

CNC 2017. Corrigé Physique II PSI  
**L'énergie électrique : centrale hydroélectrique**

28 mai 2017

**1 - Questions préliminaires : statique des fluides**

1.1. Un fluide homogène incompressible est un fluide dont la masse volumique a la même valeur en tout point du fluide et cette valeur ne dépend pas de la pression.

1.2. La pression est équivalente à une force surfacique.

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

1.3. La particule fluide de volume  $d\tau$  est soumise à la force de pression.  
Suivant l'axe Oz :

$$df_z = P(x, y, z)dxdy - P(x, y, z + dz)dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz.$$

La résultante des forces de pression est :

$$d\vec{F}_{pres} = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z - \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y\right)dxdydz.$$

Par conséquent la résultante des forces de pression est :

$$d\vec{F}_{pres} - \overrightarrow{grad}(P)d\tau$$

Si on note par  $\vec{f}_v$  la force volumique qui s'exerce sur la particule fluide autre que la force de pression, la condition d'équilibre de cette particule fluide s'écrit :

$$-\overrightarrow{grad}(P) + \vec{f}_v = \vec{0}$$

1.4. Sous l'action du poids, la condition d'équilibre s'écrit :

$$-\overrightarrow{grad}(P) + \mu\vec{g} = \vec{0}$$

En projetant suivant l'axe Oz ascendant on aura, relation (1) :  $dP = -\mu g dz$

Les surfaces isobares correspondent donc à  $z = \text{constante}$

1.5. D'une part le fluide étant homogène et incompressible, d'autre part  $P = P_0$  à  $z = h_f$ ; La solution s'écrit donc :

$$P(z) = P_0 + \mu g(h_f - z)$$

1.6.1. On remplace  $\mu$  par son expression dans la relation (1) On aura :

$$dP = -\mu_0[1 + \alpha(P - P_0)]gdz . \text{ Donc : } \frac{\alpha dP}{1 + \alpha(P - P_0)} = -\alpha\mu_0gdz.$$

On intègre sachant que  $P = P_0$  lorsque  $z = h_f$ . On obtient :

$$P = P_0 + \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\mu_0g(h_f-z)} - 1)$$

1.6.2.  $\alpha\mu_0g \# 10^{-6}m^{-1}$  et  $h_f \# 10^2m$

Pour les faibles profondeurs :  $h_f - z$  restant petit et en utilisant le fait que  $e^\varepsilon = 1 + \varepsilon$  on aura

$$P = P_0 + \mu_0g(h_f - z)$$

On retrouve le cas du liquide homogène et incompressible.

1.6.3. En  $z = 0$

$$P_{\text{exacte}} = P_0 + \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\mu_0gh_f} - 1) = 10,8.10^5 Pa$$

$$P_{\text{app}} = P_0 + \mu_0gh_f = 10,8.10^5 Pa$$

Conclusion : l'hypothèse de l'incompressibilité est largement justifiée.

1.6.4. l'erreur est :  $\frac{P_{\text{exacte}} - P_{\text{approche}}}{P_{\text{exacte}}} = 4,4.10^{-5}$

## 2 - Barrage - Poids

2.1. Soit L la profondeur du barrage.

L'expression de la force de pression est :  $d\vec{F}_x = \mu_0g(h_f - z)Ldz\vec{e}_x$  On intègre on aura :

$$\vec{F}_{\text{press}} = \frac{1}{2}\mu_0gLH_b^2\vec{e}_x.$$

L'expression du poids est :

$$\vec{P} = -\frac{1}{2}\mu_0de_bH_bLg\vec{e}_z$$

2.2. Le barrage est à l'équilibre donc :

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{R} = \vec{0}$$

On projette suivant l'axe Ox on obtient :  $R_x = -\frac{1}{2}\mu_0gLH_b^2$

On calcule  $R_z$  en intégrant  $dR_z = (ax + b)dx$  entre 0 et  $e_b$ .

