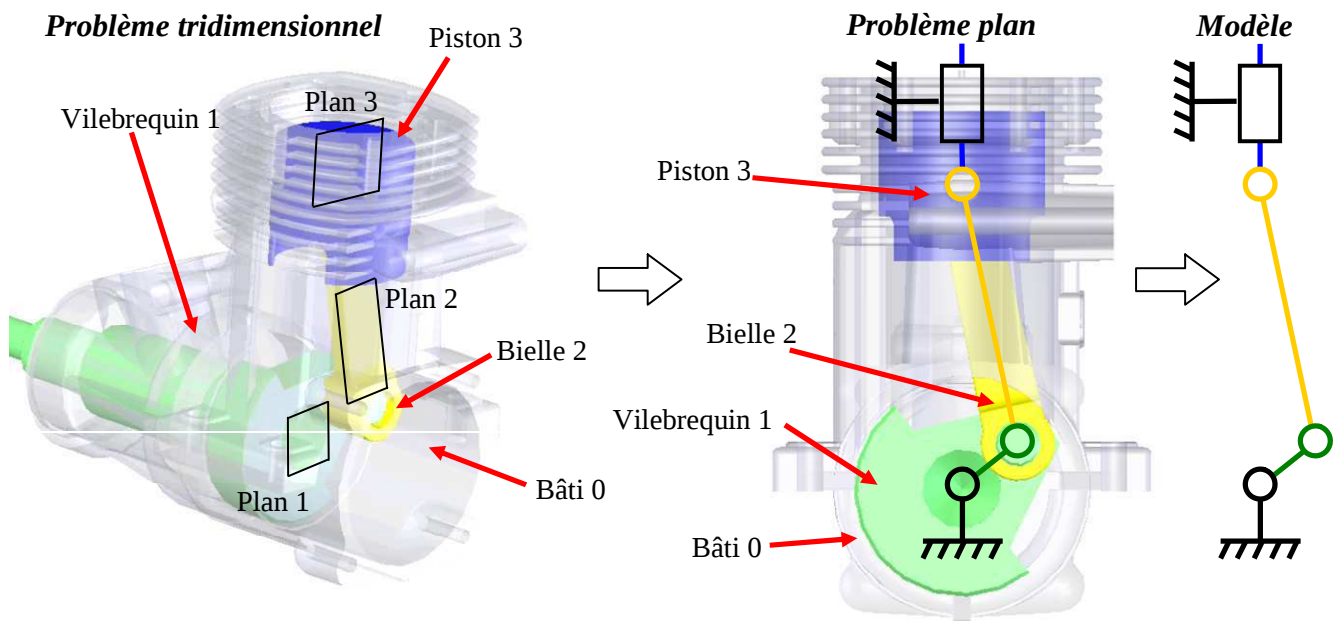




On s'intéresse au micromoteur d'aéromodélisme précédemment rencontré. Ce système permet de mettre en mouvement de rotation continue par rapport au bâti 0 l'hélice (non représentée sur la vue mais qui est en liaison complète avec le vilebrequin 1) à partir de la translation alternée par rapport au bâti 0 du piston 3. On constate que les 3 plans 1, 2 et 3 (respectivement rattachés aux solides 1, 2 et 3) restent coïncidents au cours du mouvement : c'est donc un problème plan sur plan. Cette particularité permet de simplifier le modèle 3D en un problème plan pour lequel on pourra utiliser des techniques de résolution graphiques simples et rapides.

Exemple de système mécanique MOTEUR DE MODELE REDUIT

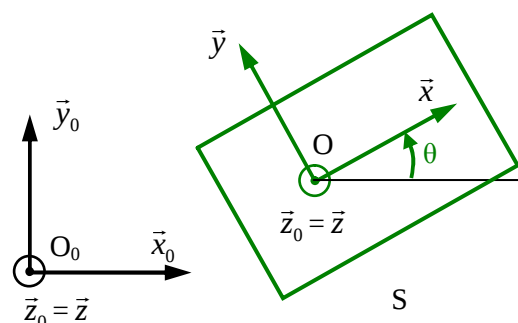
De nombreux mécanismes présentent un cas particulier de mouvement : c'est le mouvement plan sur plan. Cette particularité permet d'utiliser des propriétés originales afin de déterminer rapidement la cinématique de ces mouvements : ce sont les méthodes de résolution graphiques. Ce cours est donc consacré à l'étude de ce cas particulier et aux deux méthodes graphiques associées (équiprojectivité et CIR).

