

Quelques aspects sur l'utilisation des véhicules automobiles

**1. Étude thermodynamique d'un moteur de voiture**

**1.1. Représentation du cycle**

1.1.1. Allure du cycle thermodynamique.

- Le cycle est parcouru dans le sens horaire. C'est donc un cycle moteur.

En effet, le travail reçu par le fluide au cours d'un cycle est  $W = - \oint_{\text{cycle}} pdV = \int_{(B)}^{(A)} pdV - \int_{(C)}^{(D)} pdV < 0$ .

- L'aire du cycle est le travail délivré au milieu extérieur au cours d'un cycle.

1.1.2. Diagramme  $T(S)$ .

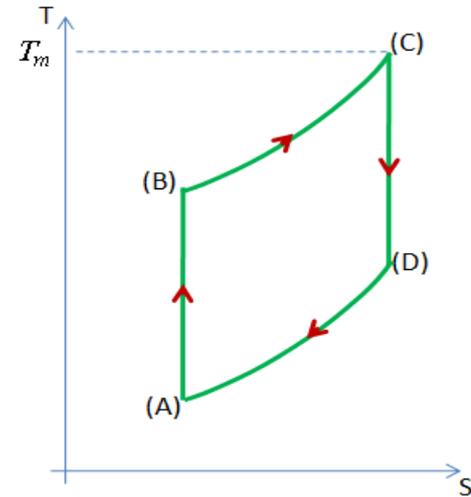
- Les transformations AB et CD sont adiabatiques réversibles, donc isentropiques :  $S = cst$  au cours de ces transformations.

Donc :  $T(S) = cste$ .

- à volume constant,  $dS = nC_V \frac{dT}{T} \Rightarrow S(T) = nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S_0$ .

$$\Rightarrow T(S) = T_0 \exp\left(\frac{S - S_0}{nC_V}\right) : \text{Au cours des transformations}$$

isochores BC et DA, les courbes  $T(S)$  sont des branches d'exponentielle.



**1.2. Expression du rendement**

1.2.1.  $Q_C > 0$  et  $Q_F < 0$ .  $r = -\frac{W}{Q_C}$ . Or d'après le 1<sup>ier</sup> principe,

$$W + Q_C + Q_F = 0 \text{ . d'où : } r = -\frac{W}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}.$$

$$1.2.2. \begin{cases} Q_{AB} = 0 \\ W_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A) \end{cases}; \begin{cases} W_{BC} = 0 \\ Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) \end{cases}; \begin{cases} Q_{CD} = 0 \\ W_{CD} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C) \end{cases};$$

$$\begin{cases} W_{DA} = 0 \\ Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D) \end{cases}.$$

1.2.3. On a :  $r = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_{AD}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$ . or :  $\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B} = x^{1-\gamma}$ , donc :

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = x^{1-\gamma} \text{ . D'où : } r = 1 - x^{1-\gamma} \text{ . } r'(x) = (\gamma - 1)x^{\gamma-2} > 0 \text{ : le rendement}$$

augmente avec  $x$ .

**1.3. Calcul du rendement**

1.3.1.  $V_B = 45\text{cm}^3$  et  $V_A = V_B + lS = 420\text{cm}^3 \Rightarrow r \approx 59\%$ .

1.3.2. La durée d'un tour est  $60 \times 1/N$  (s), d'où :  $\tau_c = 60 \times 2 / N \approx 43\text{ms}$ .

1.3.3. La consommation en carburant par unité de temps est de  $D_m = \frac{dm}{dt} \approx 9.10^{-4} \text{ kg.s}^{-1}$ . La

puissance thermique délivrée par la combustion dans chacun des quatre cylindres est donc :

$$\dot{Q}_C = \frac{dQ_C}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{4} q D_m = \frac{1}{4} q \rho v_c v . \text{ Ainsi, au cours d'un cycle, } Q_C = \frac{1}{4} q \rho v_c v \tau_c : \text{ AN :}$$

$$\underline{Q_C = 465 \text{ J} .}$$

Remarque (complément) :

On peut vérifier qu'effectivement la quantité de matière de carburant (octane par exemple)

est négligeable devant celle de l'air ( $\frac{n_{air}}{n_{carb}} \approx 170$ ).

