [1, k]$. On peut écrire la fermeture géométrique de la chaîne C de la manière suivante :

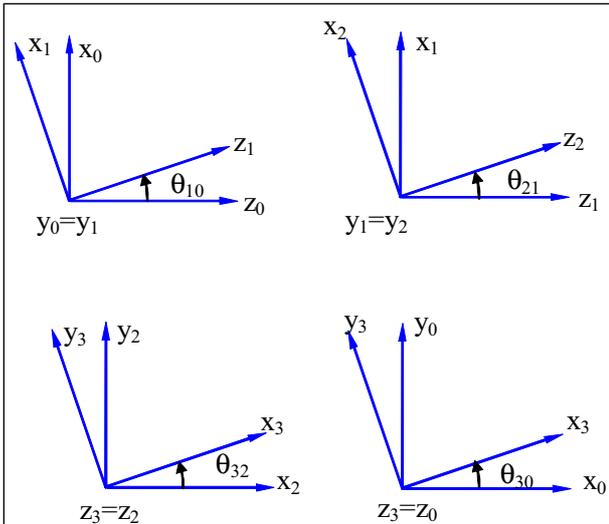
$$\sum_{i=1}^{k-1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} + \overrightarrow{A_k A_1} = \vec{0}$$

Cette relation vectorielle est projetée dans une base orthonormée. On obtient alors **un système de 3 équations à I_g paramètres géométriques**.

La loi entrée-sortie est la relation entre les paramètres géométriques inconnus et les paramètres géométriques connus du mécanisme.

2. Exemple traité : Malaxeur – Mélangeur

Figures angulaires planes :



Paramétrage :

$$\vec{AB} = R \cdot \vec{z}_1 ; \vec{CB} = -\lambda \cdot \vec{y}_1 \quad \text{avec } \lambda > 0 ;$$

$$\vec{DA} = -d \cdot \vec{y}_0 ; \vec{CD} = l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 .$$

Fermeture géométrique :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

$$R \cdot \vec{z}_1 + \lambda \cdot \vec{y}_0 + l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 - d \cdot \vec{y}_0 = \vec{0} \quad (1)$$

Système d'équation en projetant dans B_0 :

$$\begin{cases} R \sin \theta_{10} & - l \sin \theta_{30} & = & 0 & / x_0 \\ & \lambda - d + l \cos \theta_{30} & = & 0 & / y_0 \\ R \cos \theta_{10} & - h & = & 0 & / z_0 \end{cases}$$

Paramètres géométriques inconnus : h , λ et θ_{30}

Paramètres géométriques connus : R , d , l , et θ_{10}

Nombre de paramètres géométriques : $I_g = 7$

Déterminons les **lois entrée-sortie géométriques** du mécanisme :

Translation de la pale 3 : $h = R \cdot \cos \theta_{10}$

Rotation de la pale 3 : $\theta_{30} = \text{Arc sin} \left(\frac{R}{l} \cdot \sin \theta_{10} \right)$

Du point de vue cinématique maintenant :

Vitesse de translation de la pale 3 : $\dot{h} = -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}$

Vitesse angulaire de la pale 3 : $\dot{\theta}_{30} = \frac{\frac{R}{l} \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \cos \theta_{10}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \cdot \sin^2 \theta_{10}}}$



III. ETUDE CINEMATIQUE D'UNE CHAÎNE FERMÉE SIMPLE.

Objectifs :

- Etablir la **loi entrée-sortie cinématique** du mécanisme ;
- Déterminer le **degré de mobilité**.

1. Fermeture cinématique

Reprenons la chaîne de solide C . Le torseur cinématique en A du solide i en mouvement par rapport au solide j est noté

$$\{V_{i/j}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(A \in i/j) \end{array} \right\}_{B_k}$$
 écrit dans la base B_k .

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \{V_{i/i+1}\}_A + \{V_{k/1}\}_A = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \vec{\Omega}(i/i+1) + \vec{\Omega}(k/1) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \vec{V}(A \in i/i+1) + \vec{V}(A \in k/1) = \vec{0}$$

2. Degré de mobilité d'un mécanisme

Pour chaque cycle indépendant, on obtient par projection 6 équations scalaires.

Pour le mécanisme entier, on obtient un système E de **$6.\gamma$ équations à I_C** paramètres cinématiques inconnus :

$$I_C = \sum_{i=1}^l ic_i \text{ avec } ic_i \text{ le nombre de degré de liberté dans la liaison } L_{ij} \text{ et } l \text{ le nombre total de liaison.}$$

Rang cinématique r_C : nombre d'équations indépendantes du système E. On a bien sur $r_C \leq 6.\gamma$

Il faut donc fixer $I_C - r_C$ paramètres cinématiques inconnus pour résoudre complètement le problème.

Définition :

On appelle **degré de mobilité cinématique d'un mécanisme**, notée m_C , le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour déterminer toutes les inconnues cinématiques.

$$\text{On peut écrire : } m_C = I_C - r_C$$

Plusieurs cas peuvent se rencontrer :

- Si $m_C = 0$ alors tous les paramètres cinématiques sont déterminés, il n'y a pas de mouvement. **Le mécanisme est bloqué** ;
- Si $m_C = 1$ alors il suffit de fixer un seul paramètre cinématique pour déterminer tous les autres. Ce paramètre est le mouvement moteur. On appelle ce type de mécanisme des **mécanismes à transformation de mouvement** ;
- Si $m_C > 1$ alors il faut fixer plusieurs paramètres cinématiques pour connaître la position exacte de tous les solides. Ces mouvements peuvent être composés (**mécanisme à composition de mouvement**) et/ou inutiles (mécanismes à **mobilité(s) interne(s)**).

3. Mobilité utile et mobilité interne

Dans le troisième cas, le degré de mobilité du mécanisme s'écrit : $m_C = m_U + m_I$

On appelle **mobilité utile**, notée m_U , le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** à fixer pour déterminer les relations entrées-sorties du mécanisme.