On projette suivant l'axe Oz on obtient :  $\frac{a}{2}e_b^2 + be_b = \frac{1}{2}\mu_0de_bH_bLg$

Soit :

$$\frac{a}{2}e_b + b = \frac{1}{2}\mu_0dH_bLg$$

2.3. Le moment en O des forces calculées ci dessus :

$$-\vec{M}_{\text{pres}}(O) = \int_0^{H_b} (z\vec{e}_z \wedge (P - P_0)Ldz\vec{e}_x) = \frac{1}{6}\mu_0gLH_b^3\vec{e}_y$$

$$- \vec{M}_{pesa}(O) = \vec{OG} \wedge \left(-\frac{1}{2}\mu_0 d e_b H_b L g \vec{e}_z\right).$$

L'expression du vecteur  $\vec{OG}$  est :  $\vec{OG} = \frac{e_b}{3}\vec{e}_x + \frac{H_b}{3}\vec{e}_z$ . Par conséquent :

$$\vec{M}_{pesa}(O) = \frac{1}{6}\mu_0 L d H_b e_b^2 g \vec{e}_y$$

$$- \vec{M}_{Rz}(O) = \int_0^{e_b} (x \vec{e}_x \wedge (ax + b) dx \vec{e}_z) = -\left(\frac{a}{3}e_b^3 + \frac{b}{2}e_b^2\right)\vec{e}_y$$

2.4. Le barrage est à l'équilibre donc :

$$\vec{M}_{pres}(O) + \vec{M}_{pesa}(O) + \vec{M}_{Rz}(O) = \vec{0}$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{6}\mu_0 g L H_b^3 + \frac{1}{6}\mu_0 d L H_b e_b^2 g = \frac{a}{3}e_b^3 + \frac{b}{2}e_b^2$$

2.5. On a alors le système :

$$\begin{aligned} (1) : \frac{a}{2}e_b + b &= \frac{1}{2}\mu_0 g L d H_b \\ (2) : \frac{2a}{3}e_b + b &= \frac{1}{3}\mu_0 g L \frac{H_b^3}{e_b^2} + \frac{1}{3}\mu_0 d L H_b g \end{aligned}$$

On résout le système et on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} (3) : a &= \mu_0 g L \frac{H_b}{e_b} \left(2 \frac{H_b^2}{e_b^2} - d\right) \\ b &= \mu_0 g L H_b \left(d - \frac{H_b^2}{e_b^2}\right) \end{aligned}$$

2.6. Pour que le barrage ne se soulève pas, il faut que le point d'application de  $R_z$  soit placé plus proche de O. Donc  $a > 0$ . Par conséquent :

$$d < 2 \frac{H_b^2}{e_b^2}$$

### 3 - Ecoulement dans une conduite

3.1.

- Le terme  $\frac{\mu_0 v^2}{2}$  représente l'énergie cinétique volumique.
- Le terme  $\mu_0 g z$  représente l'énergie potentielle volumique de pesanteur.
- Le terme P représente l'énergie potentielle volumique liée à la force de pression.

Les conditions de validité de cette relation de Bernoulli :

Ecoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible d'un fluide homogène.

3.2. En un point M situé au fond du lac, sa pression est :  $P(M) = P_0 + \mu_0 g (H - h)$

Application numérique :  $P(M) = 4,9 \cdot 10^5 Pa$

3.3.1. On utilise la relation de Bernoulli entre un point de la surface libre du barrage et un point de la sortie :

$$P_0 + \mu_0 g H = P_0 + \frac{\mu_0 v_s^2}{2}. \text{ On trouve : } v_s = \sqrt{2gH}$$

Application numérique :  $v_s = 44,3 m/s$

3.3.2 L'expression du débit massique est :  $D_m = \mu_0 S' v_s$ . Application numérique :  $D_m = 88,5 \cdot 10^3 Kg/s$

3.3.3. l'écoulement étant stationnaire, l'équation de continuité s'écrit donc :  $div \vec{v} = 0$ .

On a donc conservation du débit volumique :  $v_s' S = v_s S'$ .

D'où l'expression de la vitesse :  $v_{s'} = \frac{S'}{S} v_s$ .

Application numérique :  $v_{s'} = 29,5 \text{ m/s}$

En tout point de la conduite, la section est la même donc la vitesse aussi.

