

# Correction de l'épreuve de physique II filière PSI concours MINES PONTS session 2016

EL FILALI SAID

CPGE BENI MELLAL

MAROC

= elfilalisaid@yahoo.fr =

## MESURES DE CHAMPS MAGNÉTIQUES

### I/ Balance de Cotton

□ 1 - À l'équilibre, le bilan des forces est :

- Le poids, qui s'applique en  $G$ .
- La réaction de l'axe en  $O$ .

Le théorème du moment cinétique appliqué en  $O$ , dans le référentiel du laboratoire galiléen s'écrit :

$$\vec{O}\vec{O} \wedge \vec{R} + \vec{O}\vec{G} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

Ce qui donne que

$$\vec{O}\vec{G} = \vec{0} \implies G \equiv O$$

□ 2 - En présence du courant on a les forces de Laplace :

▶ Sur l'arc  $A_2A_3$  on a

$$d\vec{\ell} = R d\theta \vec{e}_\theta \implies d\vec{F} = iRB d\theta \vec{e}_r$$

Et son moment est nulle parce que la force est centrale.

▶ Sur l'arc  $A_4A_5$  on a

$$d\vec{\ell} = -R' d\theta \vec{e}_\theta \implies d\vec{F} = -iR'B d\theta \vec{e}_r$$

donc son moment est nulle parce que la force est centrale.

Conclusion : le moment résultant sur les parties circulaires est nul.

□ 3 - A l'équilibre et d'après les questions précédentes on a :

▶ Le moment du poids additionnelle :

$$\vec{M}_O(\vec{p}) = \vec{O}\vec{D} \wedge mg\vec{e}_y \implies \vec{M}_O(\vec{p}) = -mgd_2\vec{e}_z$$

▶ Le moment de la force de Laplace sur le segment  $[A_3A_4]$  : Puisque la force est constante donc appliquée au point C ce qui donne que

$$\vec{F}_L = \int_{A_3}^{A_4} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \implies \vec{F}_L = ilB\vec{e}_y$$

Et son moment vaut

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = iBd_1\ell\vec{e}_z$$

À l'équilibre la somme des moments est nulle, on en déduit :  $iBd_1\ell = mgd_2$ , soit

$$B = \frac{mgd_2}{ild_1}$$

□ 4 - La sensibilité de la balance :

Puisque toutes les grandeurs sont constantes sauf la masse alors :

$$\delta B = \delta m \left( \frac{gd_2}{ld_1} \right)$$

### Application Numérique

$$\delta B \simeq 1 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Cette valeur est plus grande que le champ magnétique terrestre, mais plus faible que le champ créé par un aimant permanent.

Conclusion : On peut utiliser la balance de Cotton pour mesurer les champs forts ( de l'ordre du Tesla).

## II/ Utilisation d'une boussole

### II.A/ Étude générale

□ 5 - On applique le théorème du moment cinétique en O :

On rappelle que pour un solide  $\vec{\sigma}_o = \vec{\sigma}_{\parallel} + \vec{\sigma}_{\perp}$

Et puisque le mouvement est plan alors  $\vec{\sigma}_{\perp} = \vec{0}$  donc

$$J\ddot{\alpha}\vec{e}_z = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{\Gamma}$$

comme d'après l'équilibre  $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin \alpha \vec{e}_z$

Ce qui donne

$$\ddot{\alpha} + \frac{\mathcal{M}B}{J} \sin \alpha = 0$$

A l'équilibre :  $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \implies \vec{\Gamma} = \vec{0}$

C'est à dire  $\sin \alpha = 0$

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0 & \text{Position d'équilibre stable} \\ \alpha = \pi & \text{Position d'équilibre instable} \end{array}$$

Au voisinage de la position d'équilibre stable  $\alpha = 0$  on a

$$\ddot{\alpha} + \frac{\mathcal{M}B}{J} \alpha = 0$$

Si on pose  $\kappa = \frac{\mathcal{M}}{J}$  alors  $\alpha(t) = C_1 \cos(\sqrt{\kappa B}t) + C_2 \sin(\sqrt{\kappa B}t)$

En tenant compte des conditions initiales on obtient :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\sqrt{\kappa B}t)$$

❑ 6 - L'expression de  $B_o$  :

On rappelle que pour un point de l'axe d'une spire vue sous l'angle  $\theta$  parcourue par un courant  $I$  l'expression du champ magnétique vaut

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \theta$$

Au centre  $\theta \rightarrow \pi/2 \Rightarrow B_o = \frac{\mu_o I}{2R}$

Ou bien d'après la loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \Rightarrow [B] = \frac{[\mu_o][\text{courant}]}{[\text{distance}]}$$