La mobilité utile est liée à la fonction du mécanisme.

On appelle **mobilité interne**, notée m_I , le nombre **d'inconnues cinématiques indépendantes** du mécanisme quand on immobilise les liaisons d'entrée et les liaisons de sortie du mécanisme.

La mobilité interne est un mouvement existant entre deux solides du mécanisme n'ayant pas d'incidence sur la fonction réalisée.

4. Exemple traité : Malaxeur – Mélangeur

Les torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{V_{1/0}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-, \vec{y}_0, -)} ; \{V_{2/1}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(-, \vec{y}_0, -)} ; \{V_{3/2}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_0)} ; \{V_{3/0}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_{30} & w_{30} \end{Bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_0)}$$

On écrit les torseurs en D , là où il y a le plus d'inconnues :

$$\vec{V}(D \in 2/1) = \vec{V}(C \in 2/1) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}(2/1) = v_{21} \cdot \vec{y}_0 + (h \cdot \vec{z}_0 - l \cdot \vec{y}_3) \wedge \dot{\theta}_{21} \cdot \vec{y}_0 = v_{21} \cdot \vec{y}_0 + l \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \sin \theta_{30} \cdot \vec{z}_0 - h \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(D \in 3/2) = \vec{V}(C \in 3/2) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}(3/2) = (h \cdot \vec{z}_0 - l \cdot \vec{y}_3) \wedge \dot{\theta}_{32} \cdot \vec{z}_0 = -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \vec{x}_3$$

$$\{V_{2/1}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & -h \cdot \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{21} & v_{21} \\ 0 & l \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot \sin \theta_{30} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} ; \{V_{3/2}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \cos \theta_{30} \\ 0 & -l \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot \sin \theta_{30} \\ \dot{\theta}_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

La fermeture cinématique s'écrit : $\{V_{3/2}\}_D + \{V_{2/1}\}_D + \{V_{1/0}\}_D = \{V_{3/0}\}_D$

Le système d'équations en projetant sur B_0 :

$$\begin{aligned} 0 &= 0 & (1) \\ \dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21} &= 0 & (2) \\ \dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{30} &= 0 & (3) \\ -h \dot{\theta}_{21} - l \dot{\theta}_{32} \cos \theta_{30} &= 0 & (4) \\ v_{21} - l \dot{\theta}_{32} \sin \theta_{30} &= 0 & (5) \\ l \dot{\theta}_{21} \sin \theta_{30} - w_{30} &= 0 & (6) \end{aligned}$$

Nombre total d'inconnues cinématiques : $I_C = 6$;

Rang cinématique : $r_C = 5$ car l'équation (1) n'est pas exploitable ;

Degré de mobilité du mécanisme : $m_C = I_C - r_C = 1$ donc le malaxeur - mélangeur est un mécanisme de transformation de mouvement. Il suffit de connaître une seule I_C pour déterminer toutes les autres ;

Paramètre cinématique connu : $\dot{\theta}_{10}$ (la mobilité à fixer) ;

Paramètres cinématiques inconnus : $\dot{\theta}_{30}$, w_{30} , $\dot{\theta}_{21}$, v_{21} , $\dot{\theta}_{32}$ (mobilité à déterminer).

**Résolution :**

D'après l'étude géométrique, on sait que $\sin \theta_{30} = \frac{R}{l} \sin \theta_{10}$.

Le système d'équation donne :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{21} &= -\dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{32} &= \dot{\theta}_{30} \\ \dot{\theta}_{30} &= \frac{h \cdot \dot{\theta}_{10}}{l \cdot \cos \theta_{30}} \\ v_{21} &= l \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \tan \theta_{30} \\ w_{30} &= -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}\end{aligned}$$

Retrouvons la loi entrée-sortie du mécanisme de l'étude géométrique:

$$\text{Vitesse de translation de la pale 3 : } w_{30} = -R \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \sin \theta_{10}$$

IV. ETUDE STATIQUE D'UNE CHAÎNE FERMÉE SIMPLE**Objectifs :**

- Déterminer le **degré d'hyperstaticité** du mécanisme ;
- Identifier les inconnues d'efforts hyperstatiques ;
- Modifier le mécanisme pour **le rendre isostatique** si nécessaire.

1. Principe fondamental de la statique

Le torseur d'inter-efforts associé à la liaison L_{ij} entre le solide S_j sur le solide S_i au point A s'écrit :

$$\left\{ T_{S_j \rightarrow S_i} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = X_{ji} \cdot \vec{x}_k + Y_{ji} \cdot \vec{y}_k + Z_{ji} \cdot \vec{z}_k \\ \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = L_{ji} \cdot \vec{x}_k + M_{ji} \cdot \vec{y}_k + N_{ji} \cdot \vec{z}_k \end{array} \right\}_{Bk} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{array} \right\}_A$$

Le mécanisme est constitué de n solides. On peut donc isoler $n-1$ systèmes de solides (on ne peut pas isoler le bâti). On peut, par exemple, isoler successivement chaque solide du mécanisme.

On applique le **Principe Fondamental de la Statique** à ces $n-1$ solides :

Si $\left\{ T_{S_i \rightarrow S_i}^- \right\}_A$ est le torseur de toutes les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S_i alors :

$$\left\{ T_{S_i \rightarrow S_i}^- \right\}_A = \{0\}_A \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\sum_{j \neq i} \left\{ T_{S_j \rightarrow S_i} \right\}_A = \{0\}_A \quad \forall i \in [1, n-1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} \vec{R}(S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \\ \sum_{j \neq i} \vec{M}(A, S_j \rightarrow S_i) = \vec{0} \end{array} \right\} \quad \forall i \in [1, n-1]$$

2. Nombre d'inconnues statique d'un mécanisme

En isolant ces $n-1$ solides, on obtient un système E de $6(n-1)$ équations scalaires en projetant sur la base B_0 . Le

nombre d'inconnues statiques I_S est la somme des inconnues statiques de toutes les liaisons : $I_S = \sum_{i=1}^l i_{Si}$.

or $l = \gamma + n - 1$ et pour chaque liaison $i_{Si} = 6 - i_{Ci}$.

