Génie Mécanique : Math-Sup TSI	CPGE : M[ed] V Beni-Mellal
	Doc : 1/4
OUTILS MATHÉMATIQUES : LES TORSEURS	Prof : M.ELBEKRI

1. Définition et notations

1.1.Notations.

Un torseur est un outil Mathématiques qui associe une résultante $\vec{R}$ et un moment $\overrightarrow{M_A}$ exprimé en un point A quelconque de l'espace appelé point de réduction.
Notations usuelles à adopter à défaut de toutes notations imposées par le sujet.

$$\boxed{\{\mathrm{T}_{Syst}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}}$$

Les notations de la résultante et du moment évolueront ultérieurement en fonction des grandeurs physiques qu'elles représenteront.

<u>Les notions de résultante et moment seront quant à elles toujours les éléments de réduction du torseur quelles que soient les grandeurs physiques modélisées ou représentées.</u>

<u>Remarque :</u>

Les vecteurs sont des grandeurs intrinsèques, il n'est donc pas nécessaire d'exprimer la résultante et le moment dans la même base ou repère.

1.2.Définitions.

*Soit le système de **n** glisseurs : $(P_i,\overrightarrow{V_i})$.*

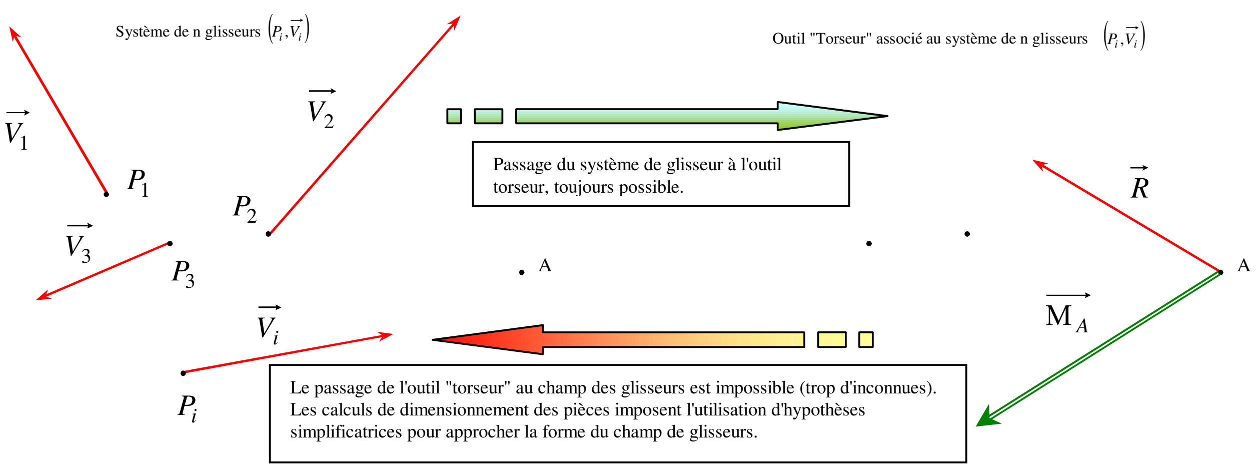
Le torseur, associé à un système de n glisseurs $(P_i,\overrightarrow{V_i})$, exprimé au point A, sera défini par :

$$\boxed{\{\mathrm{T}_{Syst}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_{\Re} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{V_i}\\ \overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\overrightarrow{V_i}\end{matrix}\right\}}$$

Définition Mathématiques : Un torseur est l'ensemble d'un champ antisymétrique et de sa résultante.

2.Représentation graphique

Usuellement et l'absence de toute information dans le sujet ou de toute association à des grandeurs physiques identifiées, la résultante d'un torseur est représentée par une simple flèche. Le moment est représenté par une double flèche. A défaut d'outils graphiques adaptés on pourra jouer sur l'épaisseur des traits de la résultante et du moment pour les différencier.



