

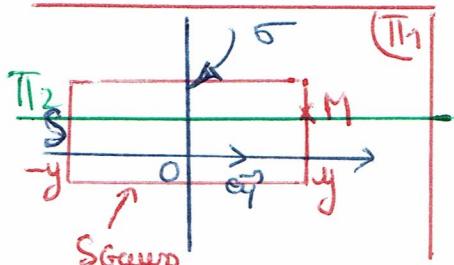
Etude de modèles biophysiques

juillet
Bacque PT
2019

Partie A

A-1] Principe de l'electro-oculographie

A1-1] Système constitué de deux plans de charges opposées



$$\star M \in T_1 \cap T_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) \in T_1 \cap T_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_y$$

\star Distribution de charges
irrégulière par translation
selon Ox et Oz

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(y) \vec{e}_y$$

\star plan chargé = plan de symétrie des charges $\Rightarrow \vec{E}(y) = -\vec{E}(-y)$

b- Surface de Gaus = cylindre de Rauten $2y$

de base d'aire S .

symétrique par rapport au
plan chargé

Théorème de Gaus : $E(y) \vec{e}_y \cdot S \vec{e}_y + E(-y) \vec{e}_y \cdot (-S) \vec{e}_y + 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

On a alors : $E(y) \times S + E(-y)(-S) + 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\text{Soit } 2E(y) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

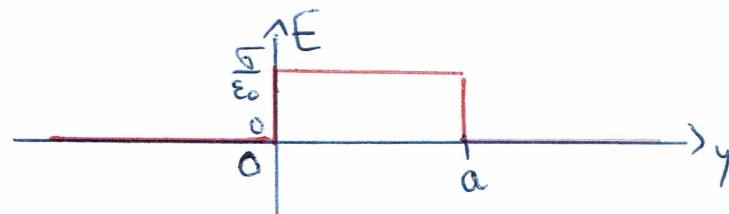
ou

$$\vec{E}(y) = \frac{Q_{int}}{2\epsilon_0} \vec{e}_y \text{ pour } y > 0$$

et

$$\vec{E}(y) = -\frac{Q_{int}}{2\epsilon_0} \vec{e}_y \text{ pour } y < 0.$$

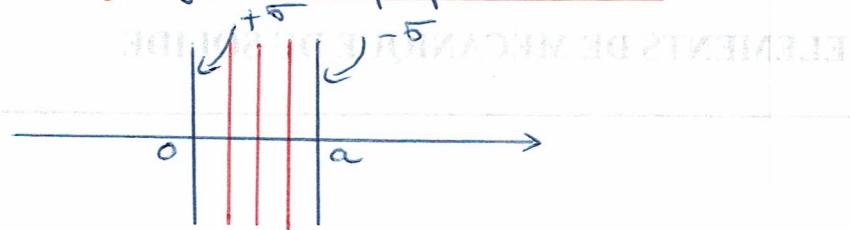
c- En utilisant le théorème de superposition :



$$\text{et } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M} = -E(y) dy \Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } 0 < y < a \\ y \end{cases} V(y) = \int_0^y E(y) dy + V(0)$$

Soit $V(y) = \frac{5}{\epsilon_0} y$ avec la condition $V(0) = 0$ (2)

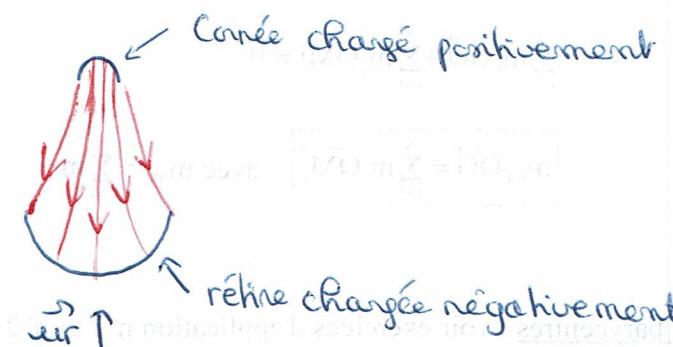
\Rightarrow les surfaces équipotentielles sont des plans $y = \text{constante}$.