1.3.4. On a :  $\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = x^{1-\gamma}$  et  $Q_C = \frac{1}{4} q \rho v_c v \tau_c = \frac{nR}{(\gamma-1)} (T_C - T_B) = \frac{P_A V_A}{(\gamma-1) T_A} (T_C - T_B) \Rightarrow$

$$T_m = T_C = T_A \left( x^{\gamma-1} + \frac{Q_C \cdot (\gamma-1)}{P_A \cdot V_A} \right) \text{ et } T_D - T_A = x^{1-\gamma} (T_C - T_B) = x^{1-\gamma} T_A \frac{(\gamma-1) q \rho v_c v \tau_c}{4 P_A V_A} \Rightarrow$$

$$T_D = T_A \left[ 1 + x^{1-\gamma} \frac{(\gamma-1) q \rho v_c v \tau_c}{4 P_A V_A} \right] \text{ et } \underline{T_m = T_A \left[ x^{\gamma-1} + \frac{(\gamma-1) q \rho v_c v \tau_c}{4 P_A V_A} \right]} .$$

AN :  $T_m \approx 2400 \text{ K} = 2127^\circ \text{C}$  : valeur trop élevée, il faudrait considérer la dépendance de  $C_v$  en fonction de la température.

1.3.5. Le cycle de Carnot est constitué de deux isothermes  $T_m$  et  $T_A$  et deux isentropiques. D'après

le 2<sup>ième</sup> principe  $\frac{Q_C}{T_m} + \frac{Q_F}{T_A} = 0 \Rightarrow r_c = 1 - \frac{T_A}{T_m}$ . AN :  $r_c \approx 85\%$ .  $r < r_c$  conformément au

théorème de Carnot.

1.3.6. La puissance mécanique délivrée par le moteur à quatre cylindres est  $p_{méca} = 4r \frac{Q_C}{\tau}$ . AN :

$$\underline{p_{méca} \approx 25 \text{ kW} .}$$

## 2. Étude du mouvement d'une voiture

### 2.1. Préliminaire

2.1.1. Notons :  $x_i$  l'abscisse de  $G_i$  :  $\overrightarrow{OG_i} = x_i \vec{u}_x + r \vec{u}_y + z_i \vec{u}_z$ .  $\vec{v}_i = \dot{x}_i \vec{u}_x = v_i \vec{u}_x$ .

2.1.2.  $\vec{v}_g = \vec{v}(I_i \in S_i / S') = \vec{v}_i + \overrightarrow{I_i G_i} \times \vec{\omega} = \dot{x} \vec{u}_x + r \vec{u}_y \times \dot{\theta} \vec{u}_z = (\dot{x} + r \dot{\theta}) \vec{u}_x = (v_i + r \omega) \vec{u}_x$ .

2.1.3. La condition de non glissement des roues sur le sol est :  $\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow v_i + r \omega = 0$ .

2.1.4.  $S_0 = \{\text{carrosserie} + \text{passagers}\}$  de masse  $m_0 = M$ , de centre d'inertie  $G_0$ . D'après le théorème de

$$\text{Koenig : } E_C(\Sigma / \mathcal{R}) = \sum_{i=0}^4 E_C(S_i) = \frac{1}{2} M v_i^2 + 4 \times \left( \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} M' v_i^2 + 2 J \omega^2 .$$

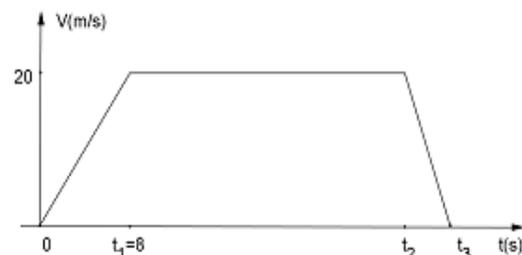
$$\text{Soit : } \underline{E_C(\Sigma / \mathcal{R}) = \left( \frac{1}{2} M' + m \right) v_i^2 . .}$$

2.2. .