Donc le nombre d'inconnues statiques est : $I_S = \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} (6 - i_{Ci}) = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - \sum_{i=1}^{\gamma+n-1} i_{Ci} = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C$.

Le **nombre d'inconnues statiques** I_S s'écrit finalement : $I_S = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C$

γ : nombre cyclomatique

n : nombre de solides

I_C : nombre total d'inconnues cinématiques

3. Rang statique

Le rang statique r_S du mécanisme est le nombre d'équations indépendantes du système E. Bien sur $r_S \leq 6 \cdot (n - 1)$.

Nous admettons que le **rang statique** d'un mécanisme est : $r_S = 6 \cdot (n - 1) - m_C$

n : nombre de solides

m_C : degré de mobilité

4. Degré d'hyperstaticité d'un mécanisme

Il faut fixer $I_S - r_S$ inconnues de liaison pour déterminer tous les efforts dans le mécanisme.

Définition :

On appelle **degré d'hyperstaticité d'un mécanisme**, noté h , le nombre de paramètres d'inter-efforts à fixer pour déterminer les r_S inconnues d'inter-efforts restantes : $h = I_S - r_S$

En remplaçant les expressions de r_S et I_S , on obtient : $h = 6 \cdot (\gamma + n - 1) - I_C - 6 \cdot (n - 1) + m_C$

Finalement, la formule générale de la détermination de degré d'hyperstaticité d'un mécanisme est :

$h = m_C + 6 \cdot \gamma - I_C$ ou $h = I_S - 6 \cdot (n - 1) + m_C$

Formule de mobilité :

$$h = m_C + 6 \cdot \gamma - I_C \quad \text{ou} \quad h = m_C - 6 \cdot (n - 1) + I_S$$

γ : nombre cyclomatique

n : nombre de solides

I_C : nombre total d'inconnues cinématiques

I_S : nombre total d'inconnues statiques

m_C : degré de mobilité

**5. Signification de h**

$h = 0$	$I_S = r_S$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est isostatique</p> <p>Toutes les inconnues d'inter-efforts sont déterminables.</p> <p>Le fonctionnement correct de ce mécanisme ne nécessite aucune condition géométrique particulière.</p> <p>Avantage : le montage et la fabrication du mécanisme sont simplifiés.</p>
$h > 0$	$I_S = r_S + h$	<p style="text-align: center;">Le mécanisme est hyperstatique d'ordre h</p> <p>Il faut fixer h inconnues d'inter-efforts afin de déterminer les r_S inconnues restantes.</p> <p>Le fonctionnement correct de ce mécanisme nécessite h conditions géométriques à respecter.</p> <p>Inconvénients : le respect des conditions géométriques crée des difficultés d'assemblage et de fabrication du mécanisme. La conséquence est l'augmentation du coût du produit.</p> <p>Avantage : le mécanisme sera plus rigide.</p>

6. Comment rendre un mécanisme isotatique ?

Intervenir sur les liaisons en gardant des solides indéformables et des liaisons parfaites:

Il faut annuler h inter-efforts dans les liaisons. On va « libérer » des mobilités, on changera alors les modèles des liaisons. Le fonctionnement du mécanisme doit être conservé, on s'assurera de ce bon fonctionnement. **Les mobilités utiles ne peuvent pas être modifiées.** Généralement, on ne change pas les liaison d'entrée et de sortie du mécanisme.

Intervenir sur les liaisons en ne gardant pas ces hypothèses :

Il faudra ajouter h **équations de comportement en considérant les solides déformables** et les liaisons parfaites.

On peut aussi ajouter h équations de compatibilité géométrique en considérant **les liaisons avec jeu** et les solides indéformables.

7. Exemple traité : Mélangeur – Malaxeur

Ecrivons les torseurs statiques des liaisons du malaxeur :

$$\left\{ \mathbf{T}(S_0 \rightarrow S_1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \left\{ \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) \right\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \left\{ \mathbf{T}(S_3 \rightarrow S_2) \right\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

$$\left\{ \mathbf{T}(S_0 \rightarrow S_3) \right\}_D = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \left\{ \mathbf{T}(ext \rightarrow S_1) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \left\{ \mathbf{T}(ext \rightarrow S_3) \right\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{ext} & N_{ext} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Isolons l'arbre d'entrée 1 :

Ecrivons le PFS au point B : $\{T(S_0 \rightarrow S_1)\}_B + \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_B + \{T(ext \rightarrow S_1)\}_B = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en B :

$$\overline{M}(B, S_0 \rightarrow S_1) = \overline{M}(A, S_0 \rightarrow S_1) + \overline{BA} \wedge (X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0)$$

$$\overline{M}(B, S_0 \rightarrow S_1) = L_{01} \vec{x}_0 + N_{01} \vec{z}_0 - R \vec{z}_1 \wedge (X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0) = \begin{cases} L_{01} + R.Y_{01} \cdot \cos \theta_{01} \\ -R.X_{01} \cdot \cos \theta_{10} + R.Z_{01} \cdot \sin \theta_{01} \\ N_{01} - R.Y_{01} \cdot \sin \theta_{10} \end{cases}_{B_0}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{01} = 0 & (2) \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{01} + L_{21} + RY_{01} \cos \theta_{01} = 0 & (4) \\ RZ_{01} \sin \theta_{01} - RX_{01} \cos \theta_{01} + C_m = 0 & (5) \\ N_{01} + N_{21} = 0 & (6) \end{cases}$$

Isolons la bielle 2 :

