

Partie I Caractérisation d'un écoulement.

IA Ordres de grandeur

IA1

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ donc en } \frac{\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}}, \text{ soit en } \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \text{m}^3$$

$$\nu \text{ est en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{A.N. } \nu_{\text{eau}} \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \nu_{\text{air}} \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu \nabla \vec{v} = \eta \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{\varphi}_{\text{visco}}$$

$$\text{IA2 } R = \frac{U D}{\nu} = \frac{\mu U D}{\eta} = \text{mbre de Reynolds}$$

Il est sans dimension. Il permet de savoir si un écoulement est susceptible d'être turbulent.

$$\text{IA3 } \chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Rightarrow \chi \text{ en } \text{Pa}^{-1}$$

$$\chi_{\text{eau}} \approx 10^{-9} \text{ à } 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \quad \chi_{\text{gaz}} \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gaz parfait} \\ \text{isentropique} \end{array} \right\} \Rightarrow P V^\gamma = \text{cte} \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P} \quad \chi_{\text{gaz}} \gg \chi_{\text{liq}}$$

$$M = U \sqrt{\mu \chi} = \frac{U}{C_{\text{son}}} = \text{nombre de Mach.}$$

c'est un coefficient sans dimension qui permet de savoir si un écoulement est sub, trans. ou supersonique.

IA4

$$a) [\rho] = \text{m}^{2\alpha} \text{s}^{-\alpha} \text{kg}^\beta \text{m}^{-3\beta} \text{m}^\gamma \text{s}^{-\gamma} \text{Pa}^{-\delta} \text{m}^\epsilon \text{s}^{2\epsilon}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -\alpha - \gamma + 2\epsilon = 0 \\ \beta - \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$b) \alpha=1, \beta=0 \Rightarrow \epsilon=0, \gamma=-1, \delta=-1 \quad \left[\rho = \frac{1}{R} \right]$$

$$\alpha=0, \beta=1 \Rightarrow \epsilon=1, \gamma=2, \delta=0 \quad \left[\rho = M^2 \right]$$

IB

$$\text{IB1 a) } \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \mu \nabla \vec{\Delta} \vec{v} - \text{grad } P$$

$$b) t_n = \frac{\eta_n}{v_n} = \frac{\eta/D}{v/U} \Rightarrow t_n = t \frac{U}{D}$$

c) P_n est bien sans dimension!

$$d) v = U v_n, t = t_n \frac{U}{D} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{U^2}{D} \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t_n}$$

$$\dots \text{d'où } \mu \frac{U^2}{D} \left[\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t_n} + (\vec{v}_n \cdot \text{grad}_n) \vec{v}_n \right] = \frac{\mu U^2}{D} \nabla_n \vec{\Delta}_n \vec{v}_n - \frac{1}{D} \text{grad}_n P_n$$

Et en multipliant par $\frac{D}{\mu U^2}$:

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t_n} + (\vec{v}_n \cdot \text{grad}_n) \vec{v}_n = \frac{1}{R} \nabla_n \vec{\Delta}_n \vec{v}_n - \frac{1}{M^2} \text{grad}_n P_n$$

I.B.2 Si on veut la même équation adimensionnée pour le mouvement de la maquette et de l'objet réel, il faut:
 $M = M'$ et $R = R'$

I.B.3 On rajoute μg dans l'équation de Navier-Stokes; comme plus haut, on multiplie par $\frac{D}{\mu U^2}$. Le terme dû à la pesanteur est donc $\frac{D}{U^2} g$. Pour les similitudes, il faut donc que $\frac{D}{U^2} g = \frac{D'}{U'^2} g$

I.B.4

$$a) F' = F \Rightarrow U' = U \sqrt{\frac{D'}{D}} = \frac{5,1}{\sqrt{20}} \Rightarrow U' = 1,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

cela semble faible.

$$b) R' = R \Rightarrow V' = V \frac{U' D'}{U D} \Rightarrow V' = 0,011 V$$

Il ne va pas être facile de trouver un fluide de 100 fois moins visqueux mais avec la même masse volumique que l'eau.

$$c) \text{ Si } \rho = \rho', V = V' \text{ et } F = F', R' = R \frac{U' D'}{U D} \Rightarrow R' = R \left(\frac{D'}{D} \right)^{3/2} = 86 \cdot 10^3$$

Les risques de turbulences sont donc aussi importants avec la maquette qu'avec le navire réel.

d) $M' = M$ est impossible si on prend le même fluide et si on impose $F' = F$. Mais ce n'est pas gênant si on est en subsonique dans les deux cas ($M < 1$ et $M' < 1$), ce qui est probable pour des navires.

