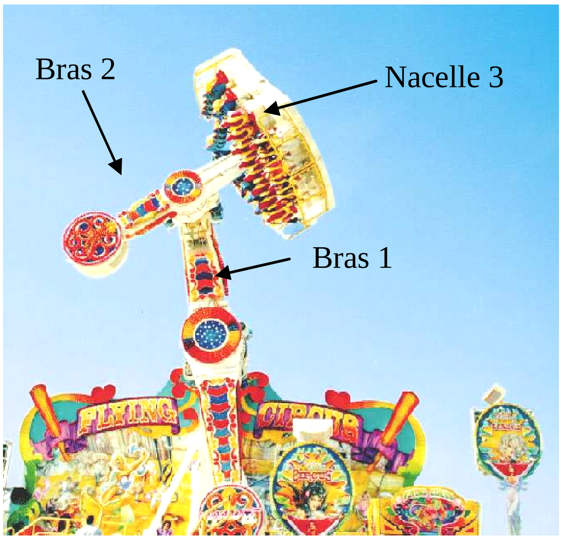
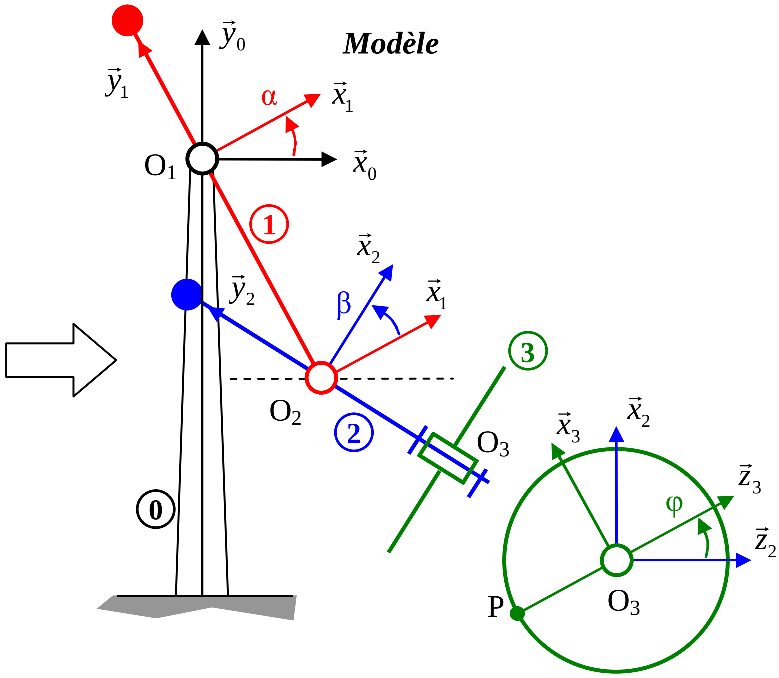
Système réel ***Modèle***





Le manège Magic-arms est une chaine cinématique ouverte possédant 3 degrés de liberté, par conséquent le mouvement du solide 3, situé en bout de chaine, par rapport au repère 0 est un mouvement complexe. Pour simplifier l'étude il peut être judicieux de décomposer ce mouvement complexe en mouvements simples. Par exemple on peut décomposer le mouvement complexe de 3 par rapport à 0 par 3 mouvements simples : 3 par rapport à 2, puis de 2 par rapport à 1 et 1 par rapport à 0.

Exemple de système mécanique

MANEGE MAGIC-ARMS

Pour aborder une étude cinématique, on s'intéresse systématiquement à la nature du mouvement des solides et on constate souvent que ce mouvement peut être complexe. Pour calculer un vecteur vitesse, il peut donc être judicieux de décomposer ce mouvement complexe en plusieurs mouvement simples : c'est la composition de mouvement.

