ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 4 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
Physique II – Filière PSI

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 7 pages.

🗣 Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

🗣 Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

🗣 Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

MOTEUR SYNCHRONE AUTOPILOTÉ

La plupart des locomotives utilise la traction électrique. Parmi les procédés utilisés, figurent les chaînes de traction à moteur à courant continu, à moteur asynchrone et à moteur synchrone auto piloté. Pour les locomotives de puissance, le choix actuel de la SNCF est la chaîne de traction à moteurs synchrones autopilotés étudiée dans ce problème.

Les figures principales sont regroupées à la fin de l'énoncé.

Ordres de grandeur [Fig. 1]

La masse d'une rame du TGV Atlantique (deux motrices et dix voitures remorques) est $m = 700\ t$. La figure 1 représente les courbes donnant les variations suivant la vitesse, notée v, d'une part de la résultante des actions extérieures s'exerçant sur la rame, notée (F_e, en pointillés), d'autre part de la résultante des actions exercées par l'ensemble des moteurs, (F, en traits pleins). On rappelle que $1\ \mathrm{daN} = 10\ \mathrm{N}$.

1. La résultante extérieure se modélise classiquement par $F_e = A + Bv + Cv^2$ où (A, B, C) sont trois constantes ; proposer une interprétation physique pour chacun des termes de cette loi.

2. Déterminer graphiquement la vitesse de la rame ainsi que la résultante de traction en régime continu. Discuter la stabilité de ce régime.

3. Déterminer numériquement, pour ce régime, la puissance développée par l'ensemble des moteurs.

4. En envisageant le cas où cette traction est assurée par huit moteurs à courant continu, alimentés par une tension de ligne à courant continu de $1500V$, estimer l'ordre de grandeur du courant circulant dans le rotor.

5. Quels problèmes peut alors poser ce type de dispositif ?

On analyse dans ce qui suit le cas où la traction électrique est assurée par des moteurs synchrones. La première partie est consacrée à l'étude du moteur, la seconde à l'étude de sa commande.

Première partie : Le moteur synchrone

Le principe du moteur synchrone repose sur l'interaction entre un champ magnétique « tournant » généré par des courants circulant dans les circuits statoriques, et un champ associé aux courants circulant dans les bobinages du rotor.

Étude du stator [Fig. 2-5] :

Le stator porte trois bobinages identiques, alimentés en courant triphasé. Chacun d'eux est assimilé à une spire plate, parcourue par le courant $i_k(t)$ avec $k \in \{1,2,3\}$. L'alimentation triphasée est caractérisée par l'ensemble des courants (Fig. 2) :

$$i_1(t) = I\cos(\omega t) \quad i_2(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad i_3(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Les parties des spires parallèles à l'axe (O,z), positionnées dans des encoches situées à l'intérieur du stator, se referment en formant des cadres rectangulaires. On note $\vec{n}_k$ la normale au cadre et $i_k(t)$ le courant algébrique (orientation sur la figure) associés à la spire k. Le stator et le rotor, tous deux réalisés dans un matériau magnétique linéaire, sont séparés par une zone d'air, d'épaisseur e, nommée entrefer. La faible valeur de e permet de confondre le rayon intérieur du stator et le rayon extérieur du rotor, notés R l'un et l'autre.

La perméabilité relative du matériau magnétique, μ_r, sera considérée comme infinie ; celle de l'air sera prise égale à 1.

6. Les effets de bord suivant la direction (O,z) sont négligés. Justifier que le champ $\vec{B}$ est radial dans l'entrefer.

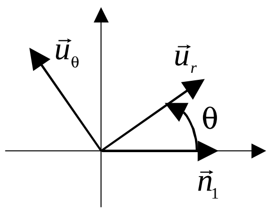


Figure 3

L'espace est rapporté au repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ défini sur la figure 3 ; les angles sont repérés à partir du vecteur $\vec{n}_1$. On désigne par $\vec{B}_e = B(\theta,t)\,\vec{u}_r$, le champ dans l'entrefer ; on néglige sa variation en fonction de r sur l'épaisseur e de l'entrefer. Le théorème d'Ampère dans un milieu magnétique s'écrit $\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = i$, où (C) désigne un contour fermé orienté et i la somme des courants algébriques libres traversant ce contour. Dans le cas où le contour traverse plusieurs milieux, on admet que la circulation de $\vec{H}$ sur les portions situées dans les milieux de haute perméabilité relative est négligeable devant celle qui est calculée sur les portions situées dans l'air.