Cette représentation (simple flèche, double flèche) pourra être interverti ultérieurement en fonction des grandeurs physiques représentées par l'outil torseur.

3. Changement de point d'écriture d'un torseur "transport d'un torseur".

Soit le torseur $\{\mathrm{T}_{Syst}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$

L'expression de ce même torseur en un autre point B de l'espace sera : $\boxed{\{\mathrm{T}_{Syst}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B} \end{Bmatrix}}$

4. Propriétés et opérations sur les torseurs.

4.1.Addition de torseurs

Soit les torseurs $\{\mathrm{T}_{Syst-1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$ *et* $\{\mathrm{T}_{Syst-2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_B} \\ \overrightarrow{M_B} \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\{\mathrm{T}_{Syst}\} = \{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-2}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{R} = \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} \\ \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R_B} \end{Bmatrix}}$$

4.2.Multiplication d'un torseur par un scalaire.

Soit le torseur : $\{\mathrm{T}_{Syst-1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\lambda \bullet \{\mathrm{T}_{Syst-1}\} = \lambda \bullet {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda \bullet \overrightarrow{R_A} \\ \lambda \bullet \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}}$$

4.3.Comoment de deux torseurs.

Le comonent de deux torseurs est un scalaire.

Soit les torseurs $\{\mathrm{T}_{Syst-1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M'_A} \end{Bmatrix}$ *et* $\{\mathrm{T}_{Syst-2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M''_A} \end{Bmatrix}$

Le comoment des torseurs $\{\mathrm{T}_{Syst-1}\}$ *et* $\{\mathrm{T}_{Syst-2}\}$ *usuellement noté* **C** *est égal à* $\boxed{\mathbf{C} = \overrightarrow{R_1} \bullet \overrightarrow{M''_A} + \overrightarrow{R_2} \bullet \overrightarrow{M'_A}}$.

Le calcul du comoment implique que les deux torseurs soient exprimés au même point de réduction.

Le comoment est indépendant du point de réduction.

4.4.Autres propriètés.

- *Commutativité :* $\{\mathrm{T}_{Syst}\} = \{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-2}\} = \{\mathrm{T}_{Syst-2}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-1}\}$
- *Associativité :* $\{\mathrm{T}_{Syst}\} = \{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + (\{\mathrm{T}_{Syst-2}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-3}\}) = (\{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-2}\}) + \{\mathrm{T}_{Syst-3}\} = \{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-2}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-3}\}$
- *Eléments neutres :* $1 \bullet {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$ *et* ${}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \bullet {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$
- *Elément symétrique :* ${}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} -\overrightarrow{R_A} \\ -\overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- *Distributivité :* $\lambda \bullet [\{\mathrm{T}_{Syst-1}\} + \{\mathrm{T}_{Syst-2}\}] = \lambda \bullet \{\mathrm{T}_{Syst-2}\} + \lambda \bullet \{\mathrm{T}_{Syst-1}\}$

4.5.Invariant vectoriel.

L'invariant vectoriel d'un torseur est sa résultante *usuellement notée :* $\boxed{\vec{R}}$.

4.6.Invariant scalaire.

L'invariant scalaire d'un torseur est le produit scalaire de sa résultante par son moment.

Ce produit scalaire est indépendant du point d'écriture du torseur.

$$\boxed{\text{invariant scalaire} = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_A} = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_B}}$$

5. Formes particulières de torseur.

5.1. Torseur "nul".

Un torseur nul est un torseur dont la résultante et le moment associés sont nuls.

$\boxed{\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$ *Un torseur "nul" est nul en tout point de l'espace. Il est alors possible de ne pas préciser son point d'écriture et repère dans les rédactions.*

Vous pouvez utilisez la notation simplificatrice suivante : $\boxed{\{T\} = \begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$ *ou la notation plus dangereuse et pas toujours admise par les correcteurs* $\{T\} = \{0\}$.