Donc la seule expression qui vérifiée cette analyse dimensionnelle est

$$B_o = \frac{\mu_o I}{2R}$$

❑ 7 - La variation relative de la norme du champ :

Soit  $M$  un point de l'axe  $Ox$  et d'après le théorème de superposition et en utilisant l'expression de  $B$  ainsi le DL on obtient :

$$B(x) = \frac{16}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_o N I}{2R} \left( 1 - \frac{144}{125} \left( \frac{x}{R} \right)^4 \right)$$

$B(x)$  est uniforme à l'ordre 4 au voisinage de  $x = 0$

La valeur maximale  $B_m$  de  $B$  est en  $x = 0$  donc

$$B_m = \frac{16}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_o N I}{2R}$$

L'incertitude relative est de 2% donc  $\frac{B_m - B(x)}{B_m} = 0,02 \Rightarrow B(x) = 0,98B_m$  ce qui donne

$$1 - \frac{144}{125} \left( \frac{x}{R} \right)^4 = 0,98 \Rightarrow \frac{x_m}{R} = 0,36 \xrightarrow{\text{A.N}} x_m = 5,4 \text{ cm}$$

### Application Numérique

- ▶  $B_m = 11\,983 \times 10^{-7} \text{ T}$
- ▶  $B(x_m) = 11\,743 \times 10^{-7} \text{ T}$

❑ 8 - La valeur numérique de  $\kappa$  :

On a :  $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa B}}$  ce qui donne

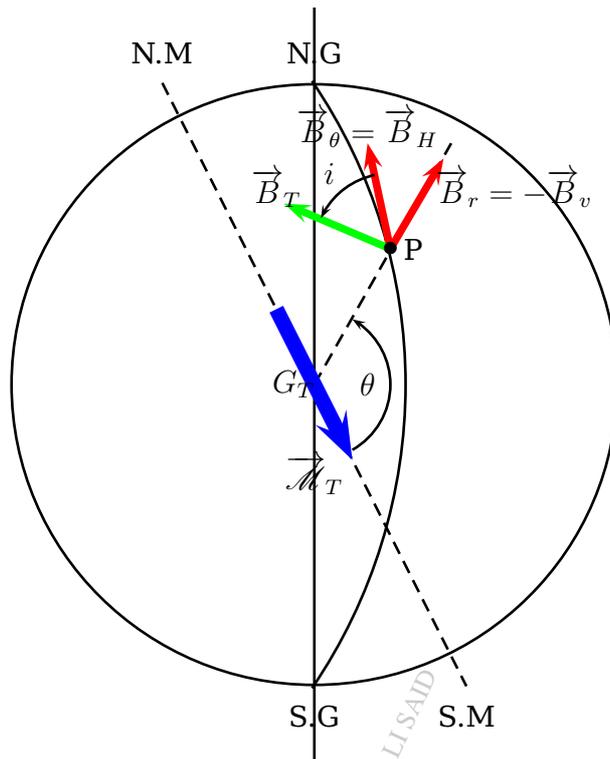
$$\kappa = \frac{4\pi^2}{BT^2}$$

Application Numérique

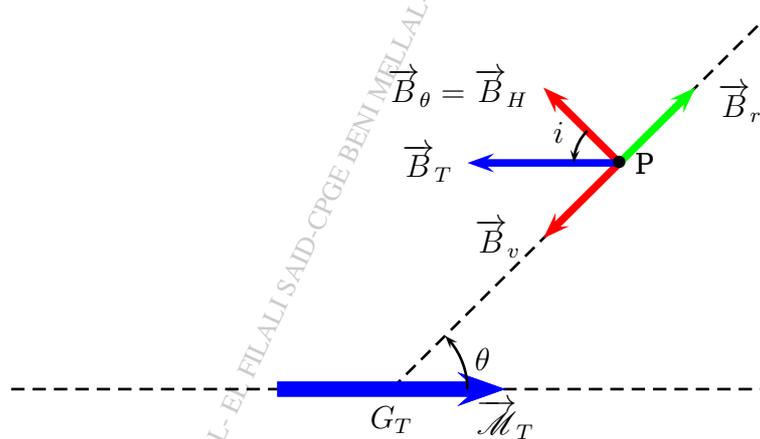
$\kappa = 366151 \text{ A kg}^{-1}$

## II.B/ Applications au champ magnétique terrestre

□ 9 - Schéma représentatif :



