Phy 2 09 PSI Mines

I. Etude d'un circuit à amplificateur opérationnel — PROBLEME III]

1. L'AO est idéal ($i_+ = i_- = 0$) et en fonctionnement linéaire ($\varepsilon = v_+ - v_- = 0$).

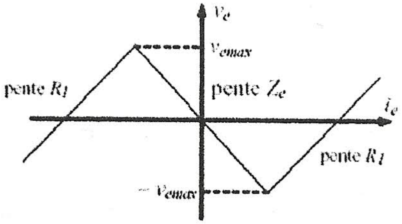
Par un diviseur de tension, on obtient $v_+ = \dfrac{R_3}{R_2+R_3}.v_s = v_- = v_e$, et aux bornes de R_1 : $v_e - v_s = R_1.i_e$. On élimine v_s entre les deux équations et $R_3.(v_e - R_1.i_e) = (R_2+R_3).v_e$.

D'où $\boxed{\dfrac{v_e}{i_e} = Z_e = -\dfrac{R_1.R_3}{R_2}}$

La limite de validité se trouve pour $v_s = \pm V_{sat}$, soit $\boxed{v_e = \dfrac{\pm R_3}{R_2+R_3}.V_{sat} = \pm v_{e\max}}$

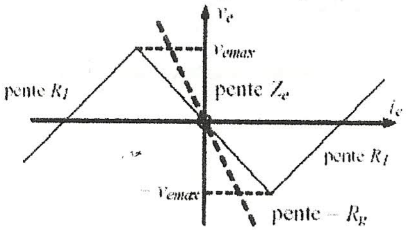
2. Pour $v_s = \pm V_{sat}$, on obtient $v_e = R_1.i_e \pm V_{sat}$. La limite étant obtenue pour $i_e = \mp \dfrac{R_2}{R_1.(R_2+R_3)}V_{sat}$

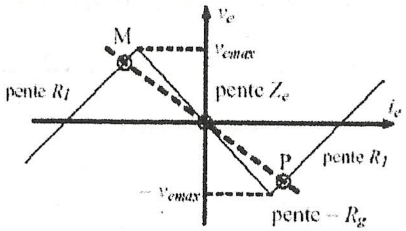
Plus précisément, en régime saturé :
Si $v_S=+V_{Sat}$, alors $V^+ = V_{Sat}\,R_3/(R_2+R_3)$ et $\varepsilon = V^+ - v_e > 0$ donne la condition : $v_e < V_{Sat}\,R_3/(R_2+R_3)$
Aux bornes de R_1 : $v_e - V_{Sat} = R_1 i_e$ (caractéristique rectiligne de pente R_1)
De même : Si $v_S = -V_{Sat}$ on obtient : $v_e > -V_{Sat}\,R_3/(R_2+R_3)$ pour $v_e + V_{Sat} = R_1 i_e$ (même pente R_1)
On vérifie la continuité en $v_e = v_{e\max}$ et $v_e = -v_{e\max}$ entre les deux régimes linéaire et saturé.
On obtient au final la caractéristique ci-contre.



3. Il faut brancher la masse de l'oscilloscope à la masse commune du montage, l'entrée 1 à la patte – de l'ampli Op pour avoir v_e et l'entrée 2 de l'oscilloscope de l'autre côté de R_g (borne commune à R_g et au générateur) pour avoir la tension $-R_g\,i_e$ proportionnelle à i_e.
Pour obtenir la caractéristique dans le bon sens (i_e et pas $-i_e$) on peut inverser la voie 2 à l'oscilloscope si celui-ci le permet (ce qui est en général le cas).
<u>Précaution</u> : avec ce branchement, la masse de l'oscilloscope ne peut pas être commune avec celle de la source E (qui est reliée à R_g). Si cette alimentation est reliée à la terre par sa prise de terre (si elle n'est pas en « masse flottante »), il faut absolument la brancher au montage par l'intermédiaire d'un transformateur d'isolement pour l'isoler de la masse, (sinon, R_g sera court-circuitée par la masse).

4. Avec E=0, on écrit la loi d'ohm aux bornes de R_g, on obtient l'équation d'une droite : $v_e = -R_g i_e$ que l'on peut tracer sur le même diagramme qu'en 2.





Si $R_g > \dfrac{R_1.R_3}{R_2}$, il n'y aura qu'un seul point de fonctionnement : $v_e = 0$ et $i_e = 0$

Si $R_g < \dfrac{R_1.R_3}{R_2}$, on aura alors trois points de fonctionnement : le précédent et deux points de fonctionnement en régime saturé.

5. Le point M appartient à la droite $v_e = R_1.i_e + V_{sat}$, l'AO est donc en saturation haute.
Le point P appartient à la droite $v_e = R_1.i_e - V_{sat}$, l'AO est donc en saturation basse.