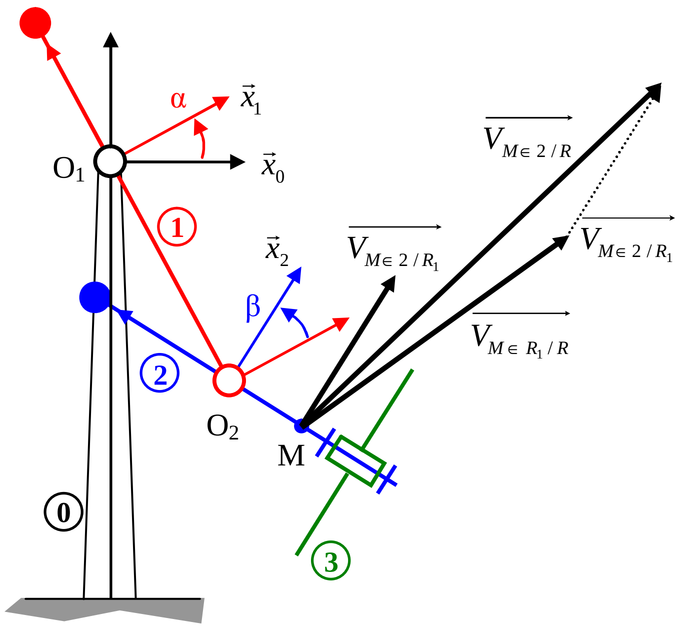
1. Composition des vecteurs vitesses

Définition

Soit le solide 2 en mouvement par rapport au repère R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R. Pour tout point M ∈ 2 on montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}}$$

- $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}}$ est le vecteur vitesse absolue (l'observateur est fixe par rapport à R et observe le mouvement de M)
- $\overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}}$ est le vecteur vitesse relative (l'observateur est fixe par rapport à R_1 et observe le mouvement de M)
- $\overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$ est le vecteur vitesse d'entrainement (l'observateur est fixe par rapport à R et observe le mouvement du point de R_1 qui coïncide à l'instant t avec le point M)



Rappel ! Ne pas oublier les précautions d'usage pour le calcul du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M\in\ R_1/R}}$ car le point M est cinématiquement lié au repère R_1 mais n'a aucune réalité physique sur le solide 1.

Démonstration de la formule $\overrightarrow{V_{M\in\ 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in\ 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in\ R_1/R}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Généralisation

De manière encore plus générale, si un solide S est en mouvement par rapport au repère R_n, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{n-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_i, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{i-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R, alors, pour tout point appartenant à S :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in\ S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in\ S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in\ R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in\ R_1/R}}}$$

La composition des vecteurs vitesses reprend, au niveau des repères, le principe de la relation de Chasles des vecteurs.

Lorsqu'il y a plus de 3 repères en jeu, les termes « vecteur vitesse relative », et « vecteur vitesse d'entrainement ne sont plus significatifs.

2/1 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_2, \vec{z})$

3/0 : mouvement complexe

Exemple du manège Magic-Arms : $\overrightarrow{V_{P\in\ 3/0}} = \overrightarrow{V_{P\in\ 3/2}} + \overrightarrow{V_{P\in\ 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in\ 1/0}}$

3/2 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O, \vec{y}_2)$

1/0 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_1, \vec{z})$

2. Composition des vecteurs accélération

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Composition des vecteurs vitesse instantané de rotation

Définition

Si on considère le solide 2 auquel est associé le repère R_2, en mouvement par rapport au repère R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R, les mouvements relatifs des 3 repères R, R_1, R_2 induisent l'existence des 3 vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$, $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$. On montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

Démonstration de la formule $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$

On considère un vecteur dépendant du temps $\vec{u}$

Par définition on a :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{u} \quad (1)$$

et $$\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{u} \quad (2)$$

En soustrayant membre à membre les 2 relations précédentes, (1) – (2), on obtient :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \left(\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}\right) \wedge \vec{u}$$

Or par définition $\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{u}$

On en déduit donc que : $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$

Généralisation

De manière encore plus générale, si un solide S est en mouvement par rapport au repère R_n, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{n-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_i, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{i-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R, alors, pour tout point appartenant à S :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overrightarrow{\Omega_{S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

2/1 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_2, \vec{z})$

3/0 : *mouvement complexe*

Exemple du manège Magic-Arms : $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

3/2 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O, \vec{y}_2)$

1/0 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_1, \vec{z})$