المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche
Scientifique et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Mohammadia d'Ingénieurs

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs
et Établissements Assimilés

Session 2014

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Filière **PSI**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 7 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Problème I – Etude d'un pendule

1. Pendule pesant

On considère un pendule pesant (P), dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{e}_z$ uniforme, constitué :

- d'une tige (T) de forme cylindrique, de longueur $l = OC$, de dimension latérale négligeable devant sa longueur et de masse m_T. Le moment d'inertie de la tige par rapport à son extrémité est $J_T = \dfrac{m_T l^2}{3}$;
- d'un disque (D) de rayon a, de centre C et de masse m_D. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est $J_D = \dfrac{m_D a^2}{2}$.

Le disque (D) est solidaire à l'extrémité inférieure C de la tige (T).

Le pendule (P) est en mouvement de rotation, via une liaison pivot parfaite de centre O, autour de l'axe horizontal (Oy) passant par l'extrémité supérieure O de la tige (T) et perpendiculaire au plan de la figure 1.1.

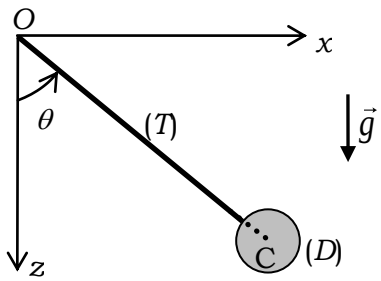

figure 1.1

La position du pendule (P) est repérée par l'angle θ que fait son axe de symétrie avec l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre $R(O,x,y,z,t)$ supposé galiléen.

A l'instant choisi comme origine des temps, le pendule est abandonné avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dfrac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$. On associe au référentiel (R) la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On néglige tout frottement (sauf indication contraire) et on étudie le mouvement du pendule dans le plan vertical (Oxz).

1.1. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ?

1.2. Définir le référentiel terrestre. Citer une expérience historique qui a permis de mettre en évidence le caractère non galiléen de ce référentiel. Justifier que dans notre étude, ce référentiel peut être considéré galiléen.

1.3. Que signifie "liaison pivot parfaite de centre O" ? Quelles conséquences cela a-t-il ?

1.4. En utilisant le théorème d'Huygens, calculer le moment d'inertie J_P du pendule par rapport à l'axe de rotation (Oy).

1.5. Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{(P/R)}$ du pendule et le vecteur vitesse $\vec{V}_{(G/R)}$ du cendre de masse G du pendule dans le référentiel (R).

1.6. Parmi les forces appliquées au pendule, il y a la poussée d'Archimède. Donner les caractéristiques de cette force. Cette force sera négligée dans la suite de l'étude. Justifier qu'il est légitime de la négliger.

1.7. Quelles sont les forces appliquées au pendule (P) ? Calculer le travail de chaque force. En déduire que le système étudié est conservatif et donner l'expression de son énergie potentielle E_p. On choisit l'origine des énergies potentielles $E_p(\theta=0)=0$.

1.8. Exprimer l'énergie cinétique E_c et l'énergie mécanique E_m du pendule.

1.9. Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule. Le pendule étudié est-il un système linéaire ? Justifier.

1.10. Retrouver l'équation établie dans la question précédente en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire au pendule (P).

1.11. Montrer que, lorsque l'énergie mécanique est telle que $0<E_m<E_0$, le mouvement du pendule pesant est oscillatoire et ne peut avoir lieu que si $\theta\in[-\theta_m,+\theta_m]$. Donner l'expression de E_0. Exprimer la période $T(\theta_m)$ d'oscillation du pendule sous forme d'une intégrale en précisant les bornes d'intégration.

1.12. Représenter dans l'espace des phases $(\theta,\frac{d\theta}{dt})$ les trajectoires possibles pour diverses valeurs de l'énergie mécanique E_m. On distinguera les deux cas $E_m<E_0$ et $E_m>E_0$. Quelle est la nature du mouvement dans le cas $E_m>E_0$? Comment reconnaît-on, dans l'espace des phases, une position d'équilibre, stable ou instable ?