A12) Globe oculaire

a- Une ligne de champ électrique est une ligne tangente en tout point au champ électrique et orientée dans le sens du champ.

b-



$$\text{dès } \vec{E} = \frac{e}{\epsilon_0} \vec{r}$$

\Rightarrow le champ diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives

A13) Mesure de l'angle de rotation θ du globe oculaire

a-. Dans le cas d'un champ uniforme, les lignes de champ sont parallèles entre elles.

De part et d'autre de l'axe cornée-réhine, le champ devient assez vite uniforme dans la direction \vec{e}_z .

$$\vec{E}(M) = E_0 \vec{e}_z \text{ avec } E_0 < 0 \text{ d'après A12 b)}$$

b- • $V(M) = V(x, y, 0) = Kx + K'y$

• $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(M) = -K\vec{e}_x + K'\vec{e}_y$ pour $M \in Oxy$

• $\vec{e}_z = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$

donc $\vec{E} = -E_0 \sin \theta \vec{e}_x + E_0 \cos \theta \vec{e}_y$

• Par identification : $K = E_0 \sin \theta$ et $K' = -E_0 \cos \theta$

③

c) Si $\vec{m} = \vec{w}$ alors le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de charges $\Rightarrow V(-x, y, 0) = V(x, y, 0)$
donc $V(A) = +V(A')$ et $U = 0$

d) Si $\vec{m} \neq \vec{w}$ (rotation du globe oculaire)

$$\begin{aligned} \text{alors } U &= V(a, b, 0) - V(-a, b, 0) \\ &= K_a + K'b - (-K_a + K'b) \\ &= 2K_a \end{aligned}$$

$$\boxed{U = 2E_0 \sin \alpha \times a}$$

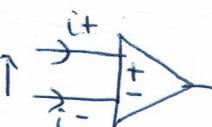
Conclusion = La mesure de la tension U permet de remonter à l'angle α de rotation du globe oculaire.

A2 ↴ Traitement analogique des signaux

A2.1 Amplificateur de différence

c- Rappel

ALI idéaux:
en régime linéaire E



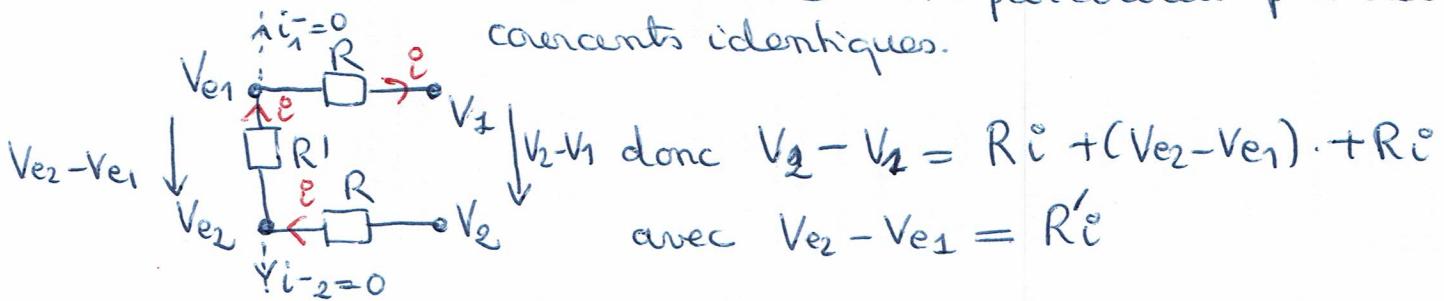
$$\boxed{\begin{aligned} E &= 0 \\ i^+ &= i^- = 0. \end{aligned}}$$

Consequences:

- ALI ① : $V_{E1} = V_{E+i_1} = V_{E-i_1}$ car AO en régime linéaire.