5.2. Torseur "Couple".

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle. L'expression du torseur est identique en tout point de l'espace.

$$\boxed{\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \overrightarrow{M_A} \neq \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{C} \neq \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

Il est fréquent que le moment $\overrightarrow{M_A}$ *dans les notations d'un torseur couple soit remplacé par le "couple"* $\vec{C}$.

5.3. Torseur à résultante.

Un torseur à résultante est un torseur dont le moment central est nul.

Soit le torseur $\{T_{Syst}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R} \neq \vec{0}\\ \overrightarrow{M_A} \neq \vec{0}\end{Bmatrix}_{\Re}$ *avec le point A qui n'appartient pas à l'axe central.*

Si le produit scalaire de la résultante par le moment du torseur est nul : $\boxed{\vec{R} \bullet \overrightarrow{M_A} = 0}$ *alors le torseur* $\{T_{Syst}\}$ *est un torseur à résultante. Son moment central est nul.*

Le torseur associé à un système constitué d'un seul glisseur $(A, \vec{F})$ *sera noté* $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$.

C'est un cas particulier de changement des notations usuelles.

6. Axe central d'un torseur.

Définition : *L'axe central* (Δ) *d'un torseur est le lieu des points de réduction du torseur ou la résultante et le moment du torseur sont colinéaires.*

Soit le torseur $\{T_{Syst}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A}\end{Bmatrix}_{\Re}$

*Soit un point **P** situé sur l'axe central* $\boxed{\overrightarrow{PA} = \dfrac{\overrightarrow{M_A} \wedge \vec{R}}{\vec{R}^2} + \lambda \bullet \vec{R}}$ *ou* $\boxed{\overrightarrow{AP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_A}}{\vec{R}^2} + \lambda \bullet \vec{R}}$ *avec **A** point d'écriture du torseur et **P** un point quelconque de l'axe central.*

$\boxed{\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_0} + \overrightarrow{P_0A}}$ *avec* $\boxed{\overrightarrow{AP_0} = \dfrac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_A}}{\vec{R}^2}}$ *et* $\boxed{\overrightarrow{P_0A} = \lambda \bullet \vec{R}}$.

Le point P_0 *est le pied de la perpendiculaire à l'axe central* (Δ) *passant par le point d'écriture **A** du torseur.*

Propriétés de l'axe central :

- *Le moment* $\overrightarrow{M_P}$ *sur l'axe central est minimum.*
- *Le moment sur l'axe central est constant.*

L'axe central (Δ) *du torseur peut être défini par le glisseur* $\boxed{(P, \vec{u})}$ *avec* $\boxed{\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AP_0}}$ *et* $\boxed{\vec{u} = \dfrac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}}$.

Remarque :

Un point de réduction pour lequel le moment est nul et la résultante est non nulle appartient obligatoirement à l'axe central du torseur. Le torseur est un torseur à résultante.

7. Pas d'un torseur.

*Le pas **p** d'un torseur est défini par :* $\boxed{p = \dfrac{\vec{R} \bullet \overrightarrow{M_A}}{\vec{R}^2} = \dfrac{\vec{R} \bullet \overrightarrow{M_{central}}}{\vec{R}^2}}$

8. Composantes scalaires d'un torseur.

Soit le repère $\Re : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$*, repère d'expression des composantes de la résultantes et du moment.*

Les notations usuelles, sauf indication contraire du sujet, des éléments de réduction (composantes scalaires) sont :

$$\boxed{\{\mathrm{T}_{Syst}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\Re}}$$

Avec :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{R} = \overrightarrow{X_A} + \overrightarrow{Y_A} + \overrightarrow{Z_A} \\ \overrightarrow{\mathrm{M}_A} = \overrightarrow{L_A} + \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{N_A} \end{array}}$$

Les composantes scalaires X_A, Y_A, Z_A, L_A, M_A *et* N_A *sont les éléments de réduction du torseur au point A.*

Utilisez des majuscules pour les composants scalaires du torseur pour éviter toute confusion avec les coordonnées du point A noté usuellement en minuscules : $A : (x_A, y_A, z_A)$.