Ecrivons le PFS au point C : $-\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_C + \{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en C :

$$\overline{M}(C, S_2 \rightarrow S_1) = \overline{M}(B, S_2 \rightarrow S_1) + \overline{CB} \wedge (X_{21} \vec{x}_0 + Z_{21} \vec{z}_0)$$

$$\overline{M}(C, S_2 \rightarrow S_1) = L_{21} \vec{x}_0 + N_{21} \vec{z}_0 - \lambda \vec{y}_1 \wedge (X_{21} \vec{x}_0 + Z_{21} \vec{z}_0) = \begin{cases} L_{21} - \lambda.Z_{21} \\ 0 \\ N_{21} + \lambda.X_{21} \end{cases}_{B_0}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \end{cases}$$

Isolons la pale 3 :

Ecrivons le PFS au point C : $\{T(ext \rightarrow S_3)\}_C + \{T(S_0 \rightarrow S_3)\}_C - \{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \{0\}$

Ecrivons les torseurs en C :

$$\overline{M}(C, S_0 \rightarrow S_3) = \overline{M}(D, S_0 \rightarrow S_3) + \overline{CD} \wedge (X_{03} \vec{x}_0 + Y_{03} \vec{y}_0)$$

$$\overline{M}(C, S_0 \rightarrow S_3) = L_{03} \vec{x}_0 + M_{03} \vec{y}_0 + (l \vec{y}_3 - h \vec{z}_0) \wedge (X_{03} \vec{x}_0 + Y_{03} \vec{y}_0) = \begin{cases} L_{03} + h.Y_{03} \\ M_{03} - h.X_{03} \\ -l.X_{03} \cdot \cos \theta_{30} - l.Y_{03} \cdot \sin \theta_{30} \end{cases}_{B_0}$$

$$\vec{M}(C, ext \rightarrow S_3) = \vec{M}(D, ext \rightarrow S_3) + \overline{CD} \wedge (Z_{ext} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{M}(C, ext \rightarrow S_3) = N_{ext} \cdot \vec{z}_0 + (l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0) \wedge (Z_{ext} \cdot \vec{z}_0) = \begin{cases} l \cdot Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30} \\ l \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{30} \\ N_{ext} \end{cases}$$

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} -X_{32} + X_{03} = 0 & (13) \\ -Y_{32} + Y_{03} = 0 & (14) \\ -Z_{32} + Z_{ext} = 0 & (15) \\ -L_{32} + L_{03} + hY_{03} + lZ_{ext} \cos \theta_{30} = 0 & (16) \\ -M_{32} + M_{03} - hX_{03} + lZ_{ext} \sin \theta_{30} = 0 & (17) \\ -lY_{03} \sin \theta_{30} - lX_{03} \cos \theta_{30} + N_{ext} = 0 & (18) \end{cases}$$

Bilan :

Inconnues d'inter-efforts	$I_S = \sum_{i=1}^l n_{Si} = 18$
Mobilité du mécanisme	$m_C = I_C - r_C = 1$
Rang statique	$r_S = 6(n-1) - m_C = 17$
Degré d'hyperstaticité	$h = I_S - r_S = 1$

Il est donc nécessaire de fixer (d'annuler) une inconnue d'inter-efforts pour déterminer toutes les autres.

Résolution :

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 & (1) \\ Y_{01} = 0 & (2) \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 & (3) \\ L_{01} + L_{21} + RY_{01} \cos \theta_{10} = 0 & (4) \\ RZ_{01} \sin \theta_{10} - RX_{01} \cos \theta_{10} + C_m = 0 & (5) \\ N_{01} + N_{21} = 0 & (6) \\ -X_{21} + X_{32} = 0 & (7) \\ Y_{32} = 0 & (8) \\ -Z_{21} + Z_{32} = 0 & (9) \\ -L_{21} + L_{32} + \lambda Z_{21} = 0 & (10) \\ M_{32} = 0 & (11) \\ -N_{21} - \lambda X_{21} = 0 & (12) \\ -X_{32} + X_{03} = 0 & (13) \\ -Y_{32} + Y_{03} = 0 & (14) \\ -Z_{32} + Z_{ext} = 0 & (15) \\ -L_{32} + L_{03} + hY_{03} + lZ_{ext} \cos \theta_{30} = 0 & (16) \\ -M_{32} + M_{03} - hX_{03} + lZ_{ext} \sin \theta_{30} = 0 & (17) \\ -lY_{03} \sin \theta_{30} - lX_{03} \cos \theta_{30} + N_{ext} = 0 & (18) \end{cases}$$



Avec (2) (8) et (14) : $Y_{01} = Y_{32} = Y_{03} = 0$

Avec (15) (9) et (3) : $Z_{32} = Z_{21} = -Z_{01} = Z_{ext}$

Avec (18) (13) (7) et (1) : $X_{03} = X_{32} = X_{21} = -X_{01} = \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}}$

Avec (11) et (17) : $M_{03} = h \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}} - l \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{30}$

Avec (12) et (6) : $N_{21} = -N_{01} = -\lambda \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}}$

Il reste 3 équations indépendantes à 4 inconnues :

$$\begin{cases} L_{01} + L_{21} = 0 & (4) \\ -L_{21} + L_{32} = -\lambda \cdot Z_{ext} & (10) \\ -L_{32} + L_{03} = -l \cdot Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30} & (16) \end{cases}$$

Le mécanisme est donc **hyperstatique d'ordre 1**.

La dernière équation (5) non indépendante permet d'obtenir **le couple moteur en fonction des efforts extérieurs** :

$$C_m = R \cdot Z_{ext} \cdot \sin \theta_{10} - R \cdot \frac{N_{ext}}{l \cdot \cos \theta_{30}} \cdot \cos \theta_{10}$$

Comment rendre le malaxeur mélangeur isostatique ?

Il faut annuler un inter-efforts (L_{01} L_{21} L_{32} ou L_{03}). On ne change pas les liaisons d'entrée et de sortie, il reste 2 possibilités : $L_{21} = 0$ ou $L_{32} = 0$.

Première possibilité : $L_{21} = 0$

Le torseur de la liaison L12 devient $\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0}$. Ce n'est pas une liaison connue.

