

Commentaires sur l'épreuve : De longueur et difficulté raisonnable, l'énoncé est bien conforme à l'esprit de la filière PSI. Elle se compose de trois parties : étude d'une conduite forcée, étude d'une turbine Pelton, enfin étude d'un alternateur.

On a pu remarquer une erreur d'énoncé bien visible (questions 18 et suivantes, où l'auteur confond R_R et R_F).

On note aussi des imprécisions dans les notations des débits q , Q , q' et Q' dans les référentiels $\{L\}$ et $\{L'\}$, qui rendent l'étude de l'auget problématique.

I.1. Les conditions d'application de la relation de Bernoulli sont réunies (fluide parfait, incompressible , écoulement permanent et irrotationnel)

Entre un point M de la canalisation situé à l'altitude z et A on peut écrire :

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + g.z_A = \frac{P_M}{\mu} + \frac{v_M^2}{2} + g.z_M$$

Or la section de la canalisation est constante le long de celle-ci, et le débit volumique est conservé le long de la canalisation, puisque le fluide est incompressible, on peut donc en déduire que $v_A = v_M$.

D'où $P_M = P_1(z) = P_A - \mu.g.z$ soit $P_1(z) = P_0 \left(1 - \frac{\mu.g.z}{P_0}\right)$ expression dans laquelle on identifie $z_0 = P_0/\mu g$.
 AN : $z_0 = 10$ m

A l'altitude z_1 telle que la pression soit égale à la pression de vapeur saturante de l'eau apparaît le phénomène de cavitation :

$$z_1 = z_0 \cdot \left(1 - \frac{P_{sat}}{P_0}\right)$$

l'AN donne $z_1 = 9,7$ m.

I.2. Appliquons la relation de Bernoulli entre un point B situé à la surface de la retenue d'eau et un point S situé à la sortie de l'injecteur :

$$\frac{P_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} + g.z_B = \frac{P_S}{\mu} + \frac{v_S^2}{2} + g.z_S$$

$z_B - z_S = H$, $v_B \ll v_S$ car le débit volumique est le même en S et B, mais la section de la retenue est très supérieure à celle de la sortie. De plus $P_B = P_S = P_0$, car B et S sont à l'air libre.

Alors :

$$v_S = \sqrt{2.g.H}$$

A nouveau, on peut exploiter l'égalité du débit volumique en A et S :

$$v_S \cdot \pi \frac{d^2}{4} = v_A \pi \frac{D^2}{4}$$

D'où : $v = v_S \frac{d^2}{D^2}$ soit $v = \sqrt{2.g.H} \frac{d^2}{D^2}$

I.3. Appliquons à nouveau la relation de Bernoulli entre un point M de la canalisation situé à l'altitude z et le point S.

$$\frac{P_0}{\mu} + \frac{v_S^2}{2} + g.z_S = \frac{P(z)}{\mu} + \frac{v_M^2}{2} + g.z$$

Avec $z_S = 0$, $v_S = \sqrt{2.g.H}$ et $v_M = v = \sqrt{2.g.H} \frac{d^2}{D^2}$ on déduit :

$$P(z) = P_0 + \mu.g.H \cdot \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) - \mu.g.z$$

Le phénomène de cavitation disparaît complètement de la canalisation s'il ne se produit pas en $z = H - h$, point le plus haut de la canalisation.

Soit $P(H-h)=P_{sat}$ la condition qui permet de déduire d_0 .

$$d_0 = D \cdot \left(\frac{(P_0 - P_{sat} - \mu \cdot g \cdot (H - h))}{\mu \cdot g \cdot H} + 1 \right)^{(1/4)}$$

L'AN. Conduit à $d_0=25.4$ cm, si on néglige h devant H .

I.4. Avec $d=12$ cm, une vitesse en sortie $c'=74$ m.s⁻¹ est obtenue pour

$$H' = \frac{c'^2}{2 \cdot g}$$

D'où le coefficient de contraction :

$$C_c = \frac{c'^2}{2 \cdot g \cdot H} = \left(\frac{c'}{c} \right)^2$$

AN : $C_c=0.91$

Le coefficient obtenu est inférieur à 1. Ce qui provient du fait que la vitesse réelle en sortie de l'injecteur, obtenue pour une hauteur H est inférieure à celle que l'on attend dans l'hypothèse du fluide parfait. Or dans le fluide réel il se produit des pertes d'énergie du fait des frottements visqueux, l'énergie potentielle du fluide situé initialement à l'altitude H n'est pas entièrement convertie en énergie cinétique.