1.13. A quelle condition l'énergie potentielle est harmonique ? Donner dans ce cas la loi de variation de θ en fonction du temps. Exprimer la pulsation ω_0 caractérisant le mouvement du pendule. Quelle est la longueur L du pendule simple équivalent qui permet de faire osciller un objet ponctuel de masse $m=m_D+m_T$ avec la même période ?

1.14. Proposer un montage simple permettant de relever automatiquement et de visualiser la position angulaire $\theta(t)$ du pendule sur l'écran d'un ordinateur.

1.15. Le montage de la question précédente permet d'obtenir le graphe de la figure 1.2. Commenter et justifier l'allure de $\theta(t)$. Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur ?

1.16. Pour expliquer le résultat obtenu dans la question précédente, on reste dans le cadre de l'hypothèse de l'énergie potentielle harmonique et on se place dans le cas où les frottements de l'air sur le disque ne sont plus négligeables et sont modélisables par une force $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du disque et α est une constante positive.

1.16.1. Montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit θ peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\beta\frac{d\theta}{dt}+\gamma\theta=0$. Exprimer β et γ et donner leur dimension.

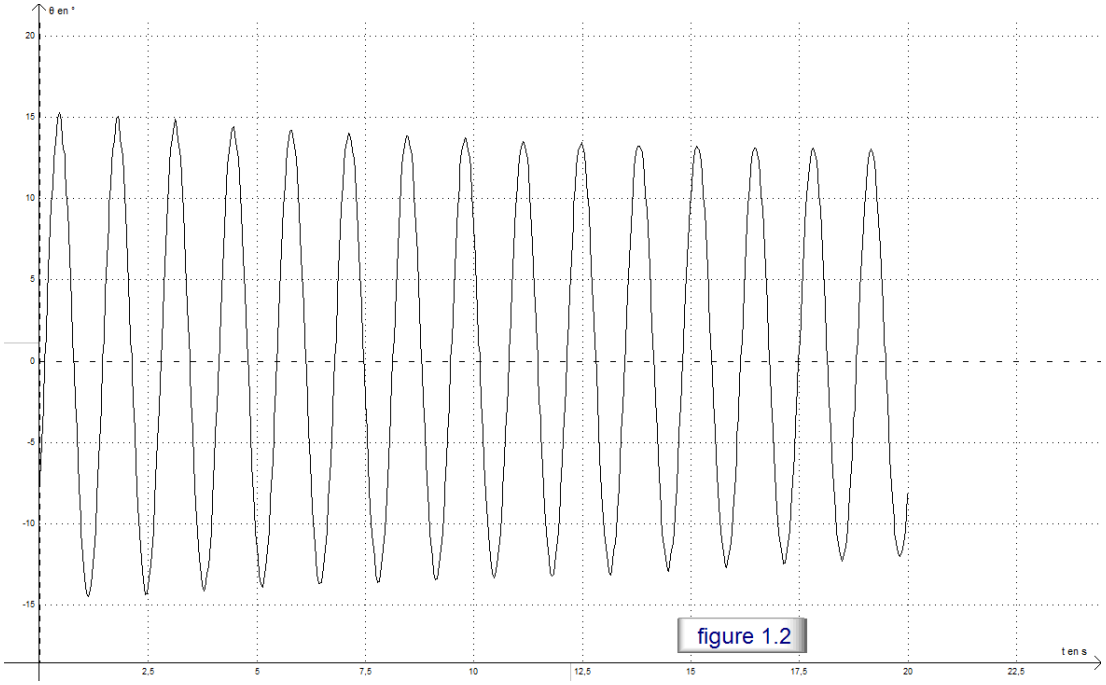

figure 1.2

1.16.2. Montrer que la solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\theta(t)=f(t).\exp(-t/\tau)$ où τ est une constante que l'on exprimera en fonction des données. Sans chercher à expliciter la fonction $f(t)$, décrire brièvement les différents régimes du mouvement du pendule.