Deuxième possibilité : $L_{32} = 0$

Le torseur de la liaison L32 devient $\{T(S_3 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$. Rotule de centre C.

En faisant ce changement, on fait apparaître **une mobilité interne** qui autorise la rotation de la bielle 2 autour de son propre axe (B, \vec{y}_0). Cette mobilité est inutile mais ne gêne pas le fonctionnement.

Inconnues d'inter-efforts	$I_S = \sum_{i=1}^l n_{Si} = 16$
Mobilités du mécanisme	$m_U = 1$ $m_I = 1$ $m_C = m_U + m_I = 2$
Rang statique	$r_S = 6(n-1) - m_C = 16$
Degré d'hyperstaticité	$h = I_S - r_S = 0$

Le malaxeur – mélangeur est maintenant **isostatique**. Tous les inter-efforts sont déterminés :

Avec (4) et (10) : $L_{21} = -L_{01} = \lambda.Z_{ext}$

Avec (16) : $L_{03} = -l.Z_{ext} \cdot \cos \theta_{30}$

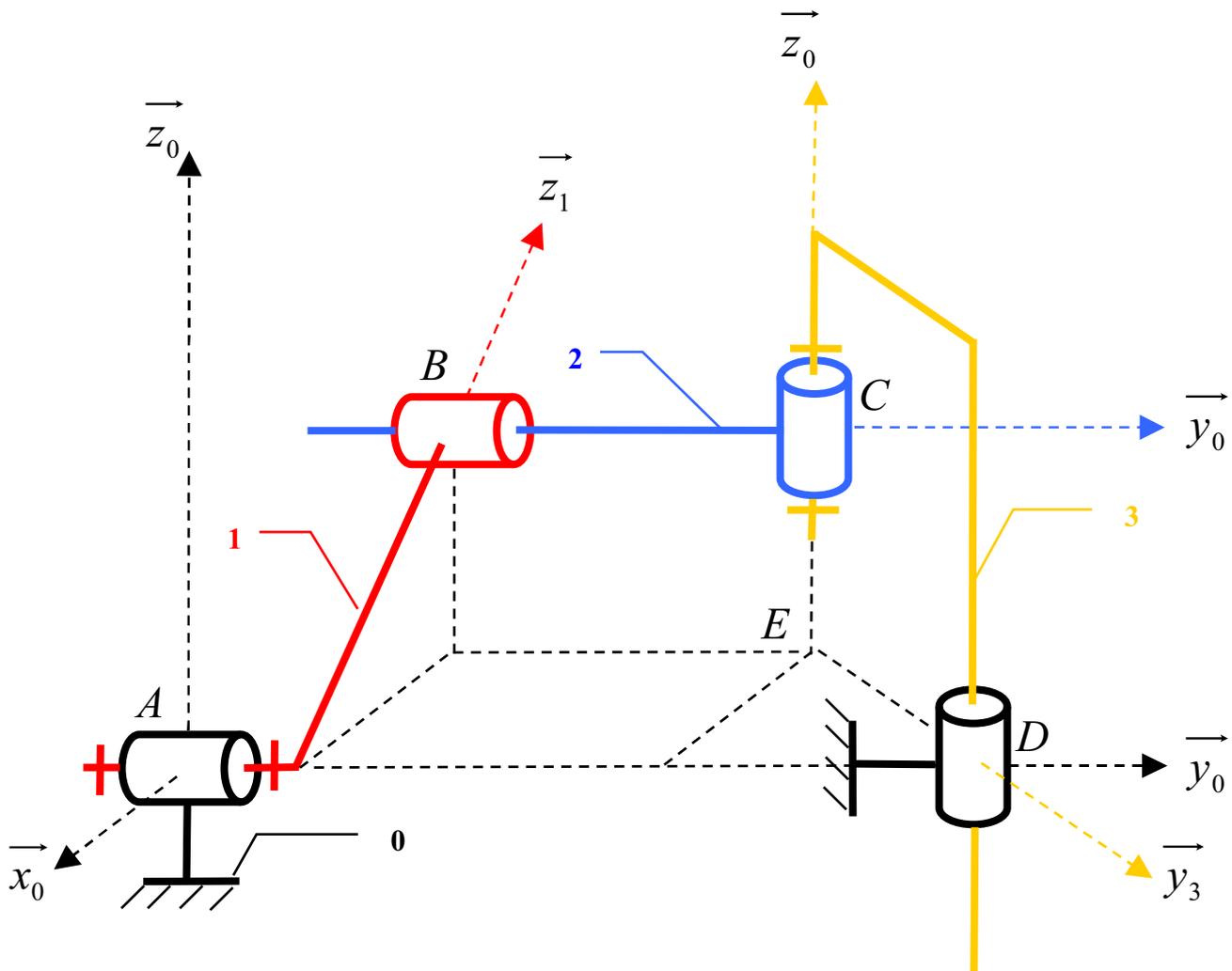
V. SYNTHÈSE

	STATIQUE	CINEMATIQUE
Nombre d'inconnues	$I_S = \sum_{i=1}^l i_{S_i}$	$I_C = \sum_{i=1}^l i_{C_i}$
Nombre d'équations	$6.(n-1)$	$6.\gamma$
Rang	$r_S \leq 6.(n-1)$ $r_S = 6.(n-1) - m_C$	$r_C \leq 6.\gamma$
Degré d'Hyperstaticité / Mobilité	$h = I_S - r_S$	$m_C = I_C - r_C$
Formules de mobilité	$h = m_C - 6.(n-1) + I_S$	$h = m_C + 6.\gamma - I_C$