2.2.1. .

- Pour ,  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $v(t) = 2,5t$  ( $m.s^{-1}$ ) et  $a(t) = 2,5 m s^{-2}$ .

- Pour ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $v(t) = 20 m.s^{-1}$  et  $a(t) = 0 m s^{-2}$ .



- Pour ,  $t_2 \leq t \leq t_3$ ,  $v(t) = 20 \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}$  ( $m.s^{-1}$ ) et  $a(t) = -\frac{20}{t_3 - t_2} ms^{-2}$ .

2.2.2. La puissance délivrée par le moteur en phase d'accélération est :

$$p_m = p_{m1} + p_{m3} = 2\vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = 2\Gamma \frac{v}{r}$$

2.2.3. Le TPC appliqué à  $\{\Sigma \cup sol\} \Rightarrow \frac{dE_c(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = P_{int} + P_{ext} = 2 \left( \frac{1}{2} M' + m \right) av$ .

Or :  $P_{ext} = M' \vec{g} \cdot \vec{v} = 0$  et  $P_{int} = P_{contact} + p_m = 0 + 2\Gamma \frac{v}{r}$  (roulement sans glissement et contact suivant une ligne). D'où :  $\Gamma = \left( \frac{1}{2} M' + m \right) ar$ .

**Remarque** (complément) : les ordres de grandeur sont pour le couple : 538 N.m, et pour la puissance : 90 kW.

2.2.4. Dans cette phase de glissement, (1) et (2)

$$\Rightarrow M' a = 2(T_1 + T_2) = -2fM'g \Rightarrow d(v^2) = 2vad t = 2adx \Rightarrow v^2(t_2) = 2fgd_f \text{ . Soit :}$$

$$d_f = \frac{v^2(t_2)}{2fg} \text{ . AN : } \underline{d_f = 34m}$$

2.2.5. Les facteurs susceptibles de diminuer la valeur de  $f$  :

- Surface de contact lisse (vieillesse des pneus),
- Présence sur la route de verglas, de pluie, d'huile
- ...

### 3. Quelques situations à risques

#### 3.1. Mouvement dans un virage

3.1.1.  $f \neq f'$  : la forme du maillage (dessins) des pneus vis-à-vis des deux mouvements de glissement n'est pas la même.

Remarque (complément) : autre différence selon la surface de contact, on pourrait aussi envisager la possibilité de culbutement (renversement du véhicule) .



3.1.2. En mouvement circulaire uniforme :  $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$ .

3.1.3. La voiture ne glisse pas tant que:  $|T| = M' \frac{v^2}{R} < f' N' = f' M' g$  . Soit :  $v < v_{lim} = \sqrt{f' g R}$  .

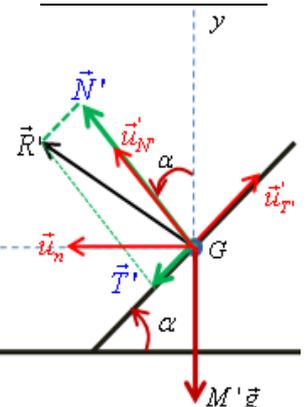
$$\text{AN : } \underline{v_{lim} = 12,5m.s^{-1}} \text{ ou } \underline{v_{lim} = 45km.h^{-1}}$$

3.1.4. Route de virage inclinée

3.1.4.1. D'après le TRC :  $M' \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \vec{R}' + M' \vec{g}$  .

$$\Rightarrow M' \frac{v^2}{R} (\sin \alpha \vec{u}'_N - \cos \alpha \vec{u}'_T) = \vec{R}' - M' g (\cos \alpha \vec{u}'_N + \sin \alpha \vec{u}'_T)$$

$$\text{D'où : } \underline{N' = M' \left( \frac{v^2}{R} \sin \alpha + g \cos \alpha \right)}$$



$$\text{et } \underline{T' = -M' \left( \frac{v^2}{R} \cos \alpha - g \sin \alpha \right)}.$$