Dans le plan radial :



On a :  $\vec{B}_r = -\vec{B}_v$  et  $\vec{B}_H = \vec{B}_\theta$  donc

$$\tan i = \frac{B_v}{B_H} = -\frac{B_r}{B_\theta} \implies \tan i = -2 \tan \theta$$

Les solutions sont :  $\theta_1 = -45,71^\circ$  et  $\theta_2 = 180 - 45,71^\circ = 134,3^\circ$

### Application Numérique

La solution physique est

$$\theta = 134,3^\circ$$

Sachant que :  $(\theta - \lambda)(P) = 134,3 - 48^\circ 52' = 85,43^\circ$

C'est à dire que l'axe de symétrie du champ terrestre est quasi parallèle avec l'axe de rotation de la terre (inclinaison de  $4,5^\circ$ ).

❑ **10** - L'intensité du champ magnétique terrestre à Paris :

Lorsque l'axe de la boussole est vertical, donc elle oscille sous l'action de  $B_H = B_\theta$  et puisque :

$$\triangleright \omega = \sqrt{\kappa B_\theta} \implies B_H = \frac{4\pi^2}{\kappa T^2}$$

$$\triangleright B_H = B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi R_T^3} \implies \mathcal{M} = \frac{\omega^2 4\pi R_T^3}{K \mu_0 \sin \theta}$$

$$\triangleright B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} \implies B = \sqrt{1 + \tan^2 i} B_\theta.$$

### Application Numérique

$$\triangleright B_H = 20,2 \mu\text{T}$$

$$\triangleright B = 40,4 \mu\text{T}$$

$$\triangleright \mathcal{M} = 74 \times 10^{22} \text{ A m}^2$$

## III / Utilisation d'une sonde à effet Hall

❑ **11** - L'expression de la vitesse  $\vec{V}$  des porteurs de charges et sa norme :

On a :  $I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} \implies I_o = j a c$  donc

$$\vec{j} = \frac{I_o}{a c} \vec{e}_x$$

Comme  $\vec{j} = ne\vec{V}$  alors

$$\vec{V} = \frac{I_o}{acne} \vec{e}_x$$

### Application Numérique

La norme de la vitesse est :

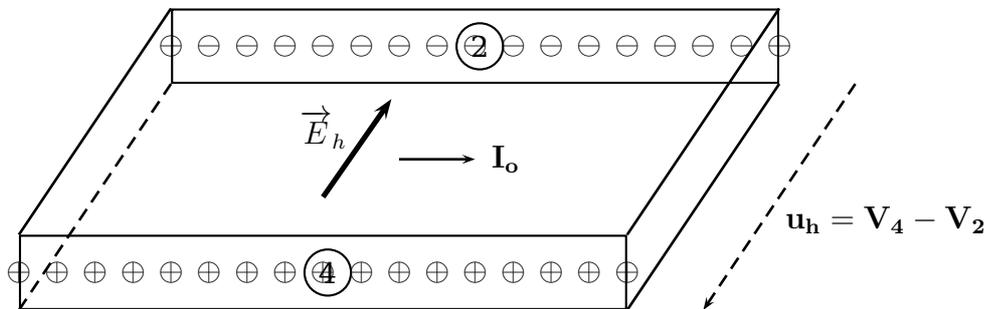
$$V = 31,56 \text{ km s}^{-1}$$

❑ **12** - D'après l'expression de la force de Lorentz on a :

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} \implies \vec{F} = qVB\vec{e}_z$$

- ▶ Pour  $q > 0$   $\vec{F}$  présente le même sens que  $\vec{e}_z$ .
- ▶ Pour  $q < 0$   $\vec{F}$  présente le sens opposée que  $\vec{e}_z$ .

D'où accumulation des charges positives sur la face (4) et les charges négatives sur la face (2)



□ 13 - Puisque la vitesse reste inchangée (uniforme) alors

$$\vec{F} = q(\vec{E}_h + \vec{V} \wedge \vec{B}) = \vec{0} \implies \vec{E}_h = -VB\vec{e}_z$$

Comme  $\vec{E}_h$  est uniforme alors

$$u_h = - \int_4^2 \vec{E}_h \cdot d\vec{l} \implies u_h = V_4 - V_2 = VBa$$

Par conséquent

$$\gamma = Va = \frac{I_o}{nec}$$

Application Numérique

$$\gamma = 94,7 \text{ VT}^{-1}$$

□ 14 - La valeur de la résistance R :

On a :

$$u = R(I_o + I_c) \implies R = \frac{u}{I_o + I_c}$$

Application Numérique

$$R = 500 \Omega$$

□ 15 - Lorsque on relie la face (2) à la masse on a déviation des lignes de courant qui ne restent plus portées par l'axe Ox car le courant va circuler de (1) vers (3) puisque (2) et (3) sont aux mêmes potentiels.