1.16.3. A quelle(s) condition(s) sur α aura-t-on $f(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$? Exprimer alors les constantes c_1, c_2 et ω en fonction des données. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

1.16.4. Que devient l'allure du portrait de phase tracé dans la question **1.12** si l'on tient compte de la force de frottement $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$?

2. Pendules couplés par torsion

On étudie maintenant le système composé de deux pendules (P_1) et (P_2) couplés par un fil de torsion confondu avec l'axe (Oy) de constante de torsion C. Le fil de torsion qui relie les deux pendules exerce sur chacun d'eux un couple de rappel colinéaire à l'axe de rotation et proportionnel à la torsion qu'on lui impose. On suppose qu'au repos, l'angle de torsion est nul.

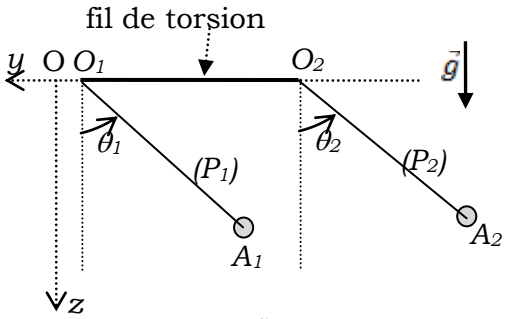

figure 1.3

Les deux pendules sont identiques et assimilés chacun à un pendule simple de masse m ponctuelle montée sur une tige indéformable de longueur L ($L=O_1A_1=O_2A_2$) et de masse négligeable. Ils sont fixes respectivement aux points O_1 et O_2 (figure 1.3).

On repère les positions des deux pendules à l'instant t par les angles θ_1 et θ_2 traduisant les rotations respectivement autour de (O_1y) et (O_2y) dans le plan vertical (Oxz) du référentiel terrestre $R(O,x,y,z,t)$ supposé galiléen. On désigne par $\vec{g} = g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur supposée uniforme et on néglige tout frottement.

2.1. Justifier que l'énergie potentielle du système des deux pendules peut s'écrire :

$$E_p(\theta_1,\theta_2) = -mgL\cos(\theta_1) - mgL\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}C(\theta_1-\theta_2)^2$$

2.2. Montrer que les équations du mouvement des deux pendules (P_1) et (P_2) s'écrivent respectivement :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\omega_1^2\sin(\theta_1) - \omega_2^2(\theta_1-\theta_2) \text{ et } \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\omega_1^2\sin(\theta_2) - \omega_2^2(\theta_2-\theta_1).$$

Exprimer les constantes ω_1 et ω_2 en fonction de g, L, C et m.

2.3. On cherche des solutions en notation complexe du type $\underline{\theta}_1(t) = \alpha_1\exp(j\omega t)$ et $\underline{\theta}_2(t) = \alpha_2\exp(j\omega t)$, où α_1 et α_2 sont des constantes. Trouver les pulsations de vibration du système étudié dans l'approximation des élongations de faible amplitude.

2.4. Quelle relation lie θ_1 et θ_2 dans chacun des types d'oscillations ? Interpréter physiquement le résultat.

2.5. On se place à présent dans le cas où les deux pulsations propres sont très proches. A quelle situation physique cela correspond il ?

2.6. On part en outre des conditions initiales : $\theta_1(t=0) = \theta_0$ et $\theta_2(t=0) = 0$, les vitesses initiales des deux pendules étant toutes deux nulles. Etablir alors les lois $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. Interpréter ce type d'oscillations appelé «pendules sympathiques».

2.7. A la lumière de toutes ces questions, comment déterminer expérimentalement les différentes caractéristiques de ce système mécanique ?