3.1.4.2. La réaction est normale à la route si :  $T' = 0 \Rightarrow \frac{v_{cr}^2}{R} \cos \alpha = g \sin \alpha \Rightarrow$

$$\underline{v_{cr} = \sqrt{Rg \tan \alpha}}.$$

3.1.4.3. Pour  $v < v_{cr}$ ,  $|T'| = M' \left( g \sin \alpha - \frac{v^2}{R} \cos \alpha \right)$ . Il n'y aura pas de dérapage tant que :

$$|T'| < f' N'. \text{ Soit : } g \sin \alpha - \frac{v^2}{R} \cos \alpha < f' \left( \frac{v^2}{R} \sin \alpha + g \cos \alpha \right) \text{ ou}$$

$$g(\sin \alpha - f' \cos \alpha) < \frac{v^2}{R}(f' \sin \alpha + \cos \alpha). \text{ Ou encore : } v > v_{\min} = \underline{\sqrt{\frac{Rg(\tan \alpha - f')}{(f' \tan \alpha + 1)}}} :$$

Avec  $f' > \tan \alpha$ . Dans un virage incliné, la voiture risque de dérapier (vers l'intérieur) si la vitesse est assez faible sous l'effet de son poids.

3.1.4.4. Pour  $v > v_{cr}$ ,  $|T'| = M' \left( \frac{v^2}{R} \cos \alpha - g \sin \alpha \right)$ . Il n'y aura pas de dérapage tant que :

$$\frac{v^2}{R} \cos \alpha - g \sin \alpha < f' \left( \frac{v^2}{R} \sin \alpha + g \cos \alpha \right) \text{ ou :}$$

$$\frac{v^2}{R}(\cos \alpha - f' \sin \alpha) < g(\sin \alpha + f' \cos \alpha). \text{ Ou encore : } v < v_{\max} = \underline{\sqrt{\frac{Rg(\tan \alpha + f')}{(1 - f' \tan \alpha)}}} :$$

$f' < \frac{1}{\tan \alpha}$  contrairement au virage plan, on peut aborder un virage incliné avec une

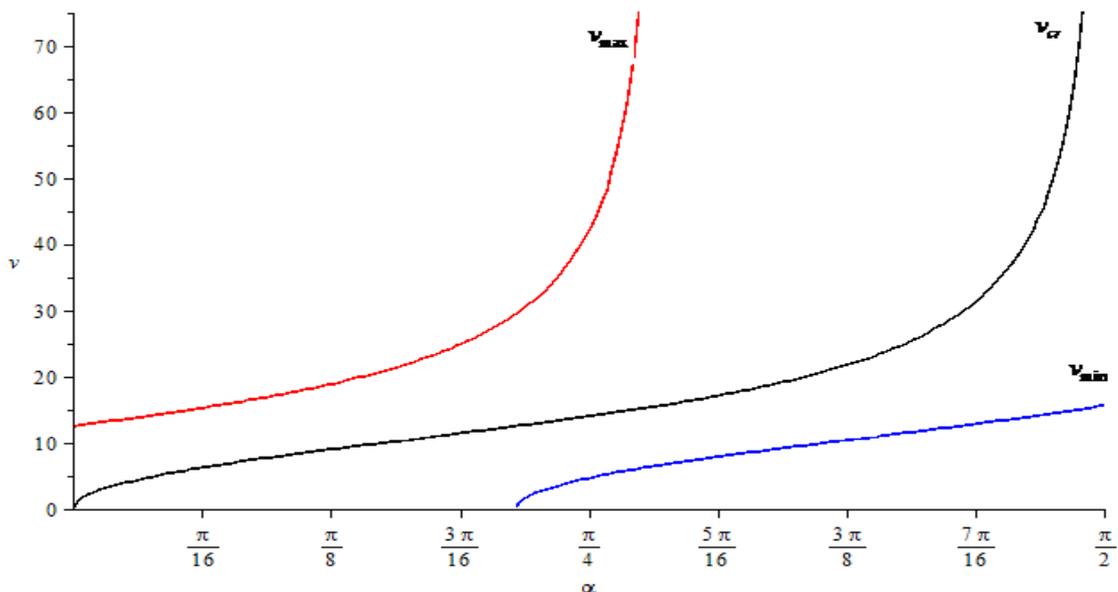
vitesse beaucoup supérieure à  $v_{lim}$  sans risque de dérapage.