□ 16 - Relation entre  $u_s$  et  $u_h$  :

On a :

- ▶ Diviseur de tension :

$$V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_4$$

► Millmann en  $V_-$  donne

$$V_- = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{V_2}{R_1} + \frac{u_h}{R_2} \right)$$

A.O e régime linéaire donc

$$V_- = V_+ \implies u_s = \frac{R_2}{R_1} u_h$$

L'amplification si  $R_2 > R_1$

□ 17 - L'expression de la résistance d'entrée sur la face (4)

$$R_e = \frac{V_4}{i_4} \implies R_e = R_1 + R_2$$

Puisque  $R_e$  est finie on a un courant qui traverse  $R_1$  et  $R_2$  donc un courant suivant l'axe Oz.

□ 18 - la résistance d'entrée :

Puisque l'A.O est idéal alors

$$i_+ = 0 \implies R_e \rightarrow \infty$$

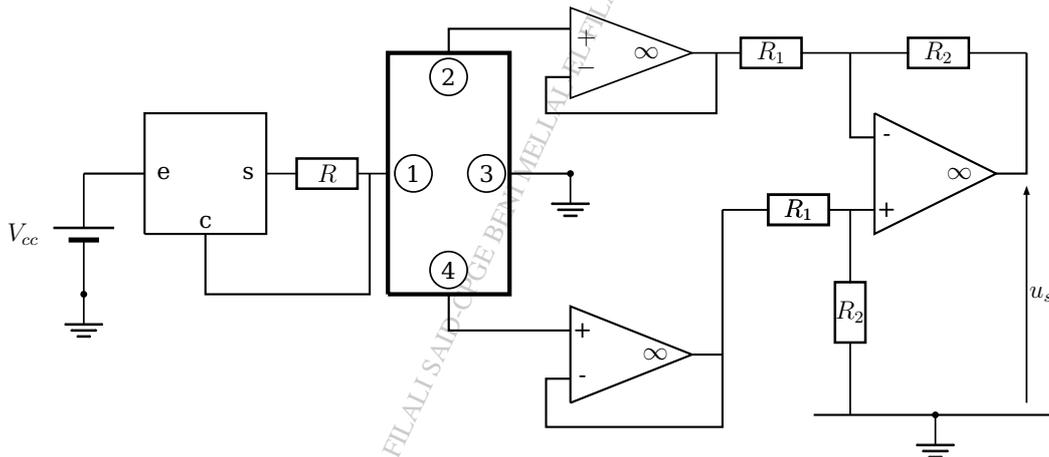
► Le gain  $A$  :

On a :  $u_e = V_- = \frac{R}{R + R'} u_s$  donc

$$A = 1 + \frac{R'}{R}$$

□ 19 - Si  $R \rightarrow \infty$  et  $R' = 0$  : Montage suiveur afin de rendre  $R_e \rightarrow \infty$  : adaptation d'impédance.

□ 20 - Le montage complet :



□ 21 - La valeur de la composante  $B_H$  :

On a :  $u_s = \frac{R_2}{R_1} u_h \implies u_s = \frac{R_2}{R_1} \gamma B$  donc

$$B_H = \frac{R_1}{R_2 \gamma} u_s \xrightarrow{\text{A.N}} B_H = 2,11 \times 10^{-5} \text{ T}$$

□ 22 - L'expression du champ  $\vec{B}_o$  :

En coordonnées cartésiennes on a :

- ▶ Invariance par translation suivant Ox et Oz donc  $\vec{B}_o(M) = \vec{B}_o(y)$
- ▶ Le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est un plan de symétrie passant par le point M donc

$$\vec{B}_o(M) = B_o(y)\vec{e}_z$$

L'équation de M.A :  $\text{rot}\vec{B}_o = \mu_o \vec{j}$  avec  $\vec{j} = \frac{I_o}{ac}\vec{e}_x$

Par projection sur l'axe Ox on obtient

$$\frac{dB_o}{dy} = \mu_o \frac{I_o}{ac} \implies B_o = \mu_o \frac{I_o}{a} \xrightarrow{\text{A.N}} B_o = 4,19 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Comme  $\frac{B_o}{B_H} = 0,2$  On ne peut pas négliger  $\vec{B}_o$  devant  $\vec{B}_H$