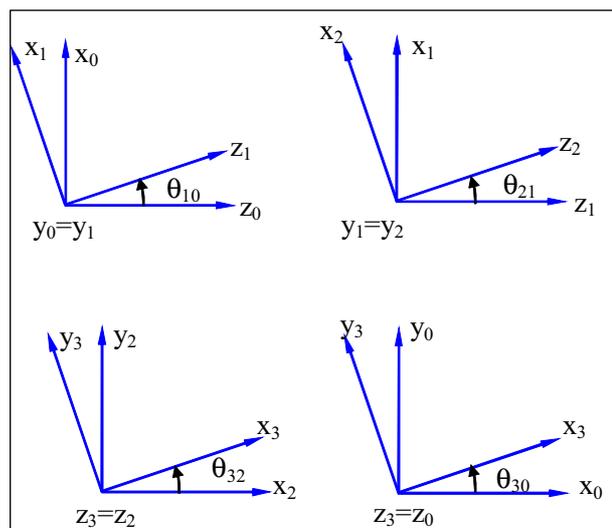
l : **nombre de liaisons** présentes dans le mécanisme

n : **nombre de solides** constituant le mécanisme bâti compris

MALAXEUR – MELANGEUR



Figures angulaires planes :



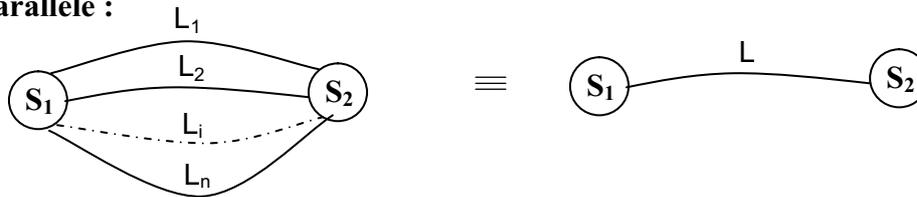
Paramétrage :

$$\overrightarrow{AB} = R \cdot \vec{z}_1 ; \overrightarrow{CB} = -\lambda \cdot \vec{y}_1 \text{ avec } \lambda > 0 ;$$

$$\overrightarrow{DA} = -d \cdot \vec{y}_0 ; \overrightarrow{CD} = l \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{z}_0 .$$

VI. LIAISON EQUIVALENTE

VI.1 - Liaisons en parallèle :



L = liaison équivalente = liaison qui autorise le même mouvement et qui transmet la même action mécanique

Torseur des inter-efforts de L :

On applique le principe fondamental de la statique à S_2 :

$$n \text{ liaisons } L_i : \quad \sum \mathcal{J}_i(S_1 \rightarrow S_2) + \mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_2) = \{0\}$$

$$\text{liaison équivalente: } \mathcal{J}(S_1 \rightarrow S_2) + \mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_2) = \{0\}$$

d'où

$$\mathcal{J}(S_1 \rightarrow S_2) = \sum_{i=1}^n \mathcal{J}_i(S_1 \rightarrow S_2) \quad (1)$$

Pour qu'une composante du torseur $\mathcal{J}(S_1 \rightarrow S_2)$ soit différente de zéro, il suffit qu'une seule composante de l'un des $\mathcal{J}_i(S_1 \rightarrow S_2)$ soit différente de zéro (il suffit qu'une seule des liaisons puisse transmettre la composante d'action mécanique).

Torseur cinématique de L :

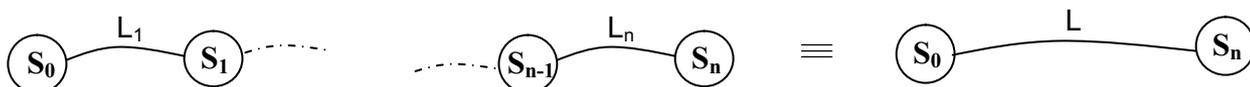
$\forall A, \vec{V}(A \in S_1/S_2)$ et $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$ sont identiques $\forall \mathcal{V}_i(S_1/S_2)$

d'où

$$\mathcal{V}(S_1/S_2) = \mathcal{V}_i(S_1/S_2) \quad \forall i \quad (2)$$

On peut aussi obtenir le torseur cinématique de L à partir du torseur statique (liaison parfaite).

VI.2 – Liaisons en série : Chaîne ouverte de solides

**Torseur des inter-efforts de L :**

On applique le principe fondamental de la statique à S_0 :

$$\mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) + \mathcal{J}(S_1 \rightarrow S_0) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) = \mathcal{J}(S_0 \rightarrow S_1)$$

... on applique le principe fondamental de la statique à $\{S_0 + S_1 + \dots + S_{i-1}\}$

$$\mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) + \mathcal{J}(S_i \rightarrow S_{i-1}) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) = \mathcal{J}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$$

On applique le principe fondamental de la statique à $\{S_0\}$ pour la liaison équivalente:

$$\mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) + \mathcal{J}(S_n \rightarrow S_0) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{J}(\text{Ext} \rightarrow S_0) = \mathcal{J}(S_0 \rightarrow S_n)$$

d'où

$$\mathcal{J}(S_0 \rightarrow S_n) = \mathcal{J}(S_{i-1} \rightarrow S_i) \quad \forall i$$

Pour qu'une composante du torseur $\mathcal{J}(S_0 \rightarrow S_n)$ soit nulle, il faut que toutes les composantes correspondantes des $\mathcal{J}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$ soient nulles.