D'autres explications : il faut reprendre toutes les hypothèses de Bernoulli : permanent n'est pas remis en cause. Incompressible peut être remis en cause.

I.5. Par définition du débit volumique, si on note S la section de sortie :

Petite erreur d'énoncé : D_m (en litres par seconde), qui aura certainement rectifiée par les candidats...

$$q = S \cdot c$$

$$q = c \cdot \pi \frac{d^2}{4}$$

Soit :

$$D_m = \mu \cdot c \cdot \pi \frac{d^2}{4}$$

Les AN donnent : $q=0,87$ m³.s⁻¹ et $D_m= 873$ kg.s⁻¹

$$P_c = \mu \cdot q \cdot \frac{c'^2}{2}$$

La puissance cinétique réelle est soit $P_c= 2,3$ M W.

I.6. A l'origine, l'énergie de l'eau est entièrement sous forme d'énergie potentielle de pesanteur (liquide dans la retenue, à l'altitude H , avec une vitesse nulle), d'où l'appellation puissance potentielle attribué à la quantité P_{pot} .

$$\eta = \frac{P_c}{P_{pot}}$$

$$\eta = \frac{\mu \cdot q \cdot \frac{c'^2}{2}}{\mu \cdot q \cdot g \cdot H}$$

$$\eta = \frac{c' \cdot \frac{c'^2}{2}}{c \cdot g \cdot H}$$

$$\eta = C_c^{3/2}$$

L'AN donne : $\eta=87$ %.

II.7. Dédoubler le jet permet de rendre l'effort symétrique par rapport au milieu de l'auget, et évite ainsi une usure au niveau de l'axe de rotation de la turbine.

II.8. $\{L'\}$ est en translation rectiligne uniforme dans $\{L\}$, donc la vitesse d'arrivée de l'eau sur l'auget est constante. Comme l'auget est immobile dans $\{L'\}$, l'écoulement y est bien permanent.

La loi de composition des vitesses permet d'écrire : $\vec{C} = \vec{C}'_{inc} + \vec{u}$ avec $\{L\}$ référentiel absolu et $\{L'\}$ référentiel relatif. Soit :

$$\vec{C}'_{inc} = \vec{C} - \vec{u}$$

On peut alors appliquer la relation de Bernoulli dans le référentiel $\{L'\}$, car l'écoulement y est permanent, le fluide est incompressible .

Comme la pression et l'altitude sont identiques aux points où on applique Bernoulli, on en déduit que $c'_d = c'_{inc}$. soit $c'_d = u - c$.

D'_m est le débit massique du fluide à travers une section droite du tube de courant dans le référentiel $\{L'\}$.

II.9.

Le bilan de quantité de mouvement sur Σ conduit à :

$$d\vec{p}' = s \cdot \mu \cdot (c - u) dt \cdot ((\vec{u} - \vec{c}) - (\vec{c} - \vec{u}))$$

Appliquons à l'auget la relation fondamentale de la dynamique :

Dans le référentiel galiléen $\{L'\}$.

Il est soumis à

$$\vec{F}_{fluide \rightarrow auget} ; \vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} ; \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow auget}$$

La RFD s'écrit alors $\vec{0} = \vec{F}_{fluide \rightarrow auget} + \vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} + \vec{F}_{air \rightarrow auget}$

Soit $\vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} = -\vec{F}_{fluide \rightarrow auget} - \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow auget}$

Appliquons à Σ la RFD, dans le référentiel galiléen $\{L'\}$.