1. Mouvement plan sur plan

Définition

Soit un solide S associé au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{z}_0)$ en mouvement par rapport au repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Si le plan $P(O \vec{x} \vec{y})$ lié à S reste constamment confondu avec le plan $P_0(O_0 \vec{x}_0 \vec{y}_0)$ lié à R_0 alors le mouvement de S par rapport à R est qualifié de mouvement plan sur plan.



Propriétés

La définition précédente implique les deux conséquences suivantes :

- Les vecteurs vitesse de tous les points de S en mouvement par rapport au repère R_0 restent parallèles au plan $P(O \vec{x} \vec{y})$ (ou $P_0(O_0 \vec{x}_0 \vec{y}_0)$) : $\forall M \in S, \overrightarrow{V_{M \in S / R_0}} \cdot \vec{z} = 0$.



- Le vecteur instantané de rotation de S par rapport à R0 est constamment colinéaire à la normale au plan du mouvement : $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \vec{z} = \vec{0}$.

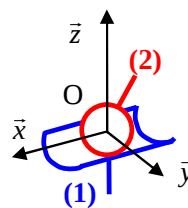
Conséquence

Le paramétrage du solide (S) par rapport au repère R0 ne nécessite que 3 paramètres : 2 translations dans le plan et 1 rotation d'axe perpendiculaire au plan. Le torseur cinématique de S par rapport à R0 est donc de la forme suivante :

$$\{C_{S/R_0}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{M, S/R_0}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Exemple

Si on considère une liaison linéaire annulaire d'axe (O, $\vec{x}$) entre 2 solides 1 et 2, la forme générale de ce torseur dans le cas tridimensionnel est donnée ci-contre. Si le problème est plan alors certains termes du torseur non nuls dans le cas tridimensionnel deviennent nécessairement nuls.



$$\{C_{2/1}\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Simplifications dans le cas d'un problème plan

$$\left\{ \begin{array}{cc} \cancel{\Omega_x} & v_x \\ \cancel{\Omega_y} & 0 \\ \Omega_z & \cancel{0} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \left\{ \begin{array}{cc} \Omega_x & \cancel{v_x} \\ \cancel{\Omega_y} & 0 \\ \cancel{\Omega_z} & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \left\{ \begin{array}{cc} \cancel{\Omega_x} & v_x \\ \Omega_y & \cancel{0} \\ \cancel{\Omega_z} & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ce type de raisonnement se généralise à tous les torseurs des liaisons et permet ainsi de minimiser le nombre d'inconnues cinématiques. Il n'y a que 3 Degrés De Liberté (DDL) au maximum par liaison dans un problème plan.

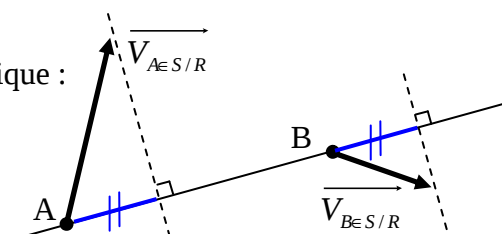
2. Equiprojectivité

Définition

Le champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable S en mouvement par rapport à un repère R est équiprojectif, c'est-à-dire :

$$\forall A \in S \text{ et } \forall B \in S \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{A \in S/R}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{B \in S/R}}$$

Interprétation graphique :





Pour appliquer la relation d'équiprojectivité il est indispensable que les deux vecteurs vitesse soient ceux de deux points différents du même solide.

3. Méthode de résolution graphique par équiprojectivité

L'objectif d'une résolution graphique est de déterminer un ou des vecteurs vitesses à partir des données d'entrée.

Exemple du micromoteur. On connaît en données d'entrées la vitesse de rotation de la manivelle par rapport au bâti 0 (1000 tr/min), le rayon $OB=3\text{cm}$ et on impose une échelle des vitesses de 1cm pour 1m/s . L'objectif est de déterminer la vitesse de sortie du piston 3 par rapport au bâti 0.