Torseur cinématique de L:

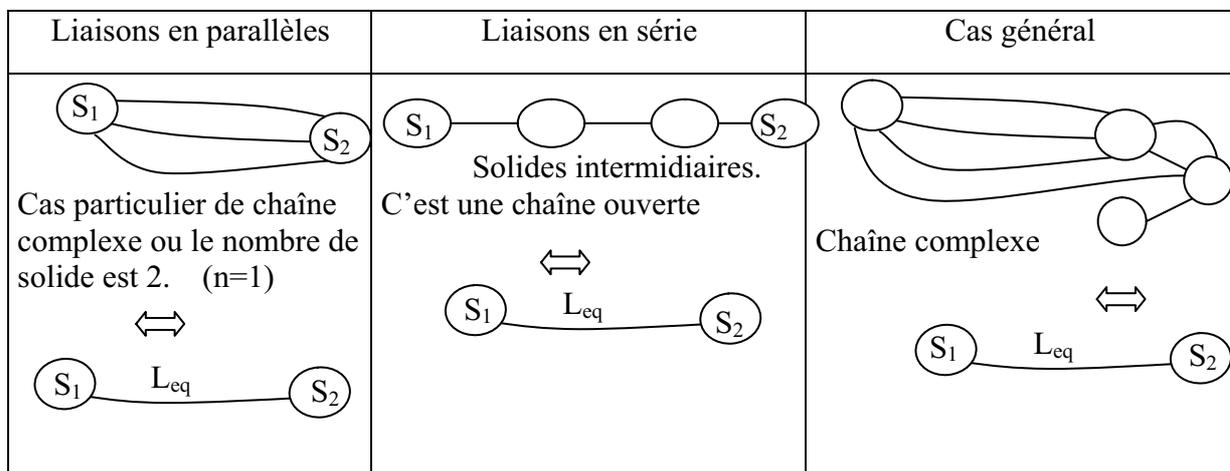
Composition des mouvements: $\mathcal{V}(S_n/S_0) = \mathcal{V}(S_n/S_{n-1}) + \dots + \mathcal{V}(S_1/S_0)$

$$\mathcal{V}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}(S_i/S_{i-1})$$

Remarque : L'objectif de ce paragraphe n'est pas uniquement la recherche d'une liaison équivalente à des liaisons, car on peut parfois, par exemple, chercher à rendre une liaison stable ou rigide ou la remplacer par deux liaisons pour rendre le système plus rigide.

Une liaison équivalente peut être isostatique ou hyperstatique et admet sa mobilité cinématique.

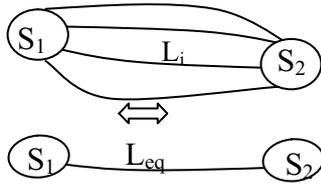
On distingue une liaison équivalente à des liaisons en série ou à des liaisons en parallèles ou les deux :



Une liaison étant connue soit par son torseur cinématique ou par son torseur statique (voir tableau des liaisons) on peut donc trouver la liaison équivalente par la recherche de son torseur statique (étude statique) ou par la recherche de son torseur cinématique (fermeture cinématique)

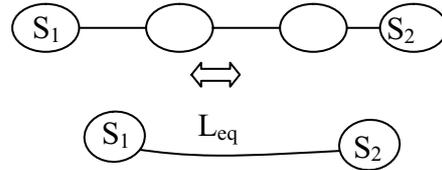
La méthode est présentée dans le tableau de la page suivante.

Liaisons en parallèles



L_{eq} est isostatique si on peut déterminer toutes les inconnues des liaisons L_i en fonction des inconnues de L_{eq} .

Liaisons en série

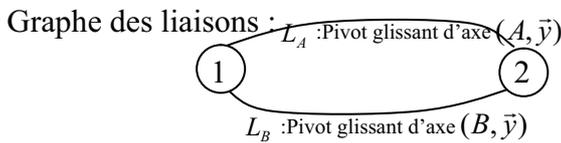
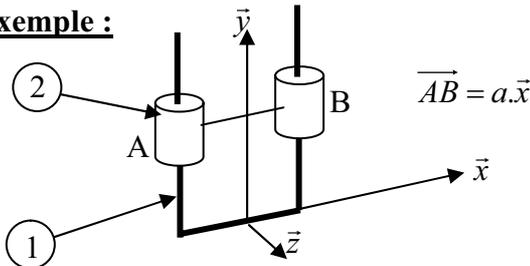


L_{eq} est toujours isostatique

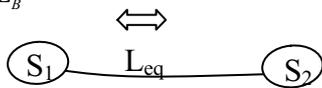
Torseur statique de la liaisons equivalente	Torseur cinématique de la liaisons equivalente
$\{\tau_{eq}\} = \sum_1^{N_L} \{\tau_i\}$ $h = N_S - r_s$	$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \{\mathcal{G}_i\}$ $i = 1 \text{ à } N_L$ $m = N_c - r_c$ <p>= nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente.</p>

Torseur statique de la liaisons equivalente	Torseur cinématique de la liaison equivalente
$\{\tau_{eq}\} = \{\tau_i\}$ $i = 1 \text{ à } N_L$ $\mathbf{h} = 0$	$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \sum_1^{N_L} \{\mathcal{G}_i\}$

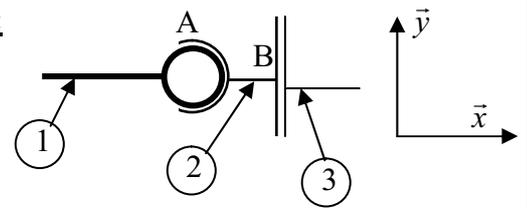
Exemple :



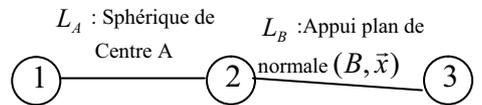
cherchons la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèles L_A et L_B



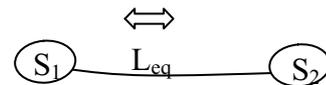
Exemple :



Graphe des liaisons



cherchons la liaison équivalente aux deux liaisons en série L_A et L_B



$$\{\tau_{eq}\} = \{\tau_A\} + \{\tau_B\}$$

$$= \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Z_A \vec{z} \\ L_A \vec{x} + N_A \vec{z} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Z_B \vec{z} \\ L_B \vec{x} + N_B \vec{z} + AB \wedge X_B \vec{x} + Z_B \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

$$= \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Z_A \vec{z} \\ L_A \vec{x} + N_A \vec{z} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Z_B \vec{z} \\ L_B \vec{x} + N_B \vec{z} - a Z_B \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

$$= \begin{Bmatrix} X_A + X_B & L_A + L_B \\ 0 & -a Z_B \\ Z_A + Z_B & N_A + N_B \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ 0 & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_A$$

d'où L_{eq} est une liaison glissière de direction \vec{y} . Elle est hyperstatique de degré 3. Les 3 inconnues hyperstatiques sont:

X_A (ou X_B), L_A (ou L_B) et N_A (ou N_B)

$$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \{\mathcal{G}_A\}_A = \{\mathcal{G}_B\}_A$$

$$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \beta_A \cdot \vec{y} \\ v_A \vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \beta_B \cdot \vec{y} \\ v_B \vec{x} + AB \wedge \beta_B \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_e u_e \\ \beta_e v_e \\ \gamma_e w_e \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \beta_A \cdot \vec{y} \\ v_A \vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \beta_B \cdot \vec{y} \\ v_B \vec{x} + a \beta_B \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

D'où $\begin{cases} \alpha_e = 0 = 0 & u_e = v_A = v_B \\ \beta_e = \beta_A = \beta_B & v_e = 0 = 0 \\ \gamma_e = 0 = 0 & w_e = 0 = a \beta_B \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \alpha_e = 0 & u_e = v_A = v_B \neq 0 \\ \beta_e = 0 & v_e = 0 \\ \gamma_e = 0 & w_e = 0 \end{cases}$

d'où L_{eq} est une liaison glissière de direction \vec{y} .

$$\{\tau_{eq}\} = \{\tau_A\}_A = \{\tau_B\}_A$$

$$\{\tau_{eq}\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & M_B \\ 0 & N_B \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & M_B \\ 0 & N_B \end{Bmatrix}_A$$

d'où $\begin{cases} X_e = X_A = X_B & L_e = 0 = 0 \\ Y_e = Y_A = 0 & M_e = 0 = M_B \\ Z_e = Z_A = 0 & N_e = 0 = N_B \end{cases}$

D'où $\begin{cases} X_e = X_A = X_B \neq 0 & L_e = 0 \\ Y_e = 0 & M_e = 0 \\ Z_e = 0 & N_e = 0 \end{cases}$

d'où L_{eq} est une liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{x}) = (B, \vec{x})$.

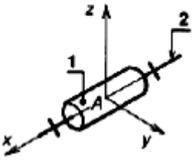
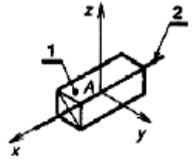
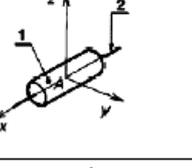
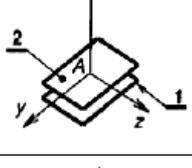
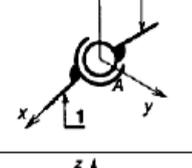
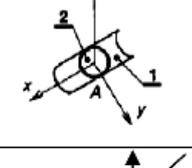
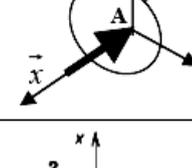
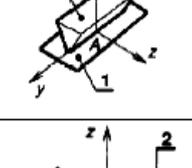
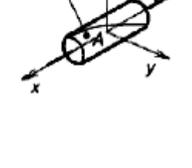
$$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \{\mathcal{G}_A\}_A + \{\mathcal{G}_B\}_A$$

$$\{\mathcal{G}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ 0 & v_B \\ 0 & w_B \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_e u_e \\ \beta_e v_e \\ \gamma_e w_e \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ 0 & v_B \\ 0 & w_B \end{Bmatrix}_A$$

D'où $\begin{Bmatrix} \alpha_e u_e \\ \beta_e v_e \\ \gamma_e w_e \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_A + \alpha_B & 0 \\ \beta_A & v_B \\ \gamma_A & w_B \end{Bmatrix}_A$

Donc L_{eq} est une liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{x}) = (B, \vec{x})$.

Désignation de la liaison	Schéma spatiale	Torseur d'action Mécanique transmissible (Torseur statique)	Torseur cinématique (torseur du mouvement)	Forme des torseurs conservée pour
Pivot d'axe (A, \bar{x})		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Sur l'axe (A, \bar{x})
Glissière d'axe (A, \bar{x})		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	A quelconque
Pivot glissant d'axe (A, \bar{x})		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & u_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Sur l'axe (A, \bar{x})
Appui plan de normale (A, \bar{x})		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & M_{1 \rightarrow 2} \\ 0 & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & 0 \\ 0 & v_{2/1} \\ 0 & w_{2/1} \end{Bmatrix}$	A quelconque
Rotule de centre A (ou sphérique)		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & 0 \\ \beta_{2/1} & 0 \\ \gamma_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Centre A
Linéaire annulaire d'axe (A, \bar{x}) (ou sphère-cylindre)		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2} & 0 \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & u_{2/1} \\ \beta_{2/1} & 0 \\ \gamma_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}$	Centre A
Ponctuelle de normale (A, \bar{x}) (ou sphère-plan)		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & 0 \\ \beta_{2/1} & v_{2/1} \\ \gamma_{2/1} & w_{2/1} \end{Bmatrix}$	Sur La normale (A, \bar{x})
Linéaire rectiligne de normale (A, \bar{x}) et de contact (A, \bar{y}) (ou cylindre-plan)		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & 0 \\ \beta_{2/1} & v_{2/1} \\ 0 & w_{2/1} \end{Bmatrix}$	Plan (A, \bar{x} , \bar{y})
Hélicoïdale d'axe (A, \bar{x})		$\left\{ 1 \rightarrow 2 \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & M_{1 \rightarrow 2} \\ Z_{1 \rightarrow 2} & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$ <i>avec $L_{12} = -\frac{p}{2\pi} X_{12}$ pour le filetage à droite p : pas du filetage en mm/tr</i>	$\left\{ \mathcal{G}(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2/1} & u_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ <i>avec $u_{21} = \frac{p}{2\pi} \alpha_{21}$ pour le filetage à droite p : pas du filetage en mm/tr</i>	Sur l'axe (A, \bar{x})