Problème II – Mesure de débit volumique

On se propose d'étudier dans ce problème un débitmètre électromagnétique. Ce dernier est utilisé dans l'industrie chimique, pharmaceutique, traitement des eaux et eaux usées, agroalimentaire …pour la mesure du débit volumique de liquides, pâte et boues dans une conduite ayant une conductivité électrique minimale spécifique. Le principe de ce débitmètre est fondé sur le phénomène d'induction électromagnétique. Le champ magnétique, de l'ordre de $10^{-3}\ T$ à $10^{-2}\ T$, est produit par deux bobines de Helmholtz placées de part et d'autre de la conduite de mesure (figure 2.2). La conduite est en matériaux amagnétique et est revêtue sur sa surface intérieure d'une couche isolante. Deux électrodes de mesure sont placées aux extrémités du diamètre perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$.

Lorsque le fluide circulant dans la conduite est très légèrement conducteur, on pourra mesurer la force électromotrice induite entre les deux électrodes (isolées électriquement de la conduite), et déduire le débit.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) associées au trièdre local $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.

On donne :

- Pour un champ scalaire $\Phi(r,\theta,z)$: $\overrightarrow{grad}(\Phi)=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$;
- Pour un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,z)=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_z\vec{e}_z$:

$$div(\vec{A})=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ et } \Delta(A_z(r,\theta,z)\vec{e}_z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z .$$

1. Production d'un champ magnétique uniforme

On considère deux bobines plates identiques (B_1) et (B_2) de N spires chacune, de centres respectifs O_1 et O_2 de même rayon R , de même axe (Ox) et séparées par une distance $d=O_1O_2$ (figure 2.1). Elles sont parcourues par des courants permanents de même sens et de même intensité I .

On s'intéresse au champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par les deux bobines au voisinage du point O , milieu de O_1O_2 .

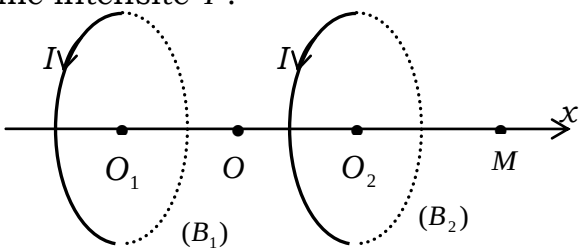

figure 2.1

1.1. Exprimer le champ magnétique total $\vec{B}$ créé par les deux bobines au point M de l'axe (Ox) en fonction de $x=OM$ et de B_0, champ magnétique total au point O .

1.2. Décrire les différents types de variation possibles de $\vec{B}$ avec x pour les points M de l'axe (Ox) en fonction du rapport $\frac{d}{R}$.

1.3. Montrer que, avec $d = R$, le champ magnétique $\vec{B}$ est donné par $\vec{B}(x) = \vec{B}_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 NI}{R} \vec{e}_x$ au troisième ordre en $u = \frac{x}{R}$. $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire directeur de l'axe (Ox). Avec quelle précision peut-on admettre que $B(x)$ est constant entre O_1 et O_2 ?

On suppose dans la suite que le champ magnétique est quasiment uniforme dans la région voisine du point O et vaut $\vec{B}(M) = \vec{B}_0$.

2. Mesure de débit volumique

Les bobines de Helmholtz étudiées dans la partie précédente sont disposées de part et d'autre d'une conduite (C) horizontale cylindrique électriquement isolante de rayon a et d'axe (Oz) (figure 2.2).

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide homogène et incompressible, soumis au champ magnétique uniforme et permanent, dans la conduite (C).