6. A_o est de l'ordre de 10^6 et f_o de l'ordre de 10 Hz (ω_o de l'ordre de 100 rad/s)
Pour établir l'équation différentielle, on passe en réels l'expression complexe du gain différentiel, soit $\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{V_s} = A_0.\underline{\varepsilon}$ donne $v_s(t) + \dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dv_s}{dt}(t) = A_0.\varepsilon(t)$

On obtient v_+ et v_- par deux diviseurs de tension et $\varepsilon = v_+ - v_- = \left(\dfrac{R_3}{R_2+R_3} - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right).v_s$

D'où : $v_s(t) + \dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dv_s}{dt}(t) = A_0.\left(\dfrac{R_3}{R_2+R_3} - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right).v_s$ or $I_e = -\dfrac{v_s}{R_1+R_g}$

Soit : $I_e(t) + \dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dI_e}{dt}(t) = A_0.\left(\dfrac{R_3}{R_2+R_3} - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right).I_e$

Et $\boxed{\dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dI_e}{dt}(t) + I_e(t).\left[-A_0.\left(A - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right)+1\right] = 0}$ avec $A = \dfrac{R_3}{R_2+R_3}$

7. On néglige 1 devant $A.A_0$ et on obtient l'équation : $\dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dI_e}{dt}(t) - I_e(t).\left[A_0.\left(A - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right)\right] = 0$

Soit : $\dfrac{1}{\omega_0}.\dfrac{dI_e}{dt}(t) - I_e(t).\left[A_0.\left(\dfrac{R_3}{R_2+R_3} - \dfrac{R_g}{R_1+R_g}\right)\right] = 0$

Soit : $\boxed{\dfrac{dI_e}{dt}(t) - \omega_0.A_0.\left(\dfrac{R_1.R_3 - R_2.R_g}{(R_2+R_3).(R_1+R_g)}\right).I_e(t) = 0}$

On en tire donc les résultats de la question 4 : $R_g < \dfrac{R_1.R_3}{R_2}$ le système est instable, $R_g > \dfrac{R_1.R_3}{R_2}$ le système est stable.

Rq : Dans le cas d'un système instable, la sortie en régime permanent est forcément à $+V_{Sat}$ ou $-V_{Sat}$.
Comme dans le montage « comparateur à hystérésis (ou triger de Schmitt) » la valeur de la sortie dépend de l'histoire antérieure du système (v_s conserve la valeur qu'elle avait antérieurement).

8. Loi des mailles : $v_e = Z_e\,i_e = -L\,di_e/dt - Ri_e - q/C$

On dérive par rapport au temps : $\boxed{L.\dfrac{d^2I_e}{dt^2} + (R+Z_e).\dfrac{dI_e}{dt} + \dfrac{1}{C}.I_e = 0}$

9. Le système est le siège d'oscillations purement sinusoïdales si l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : soit $\boxed{R + Z_e = 0}$

L'équation devient donc : $\dfrac{d^2I_e}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}.I_e = 0$ d'où $\boxed{f_e = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

Pour qu'effectivement l'oscillation démarre, il faut avoir une solution en exponentielle croissante soit : $R + Z_e < 0$ ce qui donne : $\boxed{R < \dfrac{R_1.R_3}{R_2}}$

10. La résistance r_b est la résistance du fil de cuivre constituant l'enroulement de la bobine.

11. On peut faire varier la fréquence d'oscillation du circuit en faisant varier la valeur de la capacité C. On cherche la limite de démarrage des oscillations pour chaque fréquence (c'est-à-dire chaque valeur de capacité) : celle-ci est obtenue pour $R + r_b = \frac{R_1.R_3}{R_2}$, ce qui permet d'avoir accès à la valeur de r_b pour chaque fréquence.

Avec les données du texte : $\frac{\Delta r_b}{r_0} = \alpha\omega^2 = 20.10^{-2} = 20\%$ (pour $\omega = 2{,}00.10^4$ rad.s^{-1})

12. L'association est en parallèle : $\underline{Z} = \frac{R_P.(jL.\omega + r_0)}{R_P + r_0 + jL\omega}$. On multiplie haut et bas par le complexe conjugué : $\underline{Z} = \frac{r_0.R_P.(r_0 + R_P) + L^2.\omega^2.R_P + jL\omega R_P^2}{(R_P + r_0)^2 + L^2.\omega^2} \approx r_0 + \frac{L^2}{R_P}.\omega^2 + jL\omega$ avec les hypothèses données par l'énoncé.

On en tire $\alpha.r_0 = \frac{L^2}{R_P}$ d'où $\boxed{R_P = \frac{L^2}{\alpha.r_0} = 2{,}17.10^5\,\Omega}$

Et $\omega << \frac{R_P}{L} = 2{,}17.10^6$ rad.s^{-1}, on peut donc choisir avec un rapport 100, $\omega < 2.10^4$ rad.s^{-1}.