Pas de tension aux bornes de R car $i_{E1} = 0$.

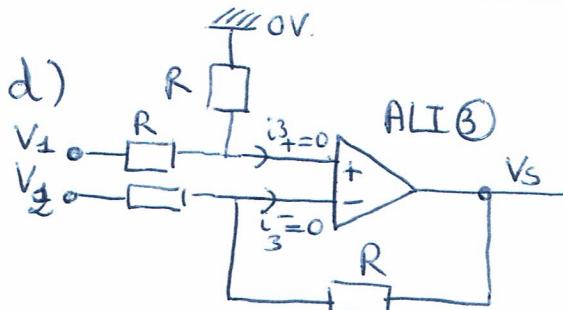
- ALI ② : de même : $V_{E2} = V_{E+i_2} = V_{E-i_2}$
- Les 3 résistances R, R', R de la zone entre les ALI ① et ② sont parcourus par des courants identiques.



(4)

$$\text{donc } V_2 - V_1 = (V_{e2} - V_{e1}) + 2R \frac{(V_{e2} - V_{e1})}{R'}$$

$$V_2 - V_1 = (V_{e2} - V_{e1}) \left(1 + \frac{2R}{R'} \right)$$



• Division de tension en E_{3+} :

$$V_{E3+} = \frac{V_1}{2}$$

• Miller en $E_{3-} =$

$$V_{E3-} = \frac{\frac{V_2}{R} + \frac{V_s}{R}}{\frac{2}{R}}$$

• ALI(3) en régime linéaire: $V_{E3+} = V_{E3-}$

$$\frac{V_1}{2} = \frac{V_2}{2} + \frac{V_s}{2}$$

soit $|V_s = V_1 - V_2|$

\Rightarrow on obtient finalement: $|V_s = -(V_{e2} - V_{e1}) \left(1 + \frac{2R}{R'} \right)|$

$$\text{e)} Ad = \left| \frac{V_s}{V_{e2} - V_{e1}} \right| = 1 + \frac{2R}{R'} = 1 + 2 \times \frac{100}{2} = 101$$

f). Tension entre les électrodes: $|V_{e2} - V_{e1}| \approx 100\mu V$.

• Tension amplifiée: $|V_s| \approx 100 \times 100\mu V = 10^{-2} V$.

$|V_s| \approx 10 \text{ mV.} \Rightarrow$ mesurable avec un voltmètre.

A2-2] Filtrage

a- Les yeux sont sensibles aux signaux à 50Hz de l'éclairage d'une pièce par exemple.

Le filtre coupe-bande à 50Hz permet d'éliminer ce type de signaux.

b- On élimine les autres fréquences avec un filtre passe bas de fréquence de coupure entre 10 Hz et 50Hz.

On élimine donc ainsi également le zéro du secondeur
 ⇒ corps bande précédent éteillé.

c) $H(\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\Omega} - \omega^2}$, $H_0 = 1$, $\omega_0 = 15 \text{ Hz}$, $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• $\omega \ll 1$: $H(\omega) \approx H_0 \Rightarrow GdB = 20 \log |H_0| = 0$.

• $\omega \gg 1$: $H(\omega) \approx -\frac{H_0}{\omega^2} \Rightarrow GdB = -40 \log \omega$
 ⇒ droite de pente -40 dB/dec

• $\omega = 1$: $H(\omega) = \frac{H_0 \Omega}{j}$ $\Rightarrow GdB = 20 \log \Omega = -3 \text{ dB}$

• Résonnance ?

$$\omega_r / \left(\frac{d|H|}{d\omega} \right) = 0 \quad \text{donc } \omega_r / \frac{d}{d\omega} \left((1-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) = 0.$$