$$e) \text{ On peut prendre } P_0 = \frac{\mu U^2}{D} \text{ et } P_n = P/P_0$$

$$\text{Alors } \text{grad } P = \frac{P_0}{D} \text{grad}_n P_n = \frac{\mu U^2}{D} \text{grad}_n P_n$$

Ainsi, après multiplication par $\frac{D}{\mu U^2}$, le terme de pression devient $-\text{grad}_n (P_n)$

IB5 a) Ce sont des ondes de gravité.

$$b) \omega \text{ est en } \text{s}^{-1}, k \text{ en } \text{m}^{-1}, g \text{ en } \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ donc } \frac{k g}{\omega^2} \text{ est sans dimension} \Rightarrow \frac{k g}{\omega^2} = 1 ?$$

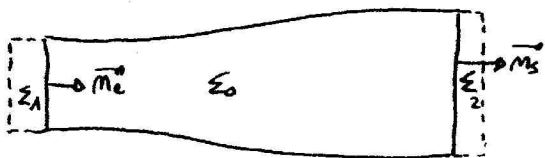
c) La gravité est liée au nombre de Froude. D'où $\vec{F}_{pi} = - \iint_{S_e \cup S_s} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} ds - \iint_{S_e \cup S_s} \vec{R} ds$
 C'est donc $\boxed{F' = F}$ qui permet de transposer.

Partie II - Poussée d'un turbo-réacteur :

II-A Efforts exercés par l'air intérieur :

II.A.1 / A cause de la viscosité.

II.A.2 / Soit un système fermé Σ^* décomposé à t en $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ et à $t+dt$ en $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$. $\Sigma^*(t)$ et $\Sigma^*(t+dt)$ sont délimités par deux positions (très peu différentes) d'un tube de courant.



Appliquons à Σ^* un bilan de quantité de mouvement :

$$\vec{p}^*(t) = \mu_e \iint_{S_e} \vec{v}_e \cdot \vec{m}_e dS_e dt \vec{v}_e + \vec{p}(\Sigma_0, t)$$

$$\vec{p}^*(t+dt) = \mu_s \iint_{S_s} \vec{v}_s \cdot \vec{m}_s dS_s dt \vec{v}_s + \vec{p}(\Sigma_0, t+dt)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}^*}{dt} = \mu_s \iint_{S_s} \vec{v}_s \cdot \vec{m}_s dS_s \vec{v}_s - \mu_e \iint_{S_e} \vec{v}_e \cdot \vec{m}_e dS_e \vec{v}_e \quad (\text{régime stat.})$$

$$\text{Or, } \frac{d\vec{p}^*}{dt} = + \iint_{S_u} (-\vec{R}) dS_u$$

Sur la face S_e , la normale extérieure est $\vec{m} = -\vec{m}_e$, et sur S_s , $\vec{m} = +\vec{m}_s$. Il vient :

$$\iint_{S_s \cup S_e} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \vec{v} + \iint_{S_u} \vec{R} dS = 0$$

Et puisque $\vec{v} \cdot \vec{m} = 0$ sur la paroi latérale du tube de courant, $\iint_{S_s \cup S_e} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \vec{v} = \iint_{S_u} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \vec{v}$

II.A.3 / D'après la question précédente,

$$\vec{F}_{pi} = - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_e \cup S_s} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} ds - \iint_{S_e \cup S_s} \vec{R} \cdot dS$$

Et $\vec{v} \cdot \vec{m} = 0$ sur les parois du réacteur, et sur l'obstacle central.

$$\vec{F}_{pi} = -\mu_e v_e^2 A_e \vec{u}_3 + \mu_s v_s^2 A_s \vec{u}_3 - \iint_{S_e \cup S_s} \vec{R} ds$$

$$\iint_{S_e \cup S_s} \vec{R} ds = P_e A_e \vec{u}_3 - P_s A_s \vec{u}_3$$

$$\boxed{\vec{F}_{pi} = \mu_s v_s^2 A_s - \mu_e v_e^2 A_e + P_s A_s - P_e A_e}$$

II.A.4 /

Le champ des vitesses est quasi-uniforme en amont de l'avion. En prenant en compte les forces de pression, on a :

$$\iint_{S'} \vec{R} ds' = (P_0 A_0 - P_e A_e) \vec{u}_3 - \vec{F}_{pression \rightarrow S_e}$$

De plus, on peut écrire :

$$\iint_{S'} \vec{R} ds' = - \iint_{S'} \mu (\vec{v} \cdot \vec{m}) \vec{v} ds' = - [\mu_0 v_0^2 A_0 \vec{u}_3 - \mu_e v_e^2 A_e \vec{u}_3]$$

Car la contribution de la paroi latérale est nulle.