Il est soumis à $\vec{F}_{auget \rightarrow fluide} ; \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow fluide}$

La RFD s'écrit alors : $\frac{d\vec{p}'}{dt} = \vec{F}_{auget \rightarrow fluide} + \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow fluide}$ soit $\vec{F}_{auget \rightarrow fluide} = \frac{d\vec{p}'}{dt} - \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow fluide}$

Comme $\vec{F}_{auget \rightarrow fluide} = -\vec{F}_{fluide \rightarrow auget}$

On en déduit :

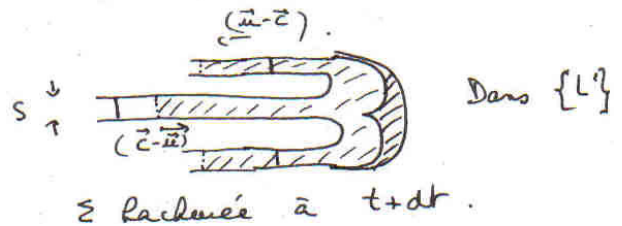
$$\vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} = -\vec{F}_{fluide \rightarrow auget} - \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow auget}$$

$$\vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} = \frac{d\vec{p}'}{dt} - \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow fluide} - \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow auget}$$

$$\vec{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow auget} = \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

En effet $\vec{F}_{pressionP0 \rightarrow fluide} + \vec{F}_{pressionP0 \rightarrow auget} = \vec{0}$ car la surface qui entoure Σ et l'auget est fermée.

II.9.



Finalement :

$$\vec{F}_{\text{bati} > \text{auget}} = -s \cdot \mu \cdot 2 \cdot (c - u)^2 \vec{e}_x$$

Ou encore, en faisant intervenir Q' :

$$\vec{F}_{\text{bati} > \text{auget}} = -Q' \cdot \mu \cdot 2 \cdot (c - u) \vec{e}_x$$

Notations problématiques :

Question 5 : q et q' désignent les débits volumiques sortant de l'injecteur, donc, débits définis dans $\{L\}$ respectivement débit théorique idéal (sans pertes) et débit réel.

Question 9 : Q' est défini comme le débit dans $\{L'\}$. L'auteur dit : « remarquer que $Q'=q'$ » ce qui est faux. Puisque les débits ne sont pas définis dans le même référentiel.

Question 11 : on doit admettre la « subtilité » qui consiste à égaler Q et Q' . Soit.

Question 11 : P_c est définie avec q . On reconnaît donc le débit sortant de l'injecteur défini à la question 5. Pour résoudre la question il faut simplifier q et Q dans η_c . Donc en fait admettre $Q=q$. Ce qu'on admet sans peine puisqu'il s'agit du débit volumique dans $\{L\}$, donc de deux notations différentes pour la même grandeur.

Conclusion : L'auteur aurait du utiliser les notations : Q débit volumique dans $\{L\}$, Q' dans $\{L'\}$ uniquement. S'il tenait à utiliser q et q' aussi. Il fallait faire remarquer que $Q=q$, et pas $Q'=q'$...

II.10. En considérant que la distance de l'auget à l'axe est égale à R , le couple est

$$\Gamma = F_{\text{auget} > \text{bâti}} \cdot R$$

$$\Gamma = 2 \cdot R \cdot \mu \cdot Q \cdot (c - u)$$

Ici, on tenu compte de la « subtilité » suggérée par l'énoncé.

II.11. La puissance mécanique P reçue par le rotor est égale au produit du couple par la vitesse angulaire de rotation du rotor soit $\Omega = u/R$.

$$D'où : P = 2 \cdot Q \cdot \mu \cdot (c - u) \cdot u$$

Le rendement η_{rot} de la turbine est donc :

$$\eta_{\text{rot}} = \frac{P}{P_c} = \frac{2 \cdot \mu \cdot u \cdot Q \cdot (c - u)}{\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot q \cdot c^2}$$

$$\eta_{\text{rot}} = \frac{4 \cdot u \cdot (c - u)}{c^2}$$

$$\eta_{\text{rot}} = 4 \cdot \frac{u}{c} \cdot \left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

Posons $x = u/c$. $\eta_{\text{rot}} = 4 \cdot x \cdot (1 - x)$

$d\eta_{\text{rot}}/dx = 4(1 - 2 \cdot x)$, donc $d\eta_{\text{rot}}/dx = 0$ pour $x = 1/2$, soit $u = c/2$.