Etape 1. Définition des mouvements entièrement connus (entrée)

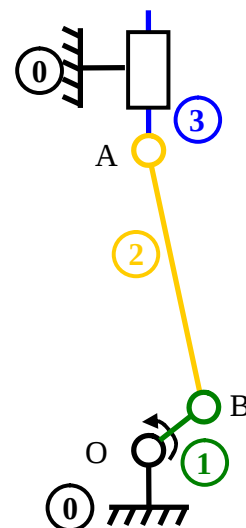
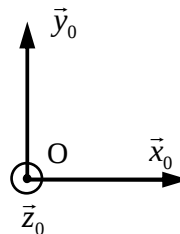
L'objectif est de tracer un vecteur vitesse en un point M à partir des données d'entrée. On peut avoir imposé en mouvement d'entrée :

- Un mouvement de translation
 - direction : celle de la liaison glissière
 - sens : donné (sur le dessin ou dans l'énoncé)
 - norme : donnée (en m/s)
- Un mouvement de rotation autour d'un point (O par exemple)
 - direction : perpendiculaire au rayon OM
 - sens : donné par le sens de la rotation (sur le dessin ou dans l'énoncé)
 - norme : $OM \times \omega$ avec ω vitesse de rotation en rad/s (on utilise l'échelle des longueurs pour avoir la vraie dimension du rayon OM).

Le tracé du vecteur vitesse se fait ensuite en utilisant l'échelle des vitesses (donnée imposée ou à fixer).

Exemple du micromoteur

On a en données d'entrées :
 Rotation de la manivelle $N=1000 \text{ tr/min}$
 $OB=3\text{cm}$
 Echelle des vitesses de 1cm pour 1m/s



Un mouvement de rotation est imposé en entrée $\rightarrow$ il faut déterminer

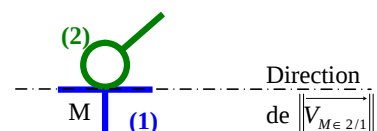
$\|\vec{V}_{B \in 1/0}\|$:

- direction :
- sens :
- norme :

Etape 2. Définition des mouvements partiellement connus (sorties)

On utilise à cette étape les mêmes propriétés que pour l'étape 1 mais ici seules les directions sont connues.

Pour les liaisons ponctuelles, on peut donner la direction de la vitesse du point de contact M.





Exemple du micromoteur

- Le mouvement de sortie :

- La direction de $\overrightarrow{V_{A \in 3/0}}$:

Etape 3. Progression de solide en solide

On utilise la composition des vecteurs vitesses pour changer de solide et ainsi faire propager l'information connue en allant de l'entrée vers la sortie (ou de la sortie vers l'entrée, c'est le même principe). On utilise ensuite les informations sur les liaisons ou les mouvements pour simplifier les relations de composition de mouvement.

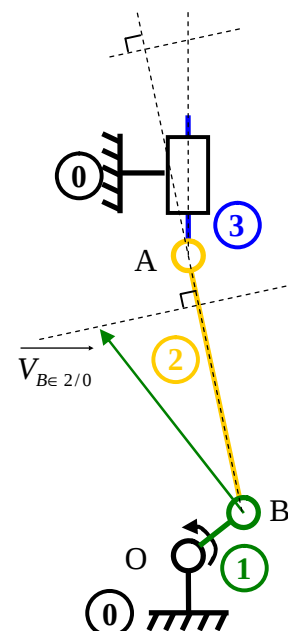
Exemple du micromoteur

$\overrightarrow{V_{A \in 3/0}}$ 	$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$
--	--

Etape 4. Ecriture de la relation entre les vitesses de deux points liés à un même solide

On utilise l'équiprojectivité pour trouver une norme ou une projection d'un vecteur vitesse inconnu à partir de la vitesse connue en un autre point.

Exemple du micromoteur



Etape 5. Mesure de la vitesse en sortie

On recommence plusieurs fois les opérations précédentes si besoin jusqu'à obtenir le(s) vecteur(s) vitesse recherché(s). On mesure la longueur du vecteur en sortie et en utilisant l'échelle des vitesses, on donne la norme de la vitesse (le sens et la direction sont donnés sur la figure).

Exemple du micromoteur

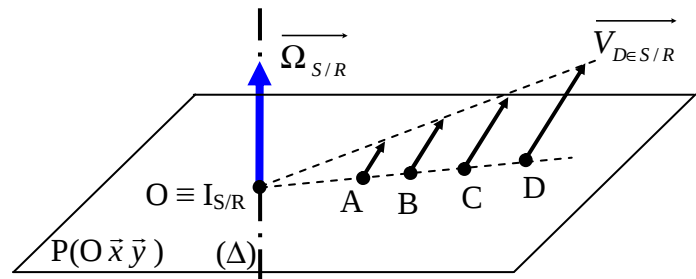
.....