D'où :

$$\boxed{P_0 A_0 - P_e A_e = \mu_e A_e v_e^2 - \mu_0 A_0 v_0^2 + \vec{F}_{pression \rightarrow S_e} \cdot \vec{u}_3}$$

$$\text{avec } \vec{F}_{pression \rightarrow S_e} = \iint_{S_e} P(-\vec{m}) dS$$

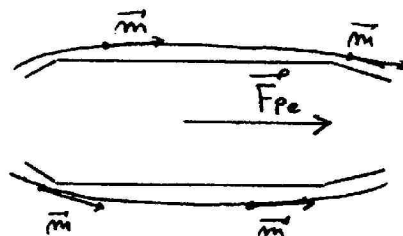
II.A.5 /

$$\vec{F}_{pi} = \mu_s v_s^2 A_s + P_s A_s - P_e A_e - [P_0 A_0 - P_e A_e + \mu_0 v_0^2 A_0 + \iint_{S_e} P \vec{m} \cdot \vec{u}_3 dt]$$

Lequel donne bien la formule de l'énoncé.

II.B Efforts exercés par l'air extérieur :

II.B.1 /



II.B.2 /

La résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée est nulle si la pression est uniforme (ceci peut être une application particulière du théorème d'Archimède pour $\vec{g} = \vec{0}$)

$$\vec{F}_p = \iint_{S_3} P_0 \vec{m}' ds + \iint_{S_3} (P - P_0) \vec{m}' ds + \iint_{S_3} \vec{g} \vec{m}' ds$$

or, ma $\iint_{S_3 \cup S_t \cup S_0 \cup S_5} P_0 \vec{m}' ds = \vec{0}$, d'où :

$$\vec{F}_p = \iint_{S_3} (P - P_0) \vec{m}' ds + \iint_{S_3} \vec{g} \vec{m}' ds - \iint_{S_t} P_0 \vec{m}' ds - \iint_{S_0} P_0 \vec{m}' ds - \iint_{S_5} P_0 \vec{m}' ds$$

avec $\vec{m}' = -\vec{m}$.

$$-\iint_{S_0} P_0 \vec{m}' ds = \iint_{S_0} P_0 \vec{m} ds = P_0 A_0 \vec{u}_3$$

$$-\iint_{S_5} P_0 \vec{m}' ds = \iint_{S_5} P_0 \vec{m} ds = -P_0 A_5 \vec{u}_3$$

on retrouve bien la formule de l'énoncé.

II C) Poussée totale :

II C1) Erreur de typographie : dans l'énoncé,

F_p devrait être en gras (vecteur) :

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{p_e} + \vec{F}_{p_i} \text{ donne :}$$

$$\vec{F}_p = (P_s - P_0 + \mu_s v_s^2) A_s \vec{u}_3 - \mu_0 v_0^2 A_0 \vec{u}_3 - \iint_{S_t} (P - P_0) \vec{m} ds - \iint_{S_3} (P - P_0) \vec{m} ds + \iint_{S_3} \vec{g} \vec{m} ds$$

$\iint_{S_t} -(P - P_0) \vec{m} ds$ est une force de traînée car

$P > P_0 \Rightarrow$ elle est selon $-\vec{u}_3$, donc freine le mouvement du réacteur. Elle est dite de "captation" car elle correspond au flux d'air entrant

$\iint_{S_3} -(P - P_0) \vec{m} ds$ correspond à l'air qui

freine la carène, à savoir la partie externe du réacteur.

II C2) Si $P = P_0$ et $g = 0$, $\vec{F}_p = (\mu_s v_s^2 A_s - \mu_0 v_0^2 A_0) \vec{u}_3$

Il semble qu'il y ait une erreur de signe dans l'énoncé : si $\vec{v}_s = v_s \vec{u}_3$, alors $v_s < 0$.

$\boxed{D_m = \mu_s |v_s| A_s = \mu_0 v_0 A_0}$ est le débit massique, partout (on est en régime permanent)

II C3) $F_p = D_m v_s + D_m |v_s| - D_m v_0$

$$\lambda = \frac{D_m v_s}{D_m v_0} \quad D_m = D_m (1 + \lambda)$$

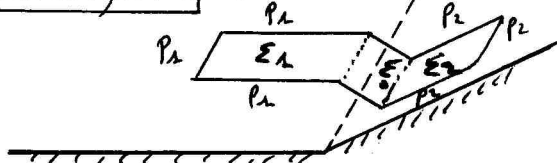
$$\boxed{F_p = \left[\frac{\lambda |v_s| + |v_s|}{1 + \lambda} - v_0 \right] D_m}$$

Partie III - Ondes de choc supersoniques:

III.A

Régime stationnaire $\Rightarrow$ pas d'accumulation de masse dans le cylindre. Donc les débits massiques sont les mêmes à l'entrée et à la sortie du cylindre: $\mu_1 \mu_2 S = \mu_2 \mu_2 S$