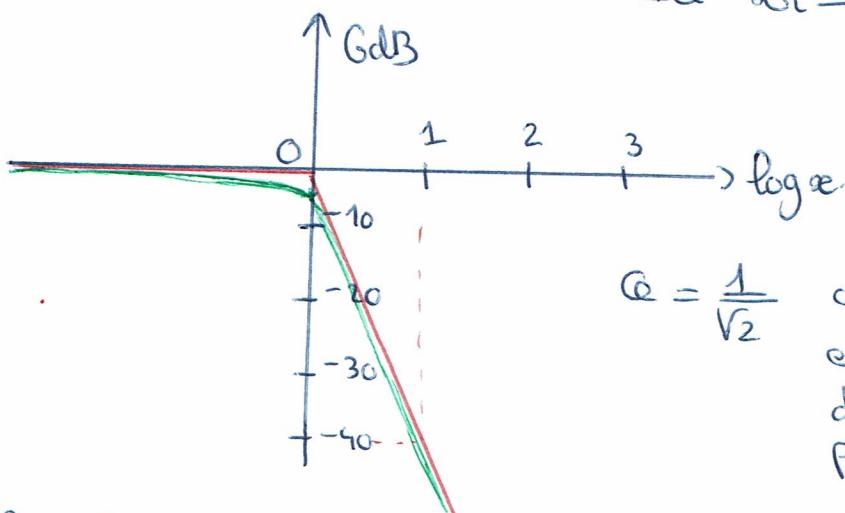
Sait $2(1-\omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\Omega^2} = 0$

donc $\omega = 0$ ou $\frac{1}{\Omega^2} = 2 - 2\omega^2$

Sait $\omega_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega^2}} > 0$.

⇒ ω_r existe si $\Omega \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ici $\omega_r = 0$ car $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ cas où la réponse est la plus plate dans la bande passante.

• Bandé passante = intervalle de fréquences pour lesquelles $|H| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$ ici $GdB \geq GdB_{\max} - 3 \text{ dB}$ $GdB \geq -3 \text{ dB}$ ici

• Fréquence de coupe = extrémité de la bande passante

A23_1 Acquisition du signal

a- Critère de Shannon = fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans le signal.

b- • Il faut $f_{ech} > 2 \times 10\text{Hz} = 20\text{Hz}$.

$$\circ T_{acq} = 1\text{min} = N \times T_{ech} = \frac{N}{f_{ech}} \Rightarrow N = f_{ech} \times T_{acq}$$

$$\Rightarrow N \geq 20 \times 60$$

$$\boxed{N \geq 1200 \text{ points}}$$

c- Retard de 0,2 divisions $\Rightarrow 0,2 \text{ seconde}$.

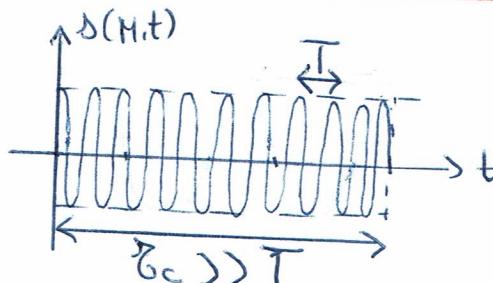
Partie B

Biométrie de l'œil par interférométrie à cohérence partielles.

B. 1) Obtention d'interférences

B1. 1) Longueur de cohérence temporelle d'une source

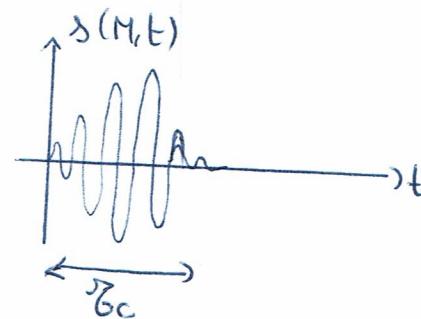
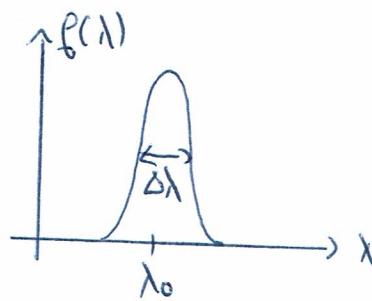
a-



des trains d'onde émis successivement par la source ont une phase à l'origine aléatoire

b- Pour un laser : $\tau_c = c \times \tau_c \approx 100 \text{ m}$
donc $\boxed{\tau_c \approx 1 \mu\text{s}}$.