4. Centre instantané de rotation (CIR)

Soit un solide S en mouvement plan sur plan dans $P(O \vec{x} \vec{y})$ par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que :

$$\{C_{S/R}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/R} \neq \vec{0} \\ \vec{V}_{A \in S/R} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{V}_{A \in S/R} = 0.$$



On a vu précédemment que dans ce cas le torseur est un **glisseur** et qu'il admet un axe instantané de rotation (Δ) parallèle à $\vec{\Omega}_{S/R}$ avec $\nabla O \in (\Delta)$, $\vec{V}_{O \in S/R} = \vec{0}$.

On appelle centre instantané de rotation de S/R le point $I_{S/R}$ intersection entre le plan $P(O \vec{x} \vec{y})$ et l'axe instantané de rotation (Δ) . Par conséquent est le point du plan $P(O \vec{x} \vec{y})$ tel que $\vec{V}_{I_{S/R} \in S/R} = \vec{0}$

Recherche graphique du CIR

.....

.....

Il faut connaître au moins deux droites supports (directions) non parallèles de deux vecteurs vitesse différents pour déterminer le CIR d'un solide par rapport à son référentiel d'étude.

Remarques :

- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Pour un mouvement de rotation plane, le CIR est confondu avec le centre de la rotation.
- A l'instant $t + \Delta t$ le CIR peut être différent (d'où le nom instantané).

Base et Roulante :

Si on considère le mouvement d'un solide S par rapport à un repère R , on appelle :

- **Base** : la trajectoire du CIR $I_{S/R}$ par rapport à R .
- **Roulante** : la trajectoire du CIR $I_{S/R}$ par rapport au solide S .

Petit moyen mnémotechnique : La base est toujours la trajectoire du CIR par rapport au repère qui sert de base (c'est-à-dire de référence) .



5. Méthode de résolution graphique par utilisation du CIR

L'objectif d'une résolution graphique est de déterminer un ou des vecteurs vitesses à partir des données d'entrée.

Exemple du micromoteur. On connaît en données d'entrées la vitesse de rotation de la manivelle par rapport au bâti 0 (1000 tr/min), le rayon $OB=3\text{cm}$ et on impose une échelle des vitesses de 1cm pour 1m/s . L'objectif est de déterminer la vitesse de sortie du piston 3 par rapport au bâti 0.

Etape 1. Définition des mouvements entièrement connus (entrée)

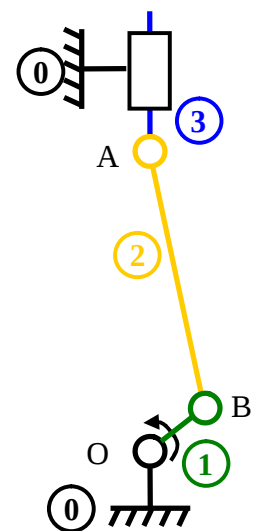
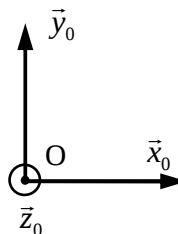
L'objectif est de tracer un vecteur vitesse en un point M à partir des données d'entrée. On peut avoir imposé en mouvement d'entrée :

- Un mouvement de translation
 - direction : celle de la liaison glissière
 - sens : donné (sur le dessin ou dans l'énoncé)
 - norme : donnée (en m/s)
- Un mouvement de rotation autour d'un point (O par exemple)
 - direction : perpendiculaire au rayon OM
 - sens : donné par le sens de la rotation (sur le dessin ou dans l'énoncé)
 - norme : $OM \times \omega$ avec ω vitesse de rotation en rad/s (on utilise l'échelle des longueurs pour avoir la vraie dimension du rayon OM).

Le tracé du vecteur vitesse se fait ensuite en utilisant l'échelle des vitesses (donnée imposée ou à fixer).

Exemple du micromoteur

On a en données d'entrées :
 Rotation de la manivelle $N=1000\text{ tr/min}$
 $OB=3\text{cm}$
 Echelle des vitesses de 1cm pour 1m/s



Un mouvement de rotation est imposé en entrée $\rightarrow$ il faut déterminer

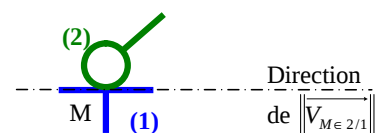
$$\|\vec{V}_{B \in 1/0}\| :$$

- direction :
- sens :
- norme :

Etape 2. Définition des mouvements partiellement connus (sorties)

On utilise à cette étape les mêmes propriétés que pour l'étape 1 mais ici seules les directions sont connues.