Le rendement maximum vaut : $\eta_{\text{rot, max}} = 1$.

II.12. La vitesse de sortie de l'eau dans le référentiel $\{L\}$ est , d'après la loi de composition des vitesses :

$\mathbf{c}_{\text{eau}/L} = \mathbf{c}_{\text{eau}/L'} + \mathbf{u}$ soit $c_{\text{eau}/L} = 2 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ lorsque $u = c/2$. La puissance cinétique de l'eau en sortie de la turbine est nulle ce qui est cohérent avec la valeur 1 du rendement toute la puissance cinétique disponible à l'entrée est transmise à la turbine.

II.13. Pour atteindre le rendement maximum il faut que $u = c/2$ or $u = R \cdot \Omega$, soit $R = c/(2 \cdot \Omega)$, l'An donne $R = 47$ cm, le résultat est réaliste si on en juge d'après la photo fournie.

La puissance maximale est alors : $P_{\text{max}} = 2 \cdot Q \cdot \mu \cdot c^2/4$ l'AN donne $P_{\text{max}} = 4$ MW.

II.14. Le rendement réel de la turbine vaut 0.87. D'où $P = 0,87 \cdot P_c$ ce qui numériquement donne : $P = 3.6$ MW. Les raisons pour lesquelles on n'atteint pas le rendement maximal sont essentiellement les pertes par frottement dans le fluide et au contact des augets.

III.15. D'après la loi de Faraday, la force électromotrice qui apparaît dans une bobine soumise au flux de champ magnétique $\Phi(t)$ est : $e = -d\Phi/dt$.

D'où :

$$e_i = \Omega \cdot \Phi_0 \cdot \sin(\Omega t - \theta_i)$$

Leur valeur efficace commune est :

$$E = \frac{\Omega \cdot \Phi_0}{\sqrt{2}}$$

III.16. Pour que l'on puisse directement coupler l'alternateur au réseau EDF, il faudrait que la fréquence des signaux soit égale à $f_0 = 50\text{Hz}$.

Soit une vitesse de rotation $\Omega_0 = 50 \times 60 = 3000 \text{ tr/min}$.

La vitesse de translation des augets serait alors $u_0 = \Omega_0 \cdot R = 50 \times 2\pi \times 0,47 = 148 \text{ m/s}$, ce qui est en effet supérieur à la vitesse de l'eau à la sortie de l'injecteur (74 m/s).

III.17. Pour démultiplier la vitesse de rotation sur l'arbre, la faire passer de 74 à 148 tr/mn, on peut utiliser un système d'engrenages.

III.18.

Là, il me semble que l'énoncé est faux : ne faut-il pas tout d'abord résoudre le Pb en considérant R_R négligeable ? Dans cette hypothèse :

On ne nous donne aucune indication sur l'impédance propre (inductance et résistance) des bobinages statoriques, on doit donc les négliger. On applique alors tout simplement trois lois de mailles :

$$\underline{e}_i = \underline{Z} \cdot \underline{i}_i$$

Soit

$$\underline{i}_N = \frac{1}{\underline{Z}} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$$

$$\underline{i}_N = \frac{1}{Z_0} e^{-j\varphi} E \sqrt{2} \cdot e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} (1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}})$$

$$\underline{i}_N = \frac{1}{Z_0} e^{-j\varphi} E \sqrt{2} \cdot e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} (1 - 1)$$

Alors $i_N(t) = \text{Re}(\underline{i}_N) = 0$.

Le fil de neutre permet de faire passer le courant de déséquilibre qui apparaît lorsque le fonctionnement n'est pas parfait.

III.19.

Le système d'équations est :

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{Z} \cdot \underline{i}_1 + R_R (\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3) \\ \underline{e}_2 = \underline{Z} \cdot \underline{i}_2 + R_R (\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3) \\ \underline{e}_3 = \underline{Z} \cdot \underline{i}_3 + R_R (\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3) \end{cases}$$

On en déduit :

$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = \underline{i}_N (\underline{Z} + 3R_R)$, à nouveau i_N est nul. Le fil de neutre n'est parcouru par un courant qu'en cas de déséquilibre entre les phases.