**Remarque** (compléments non demandés) : On s'intéresse à une plage des vitesses :

$0 = v_{\min,0} < v < v_{\max,0} \Rightarrow \alpha_0 = \text{arc tan}(f') \approx 38^\circ$ . Une route construite avec cet angle permettrait une

vitesse maximale d'abordage :  $v_{\max,0} = \underline{\sqrt{gR \cdot \tan(2\alpha_0)}}$ ; AN :  $v_{\max,0} \approx 106 \text{ km.h}^{-1}$ .

Le graphe ci-dessous donne les intervalles des vitesses de non dérapage en fonction de l'angle d'inclinaison de la route sur l'horizontale.



### 3.2. Etude d'un accident entre deux véhicules

#### 3.2.1. Cas $t_r=0$

3.2.1.1. D'après le TRC,  $M_i \vec{a}_i = \vec{T}_i + \vec{N}_i + M_i \vec{g}$ . En projection,  $\vec{N}_i = -M_i \vec{g}$  et

$$M_i \vec{a}_i = \vec{T}_i = -f N_i \vec{u}_x.$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = -fg \vec{u}_x.}$$

3.2.1.2.  $d_1 - d_2 = \frac{v_0^2}{2fg} - \frac{k^2 v_0^2}{2fg} = \frac{v_0^2}{2fg} (1 - k^2) = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{fg}$ . à l'arrêt,

$$x_2 - x_1 = D + d_2 - d_1 = D - \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{fg}.$$

AN :  $x_2 - x_1 = 5,5m$ . Pas d'accident.

3.2.1.3.  $x_1' = v_0 t_{rm} + d_1 = x_2 = D + d_2 \Rightarrow v_0 t_{rm} = D + d_2 - d_1 \Rightarrow t_{rm} = \frac{1}{v_0} \left( D - \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{fg} \right)$ .

AN :  $t_{rm} = 0,22s$ .

Précautions : laisser une distance "suffisante" entre les véhicules qui se suivent, diminuer la vitesse, être attentif et vigilant (sommolence, effets de médicaments et autres...), freinage assisté, pneus en bon état.

#### 3.2.2. Cas $t_r=2t_{rm}$

3.2.2.1. On suppose le camion immobile au moment du choc. Ainsi

$$x_1'' = 2v_0 t_{rm} + \frac{v_0^2 - v_a^2}{2fg} = 2v_0 t_{rm} + d_1 - \frac{v_a^2}{2fg} = x_2 = D + d_2 \Rightarrow \frac{v_a^2}{2fg} = 2v_0 t_{rm} + d_1 - d_2 - D = D - d_1 + d_2$$

$$\Rightarrow \underline{v_a = \sqrt{v_0^2 - 2fg(2d_1 - D - d_2)} = \sqrt{2fg(D + d_2 - d_1)}}.$$

Remarque (non demandée) : on peut s'assurer que le camion était déjà immobile, son temps d'arrêt est  $t_{a2} \sim 2,83s$ , alors que le choc survient après  $3,32s$ .