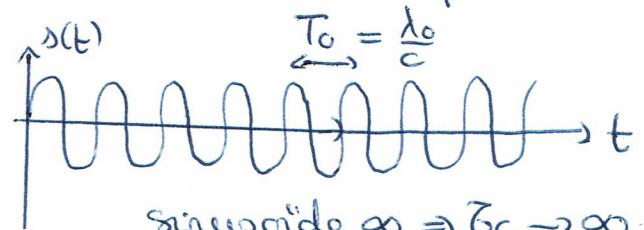
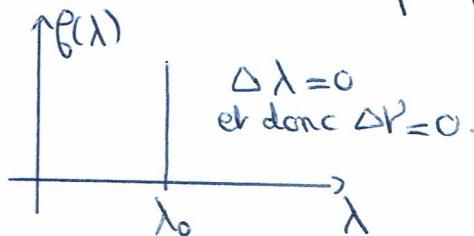
c-



- Plus la largeur spectrale est étroite et plus le signal est étendue temporellement : $\tau_c \Delta P \approx 1$
- Or $P = \frac{c}{\lambda}$ donc $|\Delta P| = + \frac{c}{\lambda_0^2} |\Delta \lambda| \approx \frac{1}{\tau_c}$
d'où $\tau_c \approx \frac{\lambda_0^2}{c |\Delta \lambda|} = \frac{(820 \cdot 10^{-9})^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} \approx 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

d- $L_c = c \times \tau_c = 3 \cdot 10^8 \times 4,5 \cdot 10^{-14} \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
 $\boxed{L_c \approx 13 \mu\text{m}}$.

e- Pour une source parfaitement monochromatique :



BII) Interférences de deux ondes

2

a-

$$S(P) = (S_2 P) - (S_1 P)$$

$$= n d_2 - n d_1$$

b- • $s_1(p, t) = S_{01} \cos(\omega_1 t + \varphi_1(p))$

• $s_2(p, t) = S_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi_2(p))$

} avec $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

• $\varphi_1(p) = \underbrace{\varphi_{01}}_{\text{phase de l'onde à l'origine des temps en } S_1} + \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_0} x(S_1 p)}_{\text{déphasage dû à la propagation de l'onde de } S_1 \text{ à } p}$

• $\varphi_2(p) = \varphi_{02} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2 p)$

• $I = K < s_{\text{tot}}^2(p, t) >$ ou $I = K \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} < s_{\text{tot}}^2(p, t) >$

$$= \frac{K}{2} |s_{\text{tot}}(p, t)|^2$$

• $s_{\text{tot}}(p, t) = s_1(p, t) + s_2(p, t)$

• $s_{\text{tot}}^2(p, t) = s_1^2(p, t) + s_2^2(p, t) + 2 s_1(p, t) s_2(p, t)$

• $I = I_1 + I_2 + \frac{2}{2} K S_{01} S_{02} \left[< \cos(2\omega_0 t + \varphi_1(p) + \varphi_2(p)) > + < \cos(\varphi_2(p) - \varphi_1(p)) > \right]$

$I = I_1 + I_2 + K S_{01} S_{02} \cos(\varphi_2(p) - \varphi_1(p))$ Non nul

$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(p) - \varphi_1(p))$ si le déphasage est constant au cours du temps.