7. À l'aide du contour (C) défini sur la figure 4, établir que le champ $B_1(\theta,t)$ créé par le courant $i_1(t)$, satisfait la relation $B_{01} - B_1(\theta,t) = f_1(\theta)\, i_1(t)$, où la fonction $f_1(\theta)$ est représentée sur la figure 5. Déterminer la constante β (Fig. 5) et préciser la signification de B_{01}.

8. De même, représenter les graphes des fonctions $f_2(\theta)$ et $f_3(\theta)$ associées aux champs B_2 et B_3 créés par les courants $i_2(t)$ et $i_3(t)$, tels que $B_{0k} - B_k(\theta,t) = f_k(\theta)\, i_k(t)$. Montrer qu'il existe une relation simple entre $f_2(\theta)$ et $f_1\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ puis $f_3(\theta)$ et $f_1\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

9. Les fonctions f_k, périodiques, admettent un développement en série de Fourier dont on ne retiendra que le terme fondamental (développement limité au premier harmonique). Exprimer $f_1(\theta)$. On donne :

$$f_k(\theta) \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta)\, d\theta + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta)\cos(\theta)\, d\theta\right]\cos(\theta) + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta)\sin(\theta)\, d\theta\right]\sin(\theta)$$

10. Exprimer le flux du champ magnétique $\vec{B}_1(\theta,t)$ créé par le courant $i_1(t)$ à travers la surface fermée d'un cylindre d'axe (O,z), de base circulaire de rayon r et de hauteur h, la partie latérale étant située dans l'entrefer $(R < r < R + e \approx R)$.

11. Rappeler l'équation de Maxwell associée au flux de $\vec{B}$. Que peut-on dire pour le flux calculé précédemment ? En déduire l'expression du champ $\vec{B}_1(\theta,t)$ dans l'entrefer, en fonction de β, $i_1(t)$ et θ. Donner enfin l'expression des champs $\vec{B}_2(\theta,t)$ et $\vec{B}_3(\theta,t)$.

12. À partir des résultats précédents, montrer que le champ magnétique total dans l'entrefer est de la forme $\vec{B}(\theta,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \theta)$ (*champ glissant*) et donner l'expression de la constante B_0 en fonction de β, I et μ_0. Formules utiles pour cette question :

$$\cos(x) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos(x)$$

$$\cos(x)\cos(y) - \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y)$$

Étude du rotor [Fig. 6]

Le bobinage porté par le rotor est modélisé par une spire rectangulaire de largeur $2R$ et de hauteur H, solidaire du rotor, parcourue par le courant continu I_e (Figure 6). Sa position est repérée par l'angle θ entre $\vec{n}$, vecteur normal à la spire, et $\vec{n}_1$ (défini fig. 2).

13. Établir que Γ, moment par rapport à l'axe (O,z), des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre, satisfait $\Gamma = I\,\Phi_0 \sin(\omega t - \theta)$, où Φ_0 est fonction de μ_0, I_e, R, H et e.

14. Le rotor tourne à la vitesse angulaire ω_r et la position de $\vec{n}$ se repère par l'angle $\theta = \omega_r t - \varphi$. Pour quelle valeur de ω_r la moyenne temporelle de Γ est-elle non nulle ? Exprimer alors le couple Γ ; dans quelle plage de valeurs de φ ce couple est-il moteur ?

15. Le moteur synchrone entraîne une charge dont le couple résistant est noté Γ_r. Quelle est la valeur maximale Γ_M que peut prendre Γ_r en régime permanent ?

16. En supposant $\Gamma_r < \Gamma_M$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, montrer qu'il existe deux points de fonctionnement possibles en régime permanent. Étudier la stabilité de ces régimes par rapport à d'éventuelles perturbations.

Forces électromotrices induites par le rotor dans les bobinages du stator

On s'intéresse aux flux Φ_k $(k = 1,2,3)$ du champ magnétique produits par le courant d'intensité I_e dans les bobinages du stator. Ces flux, dépendant de la position du rotor par l'intermédiaire de l'angle θ seront ici décrits par le premier harmonique de leurs développements en série de Fourier : $\Phi_k = \Phi_{0k} + \Phi_{1k}\cos(\theta + \varphi_k)$. On conviendra que tous les Φ_{1k} sont positifs.

17. Que représente le plan contenant l'axe (O, z) et le vecteur **n** (cf. Fig. 6) pour le système constitué de la spire modélisant le bobinage du rotor et les pièces métalliques ?

18. Déterminer les valeurs de θ rendant le flux Φ_1 nul (on pourra admettre que tous les Φ_{0k} sont nuls). En déduire la valeur du déphasage φ_1. Exprimer alors les flux Φ_2 et Φ_3 en fonction de $\Phi_e = \dfrac{\Phi_{11}}{\sqrt{2}}$ et de θ (on ne cherchera pas à déterminer Φ_{11}).