D'où $\mu_1 \mu_1 = \mu_2 \mu_2$. (1)



on considère le fluide (système fermé). Σ se décomposant à t en $\Sigma_1 U \leq 0$ et à t+dt en $\Sigma_2 U \geq 2$. Soit dm sa masse. $dm = dm_1 + dm_2 = dm_1 + dm_2$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{dt}$$

La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (P_1 - P_2) S \vec{M}_{1 \rightarrow 2}$$

Et $dm_1 = \mu_1 \mu_1 S dt = \mu_2 \mu_2 S dt = dm_2$

D'où $\mu_1 \mu_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (P_1 - P_2) \vec{M}_{1 \rightarrow 2}$

En projetant sur $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}$: $\mu_1 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1) = P_1 - P_2$ (2)

En projetant sur le point: $\vec{e}_t$ de l'onde de choc:

$$\mu_1 \mu_1 (w_2 - w_1) = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$$

III.B

Notons u_i l'énergie interne massique.

Le 1^{er} principe appliqué à Σ^* donne:

$$dm_1 \left[u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - u_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right] = P_1 \delta V_1 - P_2 \delta V_2$$

où δV_1 et δV_2 sont les volumes de Σ_1 et Σ_2

$$dm_1 u_1 + P_1 \delta V_1 = dm_1 h_1$$

$$dm_2 u_2 + P_2 \delta V_2 = dm_2 h_2 = dm_1 h_2$$

D'où $h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} v_1^2$

Modèle du gaz parfait: pour n moles,

$$dH = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} dT. \text{ D'où } dh = \frac{1}{m} \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} dT$$

d'où $dh = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT$

$$\Rightarrow h_2 - h_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

Equation d'état: $\frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M} = \frac{RT}{m}$

$$h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\mu_2} - \frac{P_1}{\mu_1} \right)$$

$$\text{Et } v_1^2 - v_2^2 = u_1^2 + w_1^2 - u_2^2 - w_2^2 = u_1^2 - u_2^2$$

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\mu_2} - \frac{P_1}{\mu_1} \right) = u_1^2 - u_2^2 \quad (3)$$

III.C

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mu_1 u_1^2 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) = P_1 - P_2$$

D'où $u_1^2 = \frac{P_1 - P_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}$ et $u_2^2 = \frac{P_1 - P_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\mu_1}{\mu_2}$

$$(3) \Rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\mu_2} - \frac{P_1}{\mu_1} \right) = \frac{1 - x}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\mu_1 \mu_2}$$

D'où $\frac{2\gamma}{\gamma - 1} (x \mu_1 - \mu_2) = -(1 - x)(\mu_1 + \mu_2)$

$$\mu_1 \left[\frac{2\gamma x}{\gamma - 1} - x + 1 \right] = \mu_2 \left[-1 + x + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right]$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} x + 1}{x + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \Rightarrow \text{on a bien } \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1+kx}{k+x}$$

III.D

Pour n moles, l'entropie d'un gaz parfait est $S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T r p^{1-\gamma}) + C_1 t_1$

D'où l'entropie molaire: $s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln(T r p^{1-\gamma}) + C_2 t_2$

et $T = \frac{P}{\mu n}$ donc $T r p^{1-\gamma} = C_3 \times P \mu^{-\gamma}$

D'où $s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln(P \mu^{-\gamma}) + C_4 t_4$

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{\gamma - 1} \left[\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - \gamma \ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \right]$$

$\frac{N_B}{S} S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T r p^{1-\gamma}) + C_1 t_1$ se démontre en utilisant un chemin réversible.

III.E

Appliquons le 2^e principe à Σ^* :

$$dm_1 (s_2 - s_1) = \underbrace{\delta S^r}_{=0} + \underbrace{\delta S^c}_{>0} \text{ car irréversible.}$$

D'où $s_2 - s_1 > 0$, donc $\ln x > \gamma \ln \frac{1+kx}{k+x}$

$$\Rightarrow \ln x > \ln \left(\frac{1+kx}{k+x} \right) \Rightarrow x > \frac{1+kx}{k+x} \Rightarrow x^2 > 1$$

$$\Rightarrow x > 1 \Rightarrow P_2 > P_1$$

(2)

$$\left. \begin{matrix} (2) \\ P_2 > P_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mu_2 - \mu_1 < 0 \Rightarrow \mu_1 > \mu_2$$

III.F

$$C_1^2 = \frac{1}{\mu_1 \kappa_{s1}} \text{ avec } \kappa_{s1} = \frac{1}{\gamma P_1} \text{ pour un gaz parfait}$$

D'où $C_1^2 = \frac{\gamma P_1}{\mu_1}$