(ii) Ainsi: $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ (vibrations émises en phase d'après l'échancé)

$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi S(p)}{\lambda_0}\right)$

- ⇒ Sources S_1 et S_2 issue de la même source primaire
- ⊕ $S(p) < \lambda_0$

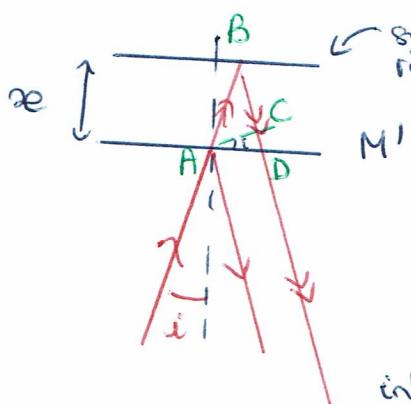
(3)

C- Si $I_1 = I_2 = I_0$, la formule de Fresnel devient =

$$I(P) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi S(P)}{\lambda_0} \right) = 2I_0 (1 + \cos \varphi(P))$$

B-2) Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

1)



symétrique de M par rapport à la séparatrice.

 M'

$$S(P) = \text{nair}(AB + BC) = \text{nair}(AB + CD - CD)$$

avec $\cos i = \frac{x}{AB} \Rightarrow AB = \frac{x}{\cos i}$

et $\sin i = \frac{CD}{AD}$ et $\tan i = \frac{AD/2}{x}$

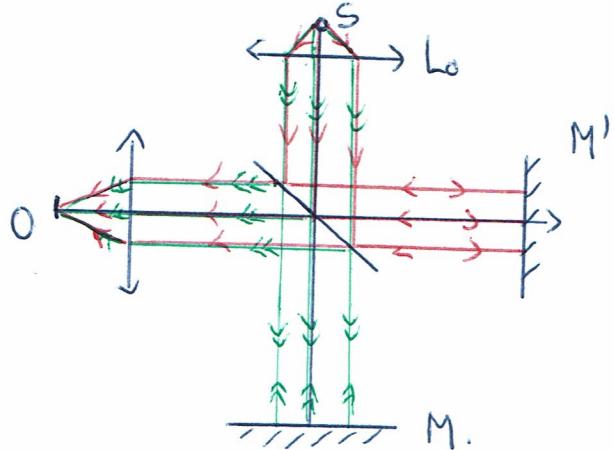
interférences observées
dans le plan focal
image d'une lentille
 \Leftrightarrow observation à $\ell' \infty$.

$$\begin{aligned} \text{On obtient } S(P) &= \text{nair} \left(\frac{x}{\cos i} + \frac{x}{\cos i} - \sin i \times 2x \tan i \right) \\ &= \text{nair} \left(\frac{2x}{\cos i} - \frac{2x \sin^2 i}{\cos i} \right) \\ \boxed{S(P) = \text{nair} \times 2x \cos i} \end{aligned}$$

- 2) On observe sur l'écran des anneaux d'égale inclinaison (symétrie de révolution).
- 3) Lorsqu'on diminue x , les anneaux renvoient vers le centre et grossissent.
Quand $x \approx 0$ alors les miroirs sont au contact optique : $S(P) = 0 \forall P$ c'est à dire $\forall i$
 \Rightarrow intensité uniforme sur l'écran.

B3) Mesure de position

1a)



b) $\delta(O) = 2n_{\text{air}} - 2n_1 n_{\text{air}}$.

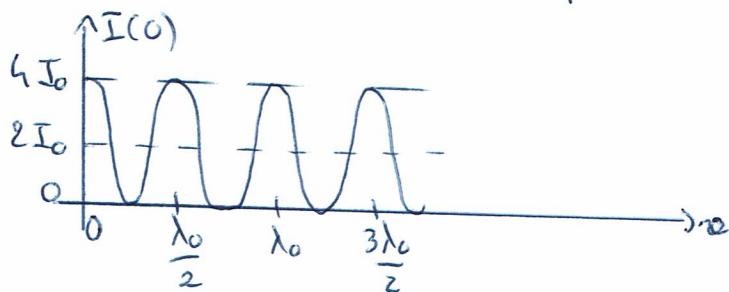
c) $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$

d) Pour $p=0$ on a $\alpha_0 = \alpha_1$, donc si on mesure la distance α_0 dont on a calculé, on connaît α_1 .