Alors le courant électrique réel est :

$$\underline{i}_i = \frac{1}{Z_0} e^{-j\varphi} E \sqrt{2} \cdot e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{-j\theta_i}$$

D'où :

$$i_1(t) = \frac{E \sqrt{2}}{Z_0} \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$i_2(t) = \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} \sin(\Omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_3(t) = \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} \sin(\Omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})$$

III.20. La puissance moyenne $P_{\text{él}}$ délivrée par l'alternateur est $P_{\text{él}} = 3 \times Z_0 \cos \varphi \cdot I_{\text{eff}}^2$ soit

$$P_{\text{él}} = 3 \times \frac{E^2}{Z_0} \times \cos \varphi$$

Le rendement de l'alternateur est défini par $\rho = P_{\text{él}}/P_{\text{turb}}$ d'où $P_{\text{él}} = \rho \times P_{\text{turb}}$, soit

$$\cos \varphi = Z_0 \frac{\rho \times P_{\text{turb}}}{3 \times E^2}$$

L'AN donne $\cos \varphi = 0,80$.

III.21. Calculons la composante sur l'axe Ox du champ magnétique créé par les bobines au niveau du rotor :

$$B_x = \alpha \cdot (i_1(t) - i_2(t) \cdot \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) - i_3(t) \cdot \sin(\frac{\pi}{6}))$$

$$B_x = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} [\sin(\Omega t - \varphi) - \sin(\Omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}) \cdot \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) - \sin(\Omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}) \cdot \sin(\frac{\pi}{6})]$$

$$B_x = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} [\sin(\Omega t - \varphi) - [\sin(\Omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}) + \sin(\Omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})] \cdot \frac{1}{2}]$$

$$B_x = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} [\sin(\Omega t - \varphi) - [2 \cdot \sin(\Omega t - \varphi - \pi) \cdot \cos(\frac{\pi}{3})] \cdot \frac{1}{2}]$$

$$B_x = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} \sin(\Omega t - \varphi) \cdot [1 + \frac{1}{2}]$$

De même calculons la composante sur Oy :

$$B_y = \alpha \cdot (+i_2(t) \cdot \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) - i_3(t) \cdot \cos(\frac{\pi}{6}))$$

$$B_y = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} [+ \sin(\Omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}) - \sin(\Omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})] \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B_y = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} 2 \sin(\frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\Omega t - \varphi - \pi) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion :

$$B_x = \alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} \cdot \sin(\Omega t - \varphi) \cdot \frac{3}{2}$$

$$B_y = -\alpha \cdot \frac{E\sqrt{2}}{Z_0} \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \cdot \frac{3}{2}$$

Ce champ magnétique tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire Ω , dans le même sens que le champ créé par le rotor, et l'angle que fait le champ du rotor par rapport au champ créé par les bobines est $(\pi/2+\varphi)$.

III.22. Le couple exercé par le champ induit sur le moment magnétique est : $\vec{\Gamma}_{rot} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ind}$

$$\text{Soit } \vec{\Gamma}_{rot} = -M.\alpha \frac{3E}{Z_0.\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).\vec{e}_z$$

Alors la puissance reçue par le rotor , qui est aussi la puissance de ce couple est

$$P_{rot} = \vec{\Gamma}_{rot} . \vec{\Omega}$$

$$P_{rot} = -M.\alpha \frac{3E}{Z_0.\sqrt{2}} \Omega \cos(\varphi)$$

Le bilan de puissance consiste à considérer que la puissance mécanique fournie au rotor (qui provient de la turbine pelton) est transmise au réseau sous forme électrique, dans un modèle sans perte (mécanique ou fer), la transmission est totale. Alors plus la puissance fournie au réseau est importante plus le couple résistant exercé est important.

La puissance exercée sur le rotor par les forces de Laplace dues au champ induit par les bobines statoriques est P_{rot} , donc la puissance électrique est $P_{el} = -P_{rot}$ Elle est en effet proportionnelle à $\Omega.E \cos\varphi / Z_0$, donc à $E^2 . \cos\varphi / Z_0$ puisque $\Omega = 2^{0.5} E / \Phi_0$.