3.2.2.2. La conservation de la quantité de mouvement du système (pseudo) isolé donne :

$$(M' + M_c) v_a' = M' v_a \Rightarrow \underline{v_a' = \frac{M'}{M' + M_c} v_a = \frac{v_a}{10}}.$$

3.2.2.3. D'après le TRC :  $a = -fg = \frac{dv}{dt} = \frac{0 - v_a'}{T} \Rightarrow T = \frac{v_a}{10fg}$ . AN :  $T \approx 0,136s$ .

#### 3.2.3. Effet d'un accident sur les usagers de véhicules

Juste après le choc et d'après le principe d'inertie, les passagers (le conducteur et les autres) poursuivent leur mouvement à la vitesse  $v_a$  ( $t = 0$ ), supposée celle qu'ils avaient respectivement avant l'impact avec la ceinture, le pare-brise ou le siège du conducteur.

3.2.3.1. D'après le principe d'inertie, le conducteur "poursuit son mouvement à la vitesse  $v_a$ , mais grâce à la ceinture cette vitesse s'annule au bout d'une durée  $T$  :

$$\underline{F_1 = \frac{m_c |\Delta v|}{T} = \frac{m_c v_a}{T}}.$$

3.2.3.2. AN :  $F_1 \approx 411 daN$ .

$F_1 > 400 daN$  : en utilisant sa ceinture, le risque que court un conducteur jeune n'est pas critique, mais il l'est légèrement s'il est âgé.

3.2.3.3. On suppose le pare-brise immobile au moment de l'impact.  $p = \frac{m_t |\Delta v|}{\tau S} \approx \frac{m_t v_a}{\tau S}$ .

$$AN : p \approx 79.10^5 Pa.$$

$$3.2.3.4. \quad F_3 = \frac{m_c |\Delta v|}{2 \tau} = \frac{9m_c v_a}{20\tau}. \quad AN : F_3 \approx 4000 daN : \text{ tous les passagers doivent mettre les}$$

ceintures de sécurité. Le conducteur est "écrasé" par l'avant et par l'arrière, d'où la possibilité d'un effet critique sur le thorax.

### 3.3. Capteur de décélération

3.3.1. Dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  lié au véhicule en décélération, les forces qui s'exercent sur (S) sont :

- le poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -mg \vec{u}_y$ ,
- la tension du ressort  $\vec{T} = -k \cdot (l(t) - l_0) \vec{u}_{x'}$ ,
- la force de frottements visqueux  $\vec{F}_f = -h \cdot \dot{x}' \vec{u}_{x'}$ ,
- la réaction  $\vec{R}$  et la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}$ . Celle de Coriolis est nulle car  $\mathcal{R}'$  en translation dans  $\mathcal{R}$

$$\text{Le TRC appliqué à (S) dans } \mathcal{R}' \text{ s'écrit: } \left. \frac{d\vec{P}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = m\vec{a}' = \vec{P} + \vec{R}' + \vec{T} + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}. \quad \vec{F}_{ic} = \vec{0}.$$

3.3.2. Le TRC projeté sur l'axe OX' permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -k(x' - l_0) - h \frac{dx'}{dt} - ma, \text{ qui peut s'écrire sous la forme: } \ddot{x}' + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}' + \omega_0^2 x' = \omega_0^2 x'_e,$$

$$\text{où : } \omega_0^2 = \frac{k}{m}; Q = \frac{\sqrt{mk}}{h} \text{ et } x'_e = -l_0 - \frac{a}{\omega_0^2} : \text{ position d'équilibre.}$$

3.3.3. La solution générale de cette équation différentielle comprend trois cas selon le signe de

$$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) : \text{ Régime pseudopériodique: } Q > \frac{1}{2}; \text{ critique : } Q = \frac{1}{2}; \text{ ou apériodique : } Q < \frac{1}{2}.$$

- Pour,  $Q > \frac{1}{2}$  :  $x'_1(t) = x'_e + \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ ,  $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta|}$ .
- Pour :  $Q = \frac{1}{2}$  :  $x'_2(t) = x'_e + (Ct + D) e^{-\omega_0 t}$ . A, B, C et D sont des constantes.