2) Source parfaitement monochromatique

a) $I(O) = I_0 (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} n_{\text{air}} \times 2(\alpha_0 - \alpha_1)))$

b) On observe un maximum d'intensité à chaque fois que $\delta(O)$ varie de λ_0 soit quand α varie de $\frac{\lambda_0}{2}$



c) Toutes ces ordres sont identiques $\Rightarrow p=0$ indétectable

3) Source S à faible cohérence temporelle.

a) Pour $p=0$: $\delta(O) = 0 \times \lambda = 2n_{\text{air}}(\alpha_0 - \alpha_1) \rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 \forall \lambda$

Les différentes longueurs d'onde interfèrent toutes constructivement $\rightarrow I(O) = I_{\text{max}}$

b) Il y a interférences tant que $|\delta(O)| < L_c$

Soit tant que $2n_{\text{air}} |\alpha_0 - \alpha_1| < L_c$

ou $|\alpha_0 - \alpha_1| < \frac{L_c}{2n_{\text{air}}}$

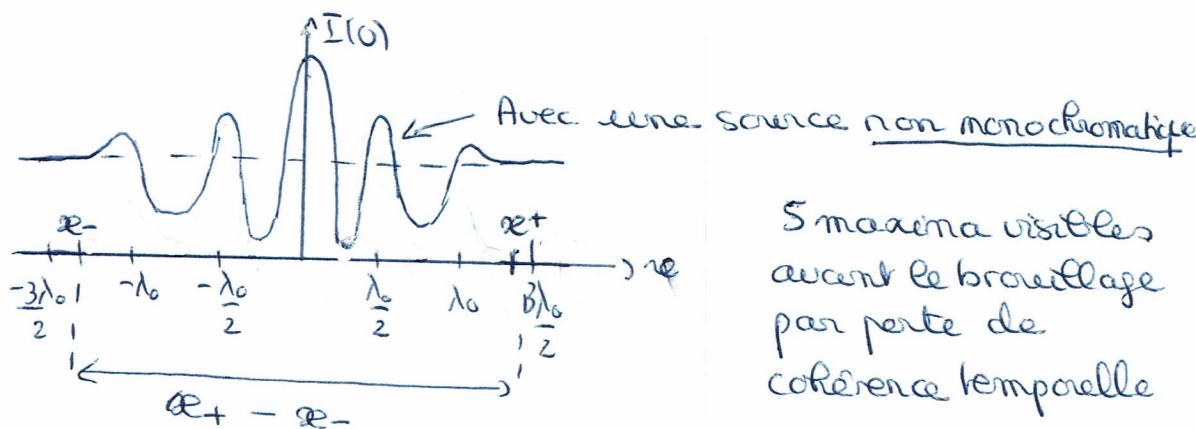
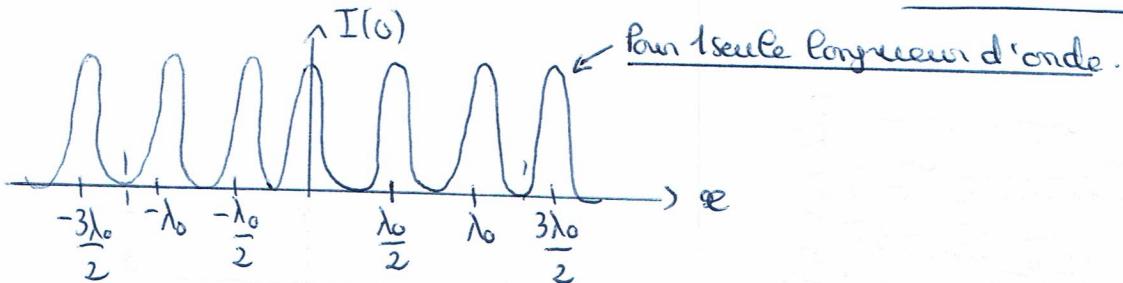
donc $\alpha_- = \alpha_1 - \frac{L_c}{2n_{\text{air}}} < \alpha_0 < \alpha_1 + \frac{L_c}{2n_{\text{air}}} = \alpha_+$