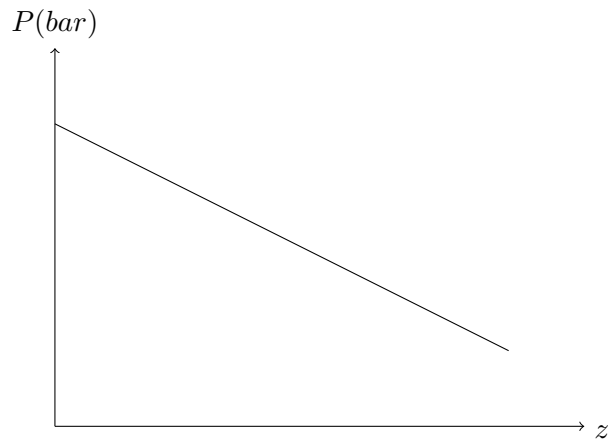
3.3.4. On utilise la relation de Bernoulli :  $P + \mu_0 \frac{v^2}{2} + \mu_0 g z' = \text{constante}$  entre le point N et un point de la sortie, on peut écrire :

$$P(N) + \mu_0 \frac{v_{s'}^2}{2} + \mu_0 g z' = P_0 + \mu_0 \frac{v_s^2}{2}$$

On en déduit la pression en N :

$$P(N) = +\mu_0 \frac{v_s^2 - v_{s'}^2}{2} - \mu_0 g z' + P_0 = P_0 + \mu_0 g H \left(1 - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right) - \mu_0 g z'$$

On trace  $P(N)$  en fonction de  $z'$  : Avec les valeurs numériques fournies l'équation de la droite est :  $P(\text{bar}) = 6,44 - 0,098 z'$



3.3.5. L'altitude  $h'$  à laquelle la pression s'annulerait est :

$$P(N) = P_0 + \mu_0 g H \left(1 - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right) - \mu_0 g z' = 0$$

$$\Rightarrow z' = \frac{P_0}{\mu_0 g} + H \left(1 - \left(\frac{S'}{S}\right)^2\right)$$

Application numérique :  $h' = 65,8 \text{ m}$

3.3.6. dans notre cas  $h' > h$  ; la pression ne s'annulera pas dans la conduite.

3.4.1. Si la conduite n'est pas terminée par l'injecteur, la vitesse à la sortie sera égale à  $v_s = \sqrt{2gH}$ .

3.4.2. En appliquant la relation de Bernoulli entre le point N et un point de la sortie, les deux points ayant la même vitesse, on aura :

$$P(N) + \mu_0 g z' = P_0$$

La pression s'annulerait au point d'altitude  $h''$  telle que :  $h'' = \frac{P_0}{\mu_0 g}$ .

Application numérique :  $h'' = 10,2 \text{ m}$ .

3.4.3. L'injecteur est donc essentiel pour que la pression ne s'annule pas dans la conduite.

Remarque : dans le sujet on parle de point de pression nulle, mais dans la pratique il s'agit de la pression de saturation à la température de l'écoulement.

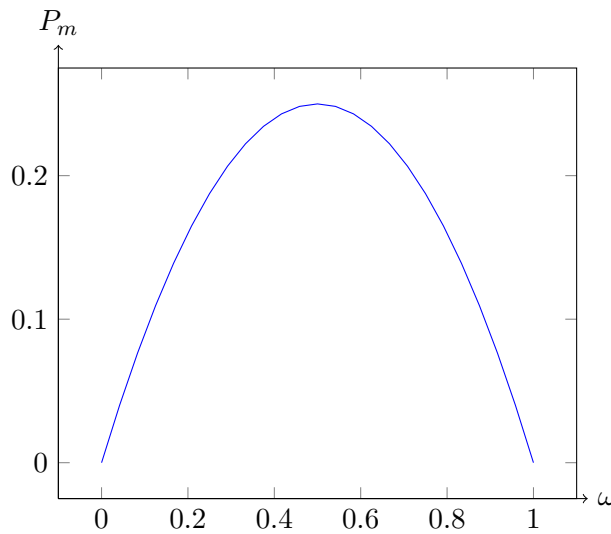
## 4 - La turbine Pelton

4.1. Sachant que :

- La dimension de K est  $[K] = 1$
- La dimension de  $\mu$  est  $[\mu] = M.L^{-3}$
- La dimension de S est  $[S] = L^2$
- La dimension de V est  $[V] = L.T^{-1}$
- La dimension de R est  $[R] = L$
- La dimension de  $\omega$  est  $[\omega] = T^{-1}$

On en déduit que  $P_m$  est homogène à  $M.L^2.T^{-3}$  qui est la dimension de la puissance, on peut rappeler que  $P = F.v$ .