19. En déduire, pour $\omega = \omega_r$, les forces électromotrices induites dans les bobinages du stator en fonction de Φ_e, ω, t et φ. Quelle est leur valeur efficace, E ?

Partie II : La commande [Fig. 7-9]

La commande des moteurs est assurée par l'ensemble décrit sur la figure 7. L'interrupteur K se commande à l'ouverture et à la fermeture. Les interrupteurs K_k et K'_k se commandent uniquement à la fermeture. On note $u_H(t) = V_A - V_M$. Chacun des bobinages du stator étudié dans la première partie est modélisé par le montage de la figure 8. On considère que les bobinages sont identiques et l'on note R et L, respectivement, la résistance et l'inductance équivalente.

L'ensemble $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ représente les trois courants triphasés introduits dans la première partie, et l'ensemble $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$, les trois forces contre-électromotrices d'induction liées à l'influence du rotor sur le stator.

L'inductance de lissage L_s rend négligeable l'ondulation du courant i. Ce dernier pourra être assimilé à sa valeur moyenne I_m. La figure 9 fournit les variations de différentes grandeurs en fonction du temps sur une période de commande T. Dans l'exemple considéré, le courant i_1 est en avance par rapport à la tension e_1 d'un angle noté ψ.

20. Déterminer la séquence de commande de fermeture des interrupteurs de l'onduleur pour obtenir les trois courants de la figure 9. On donnera les couples d'interrupteurs fermés pour chacun des six intervalles constituant la période.

21. On admet pour la suite que, lorsque le courant est en avance sur la tension, la fermeture d'un interrupteur entraîne spontanément l'ouverture de l'interrupteur adéquat. On considère aussi que les commutations s'effectuent de façon idéale. Montrer que, quel que soit l'intervalle de temps considéré, le dipôle compris entre A et M est constitué de l'association série d'une résistance égale à $2R$ et d'une inductance égale à $2X + L_s$ et de la source de tension $u_0(t)$ représentée sur la figure 9. Cette tension, est définie comme la différence $u_0(t) = u(t) - v(t)$, où $u(t)$ et $v(t)$, représentées sur le même chronogramme que $u_0(t)$, s'identifient, dans l'intervalle de temps considéré, à e_1, e_2 ou e_3, en fonction des interrupteurs passants ; par exemple, pour $0 < t < \frac{T}{6}$, $u_0(t) = e_1(t) - e_3(t)$.

22. Écrire l'équation donnant $u_H(t)$ en fonction de $i(t)$ et $u_0(t)$. Considérant que ces grandeurs instantanées sont périodiques, donner la relation liant leurs moyennes temporelles respectives, U_H, I_m et U_R ; le résultat ne dépend ni de X ni de L_s.

23. L'interrupteur commandé K est fermé pendant la fraction α de la période T et ouvert pendant la durée $(1-\alpha)T$, avec $0 \le \alpha \le 1$. Donner la valeur moyenne de $u_H(t)$ sur une période. Notant E la valeur efficace des forces contre-électromotrices e_1, e_2 et e_3 introduites à la question 19 et admettant la relation générale $U_R = \langle u_0(t) \rangle_T = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E\cos(\psi)$, établir la relation $\alpha U_0 = 2RI_m + \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E\cos(\psi)$.

Ordres de grandeur

Le tableau ci-dessous récapitule quelques données concernant le moteur auto piloté du TGV Atlantique (1985).

MOTEUR SYNCHRONE AUTOPILOTE POUR TGV ATLANTIQUE	
Stator	Triphasé simple étoile
Rotor	6 pôles saillants
Vitesse maximale	4000 tr/mn pour 300 km/h
Puissance au régime permanent	800 kW à 3785 tr/mn $(\Omega \approx 393{,}5\ \mathrm{rad.s^{-1}})$ Courant d'entrée onduleur : 586 A Tension d'entrée onduleur : 1423 V Courant d'excitation : 330 A
Courant de démarrage entrée onduleur	1150 A
Courant d'excitation au démarrage	550 A

Dans toute la suite de l'étude, on assimile les courants à leur terme fondamental, ce qui permet d'utiliser les résultats obtenus dans la première partie. On admet la relation suivante, entre les valeur efficace et moyenne de l'intensité du courant circulant dans les bobinages du stator : $I = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_m$.

24. À partir des résultats des questions 13 et 18 et de la figure 9, établir la relation $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$. Exprimer le couple moteur en fonction de Φ_0, I_m et ψ.