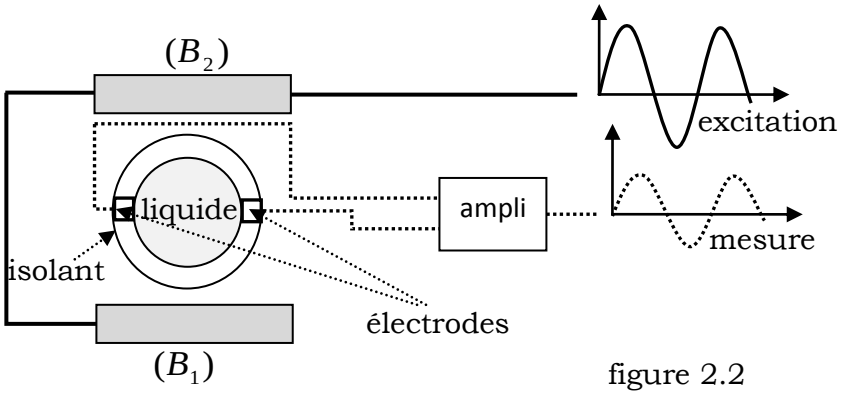

figure 2.2

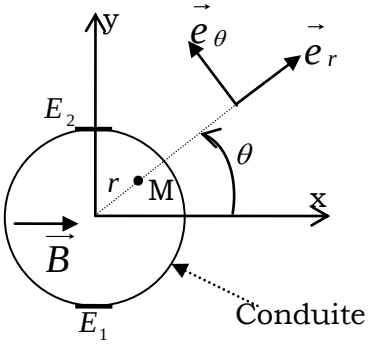

figure 2.3

Le fluide, de masse volumique ρ, de viscosité η et de conductivité électrique γ, est supposé très légèrement conducteur.

On suppose que le champ créé par les deux bobines de Helmholtz est uniforme dans toute la région de l'écoulement et on le note $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$.

On néglige l'effet de la pesanteur. On note $\vec{v}(M,t)$ et $p(M,t)$ respectivement le champ de vitesse et le champ de pression au point M du fluide à l'instant t.

2.1. Définir la notion de particule fluide.

2.2. Justifier que $\vec{v}(M,t)$ et $p(M,t)$ peuvent se mettre sous la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ et $p = p(r,z)$.

2.3. On rappelle l'équation de Navier Stokes : $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v}$.

Que représente chaque terme de cette équation ? Montrer que les deux termes du premier membre de cette équation sont nuls.

2.4. Montrer que $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ et que le champ de vitesse $\vec{v}$ vérifie l'équation différentielle $\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{C_1}{\eta}$, où C_1 est une constante d'intégration. En déduire que le

champ de vitesse dans le fluide en écoulement est donné par : $v = v_0(a^2 - r^2)$. Déterminer l'expression de la constante v_0. Représenter le profil du champ de vitesse dans la conduite.

2.5. Rappeler la définition du débit volumique D_v et donner son expression en fonction de v_0 et a.

Le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ dans le fluide très légèrement conducteur est donné par la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma(-\overrightarrow{grad}(V) + \vec{v} \wedge \vec{B})$, où V est le potentiel électrique en un point du fluide.

2.6. En utilisant l'équation de conservation de la charge électrique, établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel électrique V.

2.7. Afin de déterminer le potentiel V, on procède par la méthode de séparation des variables. On cherche alors des solutions de la forme : $V(M) = g(r)\sin(\theta)$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $g(r)$. Montrer que le potentiel électrique est donné par : $V = \left(-\frac{1}{4}v_0 B_0 r^3 + \frac{1}{2}C_2 r\right)\sin(\theta)$ où C_2 est une constante.

2.8. Sachant que la conduite est isolante, déterminer l'expression de la constante d'intégration C_2.

2.9. Etablir l'expression de la différence de potentiel $U = V_{E_2} - V_{E_1}$ entre les deux électrodes E_1 et E_2 (figure 2.3). En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction de U. Calculer la valeur numérique de D_v. On donne : $B_0 = 1\,mT$; $a = 50\,cm$ et $U = 1\,mV$.

2.10. Les bobines d'Helmholtz sont en réalité alimentées par une tension alternative $30\,Hz$. Expliquer pourquoi ?

2.11. La tension mesurée est de l'ordre du millivolt ce qui est faible et nécessite une "détection synchrone". Expliquer le principe de cette détection.