4.2. L'allure de la courbe représentant  $P_m$  en fonction de  $\omega$  est :



Le domaine possible de  $\omega$  est :  $[0, \frac{V_j}{R}]$

4.3. La valeur de  $\omega$  qui optimise cette puissance correspond à  $\frac{dP_m}{d\omega} = 0$

Par conséquent  $\omega_{max} = \frac{V_j}{2R}$

## 5 - Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : principe d'un alternateur

5.1. Le flux magnétique est :  $\Phi = N \cdot \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = NB_0S \cos(\Omega t)$

5.2. D'après la loi de Faraday, la force électromotrice e induite est :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = NB_0S\Omega \sin(\Omega t)$

Sa valeur maximale est :  $e_m = \frac{NB_0S\Omega}{R}$

5.3. Le courant induit dans la bobine est :  $i = \frac{e}{R} = \frac{NB_0S\Omega}{R} \sin(\Omega t)$ .

Sa valeur maximale est :  $I_M = \frac{NB_0S\Omega}{R}$

5.4. L'expression du couple électromagnétique  $\vec{\Gamma}_L$  des forces de Laplace est :  $\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$ .  $\vec{m}$  étant le moment magnétique de la bobine.  $\vec{m} = Ni\vec{S}$

On remplace et on obtient :

$$\vec{\Gamma}_L = NiS\vec{n} \wedge B_0\vec{e}_x = -\frac{N^2B_0^2S'^2\Omega}{R} \sin^2(\Omega t)\vec{e}_z$$

Sa valeur moyenne est donc :

$$\langle \vec{\Gamma}_L \rangle = -\frac{N^2 B_0^2 S'^2 \Omega}{2R} \vec{e}_z$$

5.5. La puissance  $P_j$  dissipée par effet Joule dans la bobine est  $P_j = Ri^2 = \frac{N^2 B_0^2 S'^2 \Omega^2}{R} \sin^2(\Omega t)$

Sa valeur moyenne est :  $\langle P_j \rangle = \frac{N^2 B_0^2 S'^2 \Omega^2}{2R}$

5.6. Pour maintenir la rotation de la bobine à  $\vec{\Omega}$  constante, il faut exercer un couple opposé à celui de la force de Laplace :

$$\vec{\Gamma} = \frac{N^2 B_0^2 S'^2 \Omega}{R} \sin^2(\Omega t) \vec{e}_z$$

Dont la valeur moyenne est :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{N^2 B_0^2 S'^2 \Omega}{2R} \vec{e}_z$$

## 6 - Ligne haute tension et pertes en ligne

6.1. L'expression de la résistance  $R$  d'un fil de longueur  $l$ , de section  $s$  et de résistivité  $\rho$  est donnée par :

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

6.2. La puissance utile  $P_u$  acheminée par la ligne est :  $P_u = UI \cos(\varphi) = UI$ .

6.3. La puissance  $P_j$  dissipée par effet Joule dans les cables est :  $P_j = 2RI^2$ .

6.4. L'expression de la résistance  $R$  des cables est :  $R = \frac{P_j}{2I^2} = \frac{P_j}{2P_u^2} U^2$ .

6.5. En utilisant la relation :  $R = \frac{P_j}{2I^2} = \frac{P_j}{2P_u^2} U^2$ , et  $s = \rho \frac{l}{R}$  et sachant que  $P_u = 10^7 W$  et  $P_j = 10^6 W$  on trouve :

- Si  $U = 220V$  alors  $R_1 = \frac{10^6 220^2}{2 \cdot 10^{14}} = 0,24 m\Omega$
- Si  $U = 220V$  alors  $s_1 = 1,6 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{0,24 \cdot 10^{-3}} = 3,3 m^2$
- Si  $U = 200kV$  alors  $R_2 = \frac{10^6 \cdot (210^5)^2}{2 \cdot 10^{14}} = 200 \Omega$
- Si  $U = 200kV$  alors  $s_2 = 1,6 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{200} = 4 mm^2$

On conclut donc que l'utilisation de la basse tension pour transporter l'énergie électrique nécessite des cables de grandes surfaces. alors que l'utilisation de la haute tension et pour la même perte d'énergie nécessite des cables de petites sections. 6.6.1. Le transformateur réalise une conversion électromagnétique statique.