Pour les liaisons ponctuelles, on peut donner la direction de la vitesse du point de contact M.





Exemple du micromoteur

- Le mouvement de sortie :

- La direction de $\vec{V}_{A \in 3/0}$:

Etape 3. Progression de solide en solide

On utilise la composition des vecteurs vitesses pour changer de solide et ainsi faire propager l'information connue en allant de l'entrée vers la sortie (ou de la sortie vers l'entrée, c'est le même principe). On utilise ensuite les informations sur les liaisons ou les mouvements pour simplifier les relations de composition de mouvement.

Exemple du micromoteur

$\vec{V}_{A \in 3/0}$



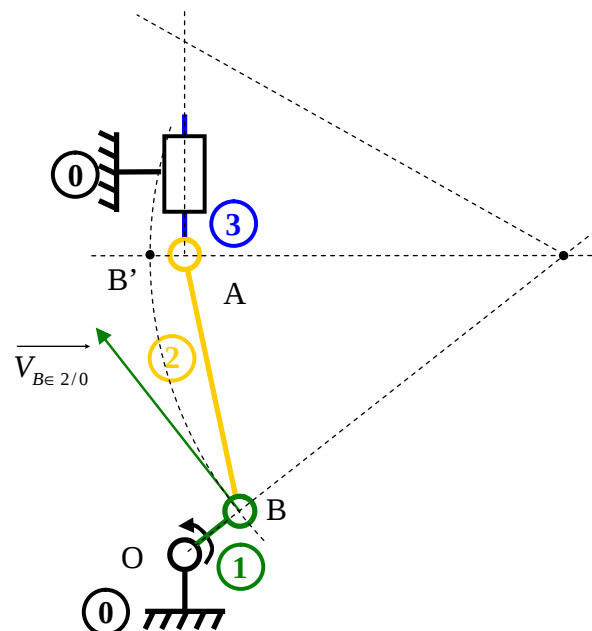
$\vec{V}_{B \in 1/0}$



Etape 4. Ecriture de la relation entre les vitesses de deux points liés à un même solide

On utilise le CIR pour trouver une norme d'un vecteur vitesse inconnu à partir de la vitesse connue en un autre point.

Exemple du micromoteur



Etape 5. Mesure de la vitesse en sortie

On recommence plusieurs fois les opérations précédentes si besoin jusqu'à obtenir le(s) vecteur(s) vitesse recherché(s). On mesure la longueur du vecteur en sortie et en utilisant l'échelle des vitesses, on donne la norme de la vitesse (le sens et la direction sont donnés sur la figure).

Exemple du micromoteur



Remarque importante

On constate que les résolutions graphiques par le CIR et l'équiprojectivité permettent de retrouver le même résultat final et qu'elles sont identiques sur les étapes 1, 2, 3 et 5. On peut donc utiliser l'une ou bien l'autre pour résoudre un problème.

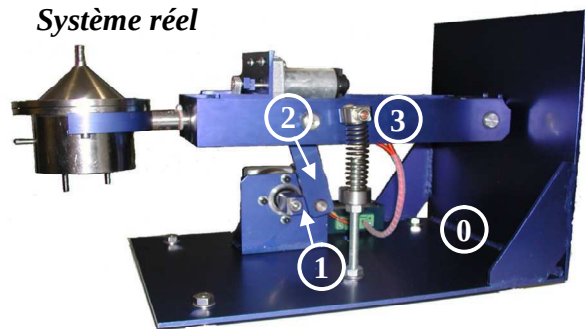
6. Théorème des 3 CIR

Soient 3 solides S_1 , S_2 et S_3 en mouvement plan (plan commun aux trois). Le mouvement de S_i par rapport à S_j est caractérisé par un CIR I_{ij} . On montre que les trois CIR $I_{2/1}$, $I_{3/2}$ et $I_{1/3}$ sont alignés. En prenant 3 solides quelconques et connaissant 2 CIR, on peut alors déterminer sur quelle droite se trouve le troisième CIR et utiliser ensuite les propriétés des CIR pour trouver des vecteurs vitesses inconnus.

Exemple d'un agitateur médical.

Système à double excentrique (transformation d'un mouvement de rotation continue en rotation discontinue). Les solides S_1 et S_3 sont en liaison pivot avec le bâti S_0 . La bielle S_2 est en liaison pivot avec S_1 et S_3 .

Système réel



Modèle