25. À l'aide du tableau, calculer la valeur du couple par moteur de TGV.

26. On donne : $I_e = 330\ \mathrm{A}$, $I_m = 586\ \mathrm{A}$, $R = 10\ \mathrm{cm}$, $h = 50\ \mathrm{cm}$, $e = 1\ \mathrm{mm}$ et $\cos(\psi) = 0{,}634$. Calculer la valeur numérique de Φ_0 et celle du couple Γ de la question 13.

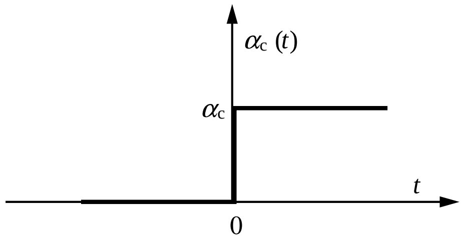
27. Le rapport des deux couples trouvés correspond au fait que phases et rotor comprennent l'un et l'autre plus d'une spire. Convenant que l'enroulement du rotor est constitué de 15 spires, calculer le nombre de spires par phase.

Asservissement de vitesse [Fig. 10-12] :

Le moteur entraîne un dispositif présentant un couple résistant Γ_r proportionnel à la vitesse de rotation $\Gamma_r = -C\omega$, où C est une constante. La position du rotor est repérée par un capteur qui permet de régler la période de commande de l'onduleur à une valeur identique à celle de rotation du rotor. Le synchronisme est ainsi toujours assuré. On rappelle que la valeur efficace de la force électromotrice est notée $E = \Phi_e \omega$, Φ_e étant une constante homogène à un flux.

L'étude de l'ensemble hacheur-onduleur a montré que les deux paramètres de réglages sont l'angle ψ et la constante α. Dans le dispositif de régulation étudié, on choisit de fixer ψ à une valeur suffisante et de conserver la constante α comme seul paramètre de commande. Ainsi, en agissant sur cette grandeur, on dispose d'une fonction de commande $\alpha(t)$. On désigne par J le moment d'inertie de la partie tournante par rapport à l'axe de rotation du moteur

28. . Établir l'équation différentielle reliant $\alpha(t)$ et $\omega(t)$ sous la forme $\frac{d\omega}{dt} = A_0(-C'\omega + \gamma\alpha)$ où A_0, C' et γ sont à déterminer, sachant que C' est homogène à C. En déduire que la fonction de transfert $\underline{H}(p) = \frac{\underline{\omega}(p)}{\underline{\alpha}(p)}$ s'écrit $\underline{H}(p) = \frac{H_0}{1+\tau p}$ où H_0 et τ sont à déterminer.



29. On réalise le circuit d'asservissement de vitesse schématisé sur la figure ci-contre : $\alpha_c(t)$ désigne la grandeur de consigne, ici égale à un échelon caractérisé par $t < 0$, $\alpha_c(t) = 0$ et $t \geq 0$, $\alpha_c(t) = \alpha_c$. Un capteur de vitesse permet de comparer la grandeur ramenée proportionnelle à la vitesse (le rapport de conversion G, Fig. 10 et 11, est une constante) à la grandeur de consigne. Déterminer la réponse en vitesse $\omega(t)$ ainsi que l'erreur en régime permanent[1]. Comment doit-on choisir G ?

30. On insère maintenant un correcteur (figure 11). Calculer la nouvelle erreur en régime permanent.

31. Lorsque la rame de TGV monte une côte, un couple constant de freinage se rajoute au couple de charge précédent, qui devient $\Gamma_r = -C\omega - \Gamma'$. Comment l'équation différentielle (cf. question 24) reliant $\alpha(t)$ et $\omega(t)$ est-elle modifiée de ce fait ? Pour quelle valeur de la constante A' le schéma de la figure 12 rend-il compte de cette nouvelle équation ? [Je l'ai mis plus bas]

32. Représenter les schémas des asservissements représentés sur les figures 10 et 11 lorsque l'on fait intervenir le couple de freinage ;

33. En modélisant ce couple supplémentaire par un échelon, calculer pour les deux asservissements précédents la nouvelle vitesse en régime permanent lorsque la consigne délivre le même échelon que précédemment. Comparer les résultats et conclure sur l'intérêt du correcteur.

.

[1] Cette notion, définie dans en SI, correspond à $\varepsilon = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\alpha_c(t) - \alpha_r(t)\right] = \lim\limits_{p\to 0}\left[p\left(\underline{\alpha}_c(p) - \underline{\alpha}_r(p)\right)\right]$.