D'après les conditions initiales :  $x'(t=0) = -l_0 = x'_e + A = x'_e + D \Rightarrow A = D = a/\omega_0^2$  et

$$\dot{x}'(t=0) = 0 = -\frac{\omega_0}{2Q} A + \omega B = C - \omega_0 D. \text{ On obtient alors les solutions :}$$

$$Q > \frac{1}{2} : x'_1(t) = x'_e + \frac{a}{\omega_0^2} \cdot \left[ \cos \omega t + \frac{\omega_0}{2\omega Q} \sin \omega t \right] \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right), \omega = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$Q = \frac{1}{2} : x'_2(t) = x'_e + \frac{a}{\omega_0^2} \cdot (\omega_0 t + 1) e^{-\omega_0 t}.$$

### 3.3.4.

3.3.4.1. La solution  $x'_1(t)$  correspond aux faibles frottements, donc d'une vitesse plus grande.

$$3.3.4.2. \text{ La vitesse (relative) est : } \dot{x}'_1(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \cdot \left( \omega - \frac{\omega_0^2}{4Q^2 \omega} \right) \sin \omega t \cdot \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right).$$

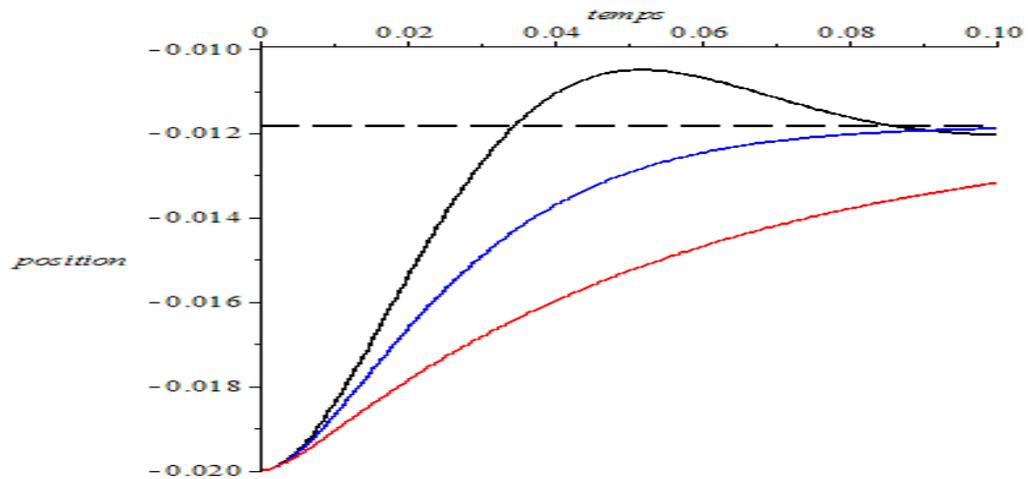
3.3.4.3. Elle s'annule pour  $t=t_a$ .  $\dot{x}'_1(t=t_a) = 0 \Rightarrow t_a = \frac{\pi Q}{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}$ . Si  $Q = 1$ , on a :  $t_a = \pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$ .

$$AN : t_a \# 26ms.$$

$$3.3.4.4. \quad x'_{1a}(t) = -l_0 - \frac{a}{\omega_0^2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{4Q^2 - 1}}\right) \right].$$

Remarque (complément non demandé) :

Dans le graphe ci-dessous, on représente l'allure des trois cas envisagés en 3.3.3.



3.3.4.5. Pour que le contact s'établisse, on doit avoir :  $x'_{1a} \geq -l_a$ .

3.3.4.6. La décélération maximale en valeur absolue détectable est donnée par la relation :

$$a = \frac{(l_0 - l_a)\omega_0^2}{\left(1 + \exp\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{4Q^2 - 1}}\right)\right)}$$

3.3.4.7. Avec les données numériques, l'airbag s'ouvre pour  $\tau_a \leq t_a = 26ms$ .

3.3.5. L'airbag est déclenché et s'ouvre.

3.3.5.1. Détermination de la surpression, à T constante :  $PV_v = (P + p)(V_v - \pi r_a^2 h_a) \Rightarrow$

$$p = \frac{\pi r_a^2 h_a}{(V_v - \pi r_a^2 h_a)} P. \text{ AN : } \underline{p = 1600Pa}.$$

3.3.5.2.  $p > 20Pa$  : le son suivant l'ouverture de l'air bag est douloureux pour les oreilles.