## IV/ Utilisation d'une magnétorésistance

□ 23 - Le potentiel électrique :

- ▶ On a invariance par translation suivant Oz ( direction infinie).
- ▶ On a invariance par rotation autour de Oz

Donc :  $V(M) = V(r)$

L'équation de Poisson :  $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_o} = 0$  et puisque on a pas de charges entre les deux couronnes donc

$$\Delta V(M) = 0 \implies \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

par intégration , on obtient  $V(r) = C_1 \ln r + C_2$

Avec les conditions aux limites :  $V(r_1) = V_1$  et  $V(r_2) = V_2$  On obtient :

$$V(r) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

- ▶ Le champ électrique :

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r \implies E = \left( \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \right) \frac{1}{r}$$

□ 24 - le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  :

Pour un électron de charge (-e) et en régime permanent la RFD donne :

$$e(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} + \lambda \vec{V}) = \vec{0}$$

En coordonnées cylindriques  $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$  on a :

$$e \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} eE + eBV_\theta + \lambda V_r = 0 \\ -eBV_r + \lambda V_\theta = 0 \\ \lambda V_z = 0 \end{vmatrix}$$

Ce qui donne

$$V_r = -\frac{\lambda e E}{e^2 B^2 + \lambda^2} ; V_\theta = -\frac{e^2 E B}{e^2 B^2 + \lambda^2} ; V_z = 0$$

Le vecteur densité de courant

$$\vec{j} = -ne\vec{V} \Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2 E}{e^2 B^2 + \lambda^2} (\lambda \vec{e}_r + eB \vec{e}_\theta)$$

□ 25 - L'expression de l'intensité du courant électrique :  
Sur une surface équipotentielle de rayon  $r$  on a :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = \int_0^h \int_0^{2\pi} j_r r d\theta dz$$

Après intégration on obtient :

$$I = \frac{2\pi r h n \lambda e^2 E}{e^2 B^2 + \lambda^2}$$

En remplaçant  $E$  par son expression ,on obtient

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \Rightarrow R = \frac{e^2 B^2 + \lambda^2}{2\pi h n \lambda e^2} \ln(r_2/r_1)$$

Pour  $B = 0$  on a :

$$R_o = \frac{\lambda}{2\pi h n e^2} \ln(r_2/r_1)$$

### Application numérique

- ▶  $R = 111.764643939745 \Omega$
- ▶  $R_o = 111.764643930914 \Omega$
- ▶  $\varepsilon = 0,79 * 10^{-10}$

Puisque  $\varepsilon \ll 1$  on ne peut pas utiliser ( avec les valeurs numériques données) cet écart afin d'en déduire la valeur du champs  $B$

**Remarque**Autour de  $\varepsilon$ 

Afin de déterminer une valeur non nulle de  $\varepsilon$  j'ai utilisé Maple avec `Digits := 15` (le nombre de chiffres significatifs)

```

> restart:Digits:=15;
                                Digits := 15
> lambda:=1.8*10^(-17);e:=1.6*10^(-19);B:=0.001;h:=0.001;n:=1.1*10^(21)
> ;r2:=0.003;r1:=0.001;
                                λ := 0.1800000000000000 10-16
                                e := 0.1600000000000000 10-18
                                B := 0.001
                                h := 0.001
                                n := 0.1100000000000000 1022
                                r2 := 0.003
                                r1 := 0.001
> R:=evalf(((lambda^2+(e*B)^2)/(2*Pi*lambda*n*h*e^2))*ln(r2/r1));
                                R := 111.764643939745
> Ro:=evalf(((lambda^2)/(2*Pi*lambda*n*h*e^2))*ln(r2/r1));
                                Ro := 111.764643930914
> epsilon:=(R-Ro)/Ro;
                                ε := 0.790142543241025 10-10
> k:=366151; T:=2.31;mu:=4*Pi*10^(-7);RT:=6400000;
                                k := 366151
                                T := 2.31
                                μ :=  $\frac{\pi}{2500000}$ 
                                RT := 6400000
> BH:=evalf(4*Pi/(T^2*k));
                                BH := 0.643169852882399 10-5
> M:=evalf(4*Pi*RT^3*BH/(mu*sin(134*Pi/180)));
                                M := 0.234385915855941 1023
> B:=evalf(BH/cos(64*Pi/180));
                                B := 0.0000146718108067423
> BB:=evalf(BH*sqrt(1+(tan(64*Pi/180))^2));
                                BB := 0.0000146718108067422

```

CPGE BENI MELLAL - EL FILALIS