6.6.2. Un transformateur est composé d'un circuit primaire et d'un circuit secondaire. Ces deux circuits sont enroulés autour d'un matériau ferromagnétique. le transformateur réalise un couplage par induction électromagnétique entre le circuit primaire et le circuit secondaire.

## 7 - Transport de l'énergie électrique en courant continu

7.1.1. L'expression de la résistance est  $R_a = \rho \frac{d}{S_a}$

Application numérique :  $R_a = 1,6 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{5 \cdot 10^4}{900 \cdot 10^{-6}} = 0,89 \Omega$

7.1.2. La puissance  $P_{ja}$  dissipée par l'âme du câble est :  $P_{ja} = R_a I^2 = 761kW$

7.2.1. On donne l'expression de l'épaisseur de peau :  $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$

- Si  $f = 50Hz$  alors  $\delta_1 = \sqrt{\frac{2.1,6.10^{-8}}{4.\pi.10^{-7}.2.\pi}.50} = 9mm$

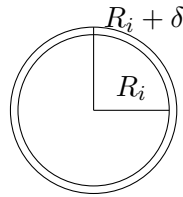
- Si  $f = 100MHz$  alors  $\delta_2 = \sqrt{\frac{2.1,6.10^{-8}}{4.\pi.10^{-7}.2.\pi}.10^8} = 6,4\mu m$

Comparons l'épaisseur de peau au rayon du câble. On a  $S_a = \pi.R_i^2 \implies R_i = \sqrt{\frac{S_a}{\pi}}$

Application numérique  $R_i = 16,9mm$

L'épaisseur de peau étant différente de ce rayon, la résistance du conducteur va donc être modifiée.

7.2.2. D'après les valeurs trouvées de  $\delta$  l'épaisseur de peau est négligeable devant  $R_i$  à la fréquence  $f_2$  uniquement.



. En première approximation, la section utile du conducteur est :  $S_{au} = 2.\pi.R_i\delta$

7.2.3. La résistance effective de la ligne électrique à la fréquence  $50Hz$  est :  $R_e = \rho \frac{d}{S_{au}}$

Sa valeur numérique est :  $R_e = 1,6.10^{-8} \cdot \frac{5.10^4}{2.\pi.9.10^{-3}.16,9.10^{-3}} = 0,84\Omega$ .

Les pertes par effet Joule dans les lignes sont :  $P_{ja} = R_e I^2$ . AN :  $P_{ja} = 0,84.925^2 = 716kW$

7.3. L'inductance  $L$  du câble est :  $L = d.\Lambda = 20mH$

La réactance  $X_L$  du câble est :  $X_L = L.\omega = L.2.\pi.f = 6,3\Omega$ .

En continu cette réactance est nulle.

7.4. La capacité  $C$  du câble est :  $C = \Gamma.d = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r d}{Ln(\frac{R_e}{R_i})} = 16,2\mu F$

7.5.1. L'intensité du courant appelé par la câble à vide est :  $I' = C.\omega.U_{eff}$

Sa valeur numérique est :  $I' = 16,2.10^{-6}.2.\pi.50.190.10^3 = 969A$  Ce courant n'est pas utile car il ne traverse pas la charge.

7.5.2. Le modèle de ce câble en continu est obtenu en supprimant le condensateur et en remplaçant la bobine par un fil. Dans ce cas le courant  $I'$  est nul.

7.5.3. La puissance qu'il peut transporter dans ce cas est :  $P = UI = 250kW$

7.5.4. La puissance  $P_{ja}$  dissipée par l'âme du câble est :  $P_{ja} = R_a I^2 = 761kW$  Le rapport est donc :  $r = \frac{P_{ja}}{P} = 3.10^{-3}$ .