13. On travaille en complexes, on passera en réels à la fin du calcul avec la correspondance $j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt}$

On reprend la loi des mailles précédente : en notant Z l'impédance de la "bobine" :

$\underline{Z}.\underline{I}_e + R.\underline{I}_e + \frac{\underline{I}_e}{jC\omega} + Z_e.\underline{I}_e = 0$

On remplace $\underline{Z}$ par sa valeur : $\frac{R_P.(jL.\omega + r_0)}{R_P + r_0 + jL.\omega}.\underline{I}_e + R.\underline{I}_e + \frac{\underline{I}_e}{jC\omega} + Z_e.\underline{I}_e = 0$

D'où

$jC\omega.R_P.(jL.\omega + r_0).\underline{I}_e + jC\omega.(R_P + r_0 + jL.\omega).R.\underline{I}_e + (R_P + r_0 + jL\omega).\underline{I}_e + jC\omega.(R_P + r_0 + jL\omega)Z_e.\underline{I}_e = 0$

En développant et en ordonnant :

$(j\omega)^2\underline{I}_e.[LCR_P + LC(R + Z_e)] + (j\omega)\underline{I}_e.[L + CR_Pr_0 + C.(R_P + r_0).(R + Z_e)] + (R_P + r_0).\underline{I}_e = 0$

Soit l'équation différentielle finale :

$$\boxed{\left[LCR_P + LC\left(R - \frac{R_1.R_3}{R_2}\right)\right]\frac{d^2I_e}{dt^2} + \left[L + CR_Pr_0 + C.(R_P + r_0).\left(R - \frac{R_1.R_3}{R_2}\right)\right]\frac{dI_e}{dt} + (R_P + r_0).I_e = 0}$$

14. Avec les hypothèses du texte : $r_0 << R_P$ et $(R + Z_e) << R_P$, et avec la forme souhaitée :

$$\boxed{L.\frac{d^2I_e}{dt^2} + \left[\frac{L}{CR_P} + r_0 + R - \frac{R_1.R_3}{R_2}\right]\frac{dI_e}{dt} + \frac{1}{C}.I_e = 0}$$

On a bien la forme voulue en posant $\boxed{R_T = \left[\frac{L}{CR_P} + r_0 + R - \frac{R_1.R_3}{R_2}\right]}$

On a la forme habituelle de l'équation de relaxation d'un RLC série, soit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L.\omega_0}{R_T} = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

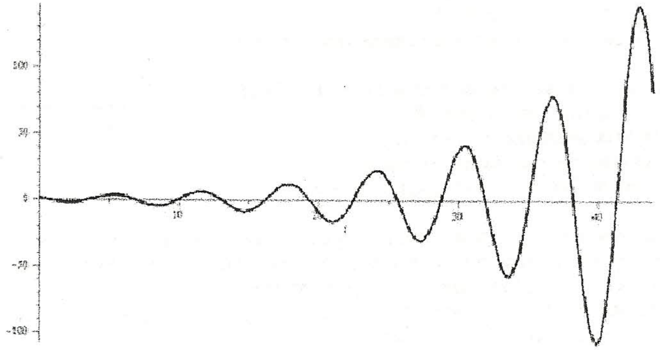
15. On écrit le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = R_T^2 - 4\frac{L}{C}$, le texte demande de travailler dans le cas où $\Delta < 0$, on aura donc le cas oscillant.

Avec les paramètres ω_0 et Q, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{d^2I_e}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dI_e}{dt} + \omega_0^2.I_e = 0$

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j.\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Les solutions réelles s'écrivent : $\boxed{I_e(t) = \frac{I_{e0}}{\cos\varphi}.\exp\left[-\frac{\omega_0.t}{2Q}\right].\cos\left(\omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.t + \varphi\right)}$ où I_{e0} et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

Ce qui donne ce type d'allure, avec $R_T < 0$, ($Q < 0$)



Si $R_T \to 0^-$, alors le coefficient dans l'exponentielle tend vers 0, les oscillations se stabilisent à une certaine amplitude.

On a alors : $R_T = \left[\frac{L}{CR_P} + r_0 + R - \frac{R_1.R_3}{R_2}\right] = 0$ avec $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

On remplace dans l'expression $\frac{1}{C}$ par $L.\omega_0^2$ et avec (12) : $\frac{L}{CR_P} = \frac{L^2}{R_P}.\omega^2 = \alpha.r_0.\omega^2$

Soit $r_0.(1 + \alpha.\omega^2) + R = r_b + R = \frac{R_1.R_3}{R_2} = -Z_e$ la "résistance négative" doit bien compenser les autres résistances du circuit.