Mais les hypothèses considérées sont discutables :

- (1) L'étanchéité de l'habitacle car possibilité de bris de vitres, trous dans l'habitacle...
- (2) La constance de la température constante.

#### 4. Etude d'un 'radar' de recul

4.1. Le domaine des fréquences audibles  $20Hz \leq f \leq 20kHz$ , ce sont des ondes longitudinales et ne peuvent se propager dans le vide.

4.2. Etude théorique.

On utilisera l'approximation acoustique qui se limite à l'ordre 1 pour les relations entre les grandeurs ondulatoires  $p(x,t)$ ,  $v(x,t)$  et  $\rho(x,t)$ .

4.2.1. On applique le TRC à la tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , de masse  $dm = \rho S dx$  ; En

projection selon X'OX (horizontal), on obtient :  $dm \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = P(x,t)S - P(x+dx,t)S = -\frac{\partial P}{\partial x} S dx$ ,

et à l'ordre 1 :  $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} : (1)$

4.2.2. Entre les instant  $t$  et  $t+dt$  la masse de ce système (tranche) varie et le bilan de la conservation de la masse est traduit par la relation locale :

$$dm(t+dt) - dm(t) = [\rho(t+dt) - \rho(t)]Sdx = \vec{j}(x,t) \cdot S\vec{u}_x - \vec{j}(x+dx,t) \cdot S\vec{u}_x ; \text{ avec } \vec{j}(x,t) \text{ le vecteur densité de courant de masse } \vec{j}(x,t) = \rho\vec{v}(x,t) . \text{ On pourra aussi utiliser l'analogie avec la conservation de la charge . On en déduit la relation } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} : (2)$$

4.2.3. Au passage de la perturbation, la transformation est supposée adiabatique. Avec le volume

$$V = \frac{m}{\rho}, \text{ on obtient : } \chi_s = -\left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} : (3)$$

4.2.4. En combinant ces trois relations et pour la surpression  $p(x,t)$ , on obtient l'équation :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0 . \text{ On pose } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

La solution générale en onde plane est de la forme :  $p(x,t) = p_1(x-ct) + p_2(x+ct)$

4.2.5. On appelle onde (acoustique) plane progressive chacune des ondes qui constituent l'onde plane, par exemple  $p_1(x-ct)$  est progressive vers les  $x$  croissants à la vitesse  $c$  ; dans le cas

$$\text{d'un gaz parfait on a } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 344 \text{ms}^{-1} .$$

4.3. Mesure de la vitesse de propagation de l'onde.

4.3.1. D'après l'oscillographe, on mesure  $4T = 10.10\mu s \Rightarrow f = 40\text{kHz}$  ; avec  $\frac{\Delta f}{f} = 2\%$

4.3.2. Les signaux sont en phase pour la  $10^{\text{ème}}$  fois pour un déplacement du capteur de la distance  $d_{10}$  . Soit  $\lambda$  la longueur d'onde, on a donc  $d_{10} = 10\lambda$  . Or la vitesse de propagation est donnée par la relation  $c = \lambda f$ , d'ou  $c = 344\text{ms}^{-1}$  : valeur conforme à celle donnée par la théorie. Compte tenu des incertitudes qui entachent les mesures de  $d$  et de  $f$ , on obtient :  $c = 344 \pm 9 \text{ms}^{-1}$ .

L'onde fait un aller retour  $2d = c \cdot \tau$ , d'où on déduit  $d = 1,35\text{m}$  .