(5)

$$c) \alpha_+ - \alpha_- = \frac{L_c}{n_{air}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{1} = 1,8 \mu\text{m.}$$

$$\bullet \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\lambda_0/2} = \frac{1,8 \cdot 10^{-6} \times 2}{800 \cdot 10^{-9}} = \frac{3,6}{8} \times 10 = \frac{36}{8} = 4,5 \rightarrow 5 \text{ max d'intensité}$$

d)

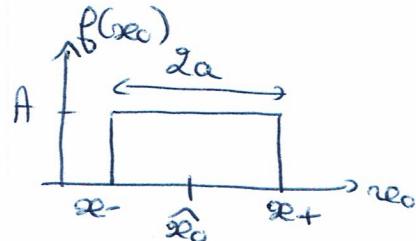


5 maxima visibles
avant le brouillage
par perte de
cohérence temporelle

e) Si les intensités des 5 pics sont trop proches alors on ne les distingue pas les uns des autres.
On détermine donc les positions α_+ et α_- pour lesquelles il y a brouillage de la figure d'interférences

$$\text{et } \hat{\alpha}_0 = \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}$$

$$\text{et } a = \frac{1}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) = \frac{L_c}{2n_{air}}$$



B) Application à la biométrie de l'œil

$$1) S_{B/2}(0) = S_{A/2} + S_{B/A} = 2n_{air}(\alpha - \alpha_A) - 2n_c D_c$$

$$\boxed{S_{B/2}(0) = 2n_{air} \alpha + 2n_c D_c \quad \text{car } \alpha_A = 0.}$$

2) On détermine l'âge $p=0$ avec la méthode précédente

$$3) \text{ donc } 0 = 2n_{air} \alpha_B + 2n_c D_c \quad \text{donc } \boxed{D_c = + \frac{n_{air} \alpha_B}{n_c}}$$

B 5) Enregistrement.

a. Chaque pic correspond à une interface entre 2 milieux d'indices différents.

Entre P_1 et P_2 = cornée

Entre P_2 et P_3 = Rumeur aqueuse

etc ----

b. Entre P_4 et P_5 = Rumeur vitrée : $O = 2n_{\text{air}}(\alpha_{e5} - \alpha_{e4}) - 2n_v D_v$

$$\text{donc } \alpha_{e5} - \alpha_{e4} = \frac{n_v D_v}{n_{\text{air}}}$$

• Entre P_3 et P_4 = cristallin : $O = 2n_{\text{air}}(\alpha_{e4} - \alpha_{e3}) - 2n_{\text{ct}} LT$

$$LT = \frac{n_{\text{air}}(\alpha_{e4} - \alpha_{e3})}{n_{\text{ct}}}$$

$$LT = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{ct}}} \cdot \frac{P_3 P_4}{P_4 P_5} (\alpha_{e5} - \alpha_{e4})$$

$$LT = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{ct}}} \frac{P_3 P_4}{P_4 P_5} \frac{n_v D_v}{n_{\text{air}}}$$

$$LT = \frac{n_v}{n_{\text{ct}}} D_v \times \frac{P_3 P_4}{P_5 P_4}$$

AN $LT = \frac{1,344}{1,406} \times 16,14 \times \frac{1,8}{6,9} = 4 \text{ mm.}$